ББК 65.05
Г 55

Глухов В. В., Медников М. Д., Коробко С. Б.
Г 55 Математические методы и модели для менеджмента. 2-е изд., испр. и доп. — СПб.: Издательство «Лань», 2005. — 528 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 5-8114-0278-3

Учебное пособие состоит из трех частей: методы менеджмента, типовые модели менеджмента, прикладные модели менеджмента.

Предусмотрена отработка навыков подготовки и принятия управленческих решений с реализацией типовых задач менеджмента на компьютере. Для этой цели используются пакеты прикладных программ QSB, Excel, Matlab.

Учебное пособие предназначено для студентов, аспирантов, преподавателей экономических вузов и менеджеров.

ББК 65.05

Обложка
С. ШАПИРО, А. ЛАПШИН

ВВЕДЕНИЕ

В первых известных письменных источниках отмечается, что математические знания на Руси были распространены уже в X-XI вв. Они были связаны с практическими нуждами: летоисчислением, вычислением поголовья стада, определением прибыли от урожая и т. д. Одно из древних русских математических произведений — это «Учение им же ведати человеку числа всех лет», написанное новгородским монахом Кириком в 1136 г. Оно посвящено календарным расчетам и правилам определения дат церковных праздников, привязанных к движению солнца и луны.

В XVI-XVII вв. в России появляется и распространяется рукописная математическая литература, посвященная измерению земель, податному обложению, градостроительству и военному делу, торговым расчетам. В основном они предназначались для купцов, ремесленников, чиновников, землемеров и носили сугубо практический характер. Материал их распределялся по «статьям», содержащим указания, как надо поступать при решении тех или иных задач. Рукописи XVI-XVII вв. сыграли большую роль в распространении математических знаний и на их основе создавалась в последующем первая учебная литература.

Маркиз Беккариа (1738-1794) одним из первых обратился к математике при исследовании экономических явлений. При определении цены золота, стоимости товара, размера тарифа он ввел алгебраические соотношения. «Математик бы сказал, что стоимость какого-либо товара находится в обратном соотношении с суммарным количеством этого товара, числом его владельцев, и в прямом — с числом претендентов на него, налогом на него, рабочей силой и важностью его доставки». Формула действительной цены золота формулировалась как отношение масс: «Гран или унция золота будет стоить ровно столько гранов или унций серебра, сколько массы золота вмещается в массу обращающегося серебра».

Одной из основных причин, вызвавших возникновение математического анализа, в особенности дифференциального исчисления, была потребность в решении задач на экстремумы. Некоторые из типовых оптимизационных задач имели следующую постановку (примеры часто бывают поучительнее многословных объяснений).

1. По трубе, сечение которой — круг с радиусом г, течет вода. Скорость течения пропорциональна так называемому гидравлическому радиусу профиля сечения (заполненного водой). При каком заполнении трубы водой скорость течения (при неизменных других условиях) будет наибольшей?

2. Заготовлен материал для изгороди длиной 1 м. Необходимо этой изгородью огородить прямоугольную площадку, имеющую наибольшую площадь. Какими должны быть размеры этой площадки?

3. Из бревна цилиндрической формы, диаметр которого $2R$, необходимо изготовить балку прямоугольного сечения, имеющую наибольшую прочность. Какими должны быть размеры балки, если инженерные расчеты показывают, что прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна ширине балки и квадрату ее высоты?

4. Какими должны быть размеры цилиндрической цистерны заданного объема V кубических метров, чтобы расход листового железа на изготовление ее был наименьшим?

5. Стоимость хода корабля складывается из стоимости расходуемого двигателями горючего и остальных расходов. Установлено, что стоимость горючего пропорциональна третьей степени скорости хода корабля. Остальные расходы от скорости хода не зависят, и их можно считать постоянными. Необходимо определить скорость хода корабля, при которой расходы на каждый километр пройденного пути будут наименьшими.

6. Для какой крыши (двухскатной или четырехскатной) потребуется больше материала?

7. Из квадратного листа железа со стороной A мм нужно сделать открытый сверху ящик. Для этого по углам листа вырезают равные квадраты и из получившейся крестовины сгибают ящик. Какие квадраты нужно вырезать по углам листа, чтобы получился ящик наибольшей вместимости?

8. Из прямоугольного листа железа, ширина которого A мм, делают желоб прямоугольного сечения. С этой целью по краям листа отгибают полосы. Какой ширины должны быть эти полосы, чтобы получился желоб с наибольшей пропускной способностью?

9. Сечение тоннеля представляет собой прямоугольник с примыкающим к нему сверху полукругом. Диаметр полукруга равен основанию прямоугольника. Периметр сечения тоннеля должен быть равен А м. Какими должны быть размеры сечения, чтобы пропускная способность тоннеля была наибольшей?

10. Из трех одинаковых досок шириной A см нужно сделать желоб, поперечное сечение которого имело бы форму трапеции. Как это сделать так, чтобы пропускная способность желоба была наибольшей?

11. Какой из всех треугольников с данным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

Задачи на экстремум — это поиск наиболее выгодного в определенном смысле, наиболее экономного, наименее трудоемкого, наиболее производительного. В поисках наилучшего помогает наука, причем задачи на экстремумы — одно из наиболее могучих ответвлений математического анализа. Почти для каждой задачи на экстремум приходилось изобретать подходящий прием ее решения.

Многими подобными задачами занимались выдающиеся математики XVII в.: Блез Паскаль (1623-1662), Пьер Ферма (1601-1665). Их работами было подготовлено введение основных понятий математического анализа — общего метода решения оптимизационных задач. Он был разработан Исааком Ньютоном (1643-1727), Готфридом В. Лейбницем (1646-1716). В десятку наиболее выдающихся достижений математики относится разработка понятия производной. Оно стало основой общего приема решения задач на экстремумы. В 1699 г. швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667-1738) сформулировал задачу о брахистохроне (форма кривой, по которой точка скатывается в кратчайший срок), что было первой вариационной задачей.

Становление математических знаний в России связано с двумя выдающимися учеными: Л. Ф. Магницким (1669-1739) и Л. Эйлером (1707-1783). Реформы, начатые Петром I, коснулись и образования. Как писал М. В. Ломоносов, Петр I «усмотрел тогда ясно, что ни полков, ни городов надежно укрепить, ни кораблей построить и безопасно пустить в море, не употребляя математики...». Лучшим математиком Москвы в 1700 г. был Л. Ф. Магницкий, которому было поручено создать учебник по математике и навигации для только что созданной Математико-навигационной школы. «Вратами учености» позже назвал «Арифметику»

Магницкого, напечатанную в 1703 г. по распоряжению Петра I, М. В. Ломоносов.

Леонард Эйлер был приглашен в 1727 г. в только что созданную Петербургскую академию наук. Ему было 20 лет, но период его работы в Петербурге был отмечен значительными достижениями. Он постоянно делал научные доклады на академических конференциях, выступал с публичными лекциями по математике и физике, принимал активное участие в работе комиссии по обследованию машин и технических проектов, публиковал в каждом томе «Комментариев Петербургской академии наук» по несколько своих научных трудов.

После отъезда из России в 1741 г. Эйлер поддерживал постоянную связь с Петербургской академией наук, печатался в ее изданиях, руководил молодыми русскими учеными, направляемыми на учебу за границу. «Эйлер стал добрым гением нашей Академии, определившим ее славу, ее крепость, ее продуктивность» (С. И. Вавилов — Президент Академии наук СССР). Он вернулся в Петербург в 1766 г., где продолжил свои обширные научные исследования и активную научно-организационную работу. Л. Эйлер является основателем русской научной математической школы. Ему принадлежат системное изложение математического анализа (пять томов), математические основы механики, теория кораблестроения, теория движения Луны и планет и т. д. «Творчество Эйлера изумительно и в науке беспримерно» (А. Н. Крылов).

XX столетие стало периодом становления теории оптимизационных управленческих решений в экономике и менеджменте. Из трудов российских ученых первой половины XX в. следует выделить работы А. А. Маркова, В. В. Новожилова, Л. В. Канторовича и Л.С. Понтрягина. Работы А. А. Маркова (1856-1922) стали основополагающими для развития теории динамического программирования. В. В. Новожилов (1892-1970), опираясь на математический метод Лагранжа, сформулировал специальную область математического обоснованного выбора оптимальных проектных вариантов. С работами Л. В. Канторовича (1912-1986) связано становление современной теории оптимизационных управленческих решений. В 1939 г., решая прикладную задачу раскроя листового материала, Л. В. Канторович предложил математический метод поиска оптимального решения, получивший впоследствии название «линейное программирование». Базовым положением математической теории управления стал математический метод оптимизации, разработанный Л. С. Понтрягиным. Он в теории оптимизации получил название «принцип максимума Понтрягина».

Для обозначения совокупности математических методов, применяемых в экономике и менеджменте, использовались различные наименования. Первоначально наиболее часто использовалось название «экономическая кибернетика», затем — «исследование операций», «экономико-математические методы», «математические методы для менеджмента».

Современный аппарат математических методов для решения экономических и управленческих задач превратился в самостоятельную научную и прикладную области. Однако возможности вычислительной техники и созданного программного обеспечения позволяют руководителю остановиться только на математической формализации проблемы, после чего решение превращается в использование имеющихся компьютерных программ. Однако умение формализовать возникающую проблему требует особой методологии рассмотрения ситуации.

В работе рассматриваются математические модели и методы решения управленческих задач, ориентированные на оптимизацию выбираемого варианта.

Математика имеет дело не с реальным объектом, а с его математической моделью. Математическая формализация проблемы — это 50% успеха на пути ее решения. Трудность состоит в том, чтобы избежать ненужной детализации, сохранить значимые условия и сформулировать задачу в виде одной из типовых моделей. Для того, чтобы положиться на теорию оптимизации, необходима убежденность в полезности системного математического подхода к управлению.

Формулируя задачу, необходимо установить определяемые переменные, ограничивающие ресурсы, оптимизационную оценку вариантов решения. Цель решения оптимизационной задачи является принципиальным признаком для последствий управленческих решений.

Например, установление заработной платы ремонтного персонала пропорционально времени ремонтных работ приведет к тому, что оборудование будет больше ремонтироваться, чем работать. Для того чтобы оценить последствия реализации той или иной цели, необходимо иметь хорошую модель анализируемого явления, с помощью которой можно оценить все варианты результата. Умение ставить правильную цель в управленческом решении является одним из признаков интеллекта.

В основу материала книги положен курс лекций, читаемый авторами в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете. Экономико-математическая школа вуза была создана Л. В. Канторовичем и В. В. Новожиловым в начале 1940-х гг. В рамках этой научной школы профессорами А. А. Первозванским, С. А. Соколицыным, В. В. Глуховым, П. П. Долговым, Б. И. Кузиным, В. Р. Окороковым были разработаны оригинальные прикладные математические модели и методы, которые использованы при написании данного учебного пособия.

Материал учебного пособия разделен на три раздела. Первый раздел посвящен математическим методам, применяемым в менеджменте, второй — типовым моделям менеджмента, третий — прикладным математическим моделям из наиболее крупных областей промышленности. Изучение материала предполагает наличие у читателя знаний по высшей математике и теории вероятностей в объеме соответствующих вузовских курсов для экономических специальностей. При изложении используется множество примеров, что позволяет быстрее освоить методы решения оптимизационных задач. Эти примеры образуют единое целое с основным текстом. Они либо иллюстрируют существо излагаемого материала, либо указывают на возможности его обобщения.

Книга предназначена для студентов экономических специальностей, изучающих математические методы решения экономических и управленческих задач, для специалистов, интересующихся оптимизационным аппаратом выработки управленческих решений.

В жизни почти всегда бывает так, что человек, владеющий разными инструментами (по своей профессии) и применяющий их в зависимости от характера выполняемой работы, добивается лучших результатов, чем человек, владеющий лишь универсальным приемом. В одних случаях можно выполнить вычисления устно, в других — необходим лист бумаги для расчетов, в-третьих — расчет на компьютере, в-четвертых — привлечение специальной программы оптимизационных расчетов. Нужно знать и уметь пользоваться универсальными и частными приемами, которые ведут к цели быстрее и легче.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

МЕТОДЫ МЕНЕДЖМЕНТА

Математика имеет хороший инструмент. Экономика обладает хорошим материалом. Экономико-математические методы — это совмещение хорошего инструмента с хорошим исходным материалом.

Генрих Герц

ГЛАВА 1

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ МЕНЕДЖМЕНТА

В мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.

Леонард Эйлер

Из ведра, содержащего 5 литров воды, ОТЛИВАЮТ **1 литр, д злте.и в ведро** ВЛИВАЮТ **1 литр** СОКА**. Пере.кешлв все это, из ведрд** ОТЛИВАЮТ **1 литр смеси, здте.и в ведро опять** ВЛИВАЮТ **1 литр** СОКА**. Опять перел\ешивлют,** ОТЛИВАЮТ **1 литр смеси и** ВЛИВАЮТ **1 литр** СОКА**. Сколько в ведре после этого остдется воды?**

СТАРИННАЯ ЗАДАЧА

1.1. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Экономико-математические методы и модели применяют с целью отыскания наилучшего решения, т. е. решения, оптимального в том или ином смысле (максимума или минимума).

Поиск наилучшего решения занимал умы людей на протяжении многих веков. Еще Евклид описал способы построения наибольшего и наименьшего из отрезков, соединяющих данную точку с окружностью, и показал, как среди параллелограммов с заданным параметром найти параллелограмм максимальной площади.

В Древнем Вавилоне и Древнем Египте математика (от греч. ***mathma*** — знание) — наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира — преподавалась как система практических навыков, крайне важных для работы государственных чиновников. В «Диалогах» Архимеда (III в. до н. э.) особенно акцентируется внимание на необходимости нематематических следствий как «очередного шага» после математических выводов.

Великие математики XVII-XVIII вв. развили новые методы оптимизации для решения комплекса задач геометрии, механики, физики. К таким задачам, например, относится отыскание минимальных поверхностей вращения или кривой наибыстрейшего спуска.

Становление математических методов анализа и выработки хозяйственных решений как самостоятельной ветви математики произошло в XVIII в.

Перефразируя изречение Галилея, можно сказать, что экономика излагается в большом количестве монографий, инструкций, положений, но понять ее может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она написана. Написана же она на математическом языке — искусственном языке, характеризующемся точными правилами построения выражений и их понимания, а знаки ее — математические формулы.

Во Франции Франсуа Кенэ, врач и экономист, предпринял одну из первых попыток экономико-математического моделирования механизма движения финансов. Он построил экономическую таблицу, рассматривающую экономику государства как единую систему. Кенэ применил идею кровообращения человека к кругообороту экономических отношений.

Карл Маркс, используя таблицы Кенэ, ввел алгебраические формулы и мечтал «вывести главные законы кризисов». В работах Маркса впервые сделано математическое формализованное описание процесса расширенного воспроизводства.

В 1838 г. французский математик Антуан Курно выпустил книгу «Исследование математических принципов теории богатства». В ней впервые была предложена математическая зависимость спроса и цены товара. Эти величины связаны коэффициентом эластичности, который показывает, как изменяется спрос при росте или снижении цены на 1% . Функция спроса позволила вскрыть ряд закономерностей. Продавать дороже не всегда выгодно. Все зависит от коэффициента эластичности. Спрос на товары, для которых он больше единицы, при снижении цены растет так быстро, что общая прибыль от продажи увеличивается.

В 1874 г. швейцарский экономист Л. Вальрас ввел статистическую модель системы экономического равновесия, затем итальянский экономист В. Парето предложил модель распределения доходов населения.

Конец XIX — начало XX в. характеризуется значительной активизацией работ, развивающих математические методы решения экономических задач. Одной из первых задач, решенных на основе математического подхода, является «задача о землекопе», сформулированная Фредериком Тейлором в 1885 г. В задаче требовалось определить оптимальную разовую массу подбираемой земли, обеспечивающую максимум объема работ землекопа за день. Если землекоп за один раз забирает много земли, то усталость его быстро нарастает. Если брать за один раз мало земли, то падает общий объем работ.

В 1911 г. русский экономист И. Дмитриев описал балансовые соотношения «продукты-ресурсы» с помощью линейных алгебраических выражений. В 1920-е гг. С. Г. Струмилиным сформулирована идея о составлении плана как результата решения оптимизационной задачи. Одновременно В. А. Базаров, выделяя требования к плану, отмечал необходимость плавного изменения показателей, согласованности элементов системы, кратчайшего пути к цели. На методических разработках Базарова и Струмилина базировался первый годовой план страны 1925 г. В 1930-х гг. профессором Массачусетского технологического института В. Леонтьевым введены основы экономико-математических моделей «затраты—выпуск» для изучения межотраслевых связей.

Становление современного математического аппарата оптимальных экономических решений началось в 1940-е гг., благодаря первым работам Н. Винера, Р. Беллмана, С. Джонсона, Л. В. Канторовича.

В 1938 г. перед двадцатипятилетним профессором ЛГУ Л. В. Канторовичем была поставлена задача: как наилучшим образом распределить работу восьми станков фанерного треста при условии, что известна производительность каждого станка по каждому из пяти видов обрабатываемых материалов. В 1939 г. выдающийся советский математик и экономист опубликовал работу «Математические методы организации и планирования производства», в которой впервые сформулировал задачу линейного программирования и разработал алгоритм ее решения. В 1975 г. совместно с американским ученым Т. Купмансом Канторович получил Нобелевскую премию за вклад в теорию оптимизации распределения ресурсов.

В годы, когда применение математических методов в экономике СССР считалось крупной методологической ошибкой, их роль и значение недооценивались, они начали с конца 1940-х гг. интенсивно развиваться в США в рамках исследований операций, прежде всего, в военной области, например, оптимальное развертывание боевой авиации, максимизирующее шансы страны на победу в войне, и др.

Исторически общая задача линейного программирования ставится в 1947 г. Дж. Данцигом и М. Вудом в департаменте ВВС США. Данцигом предлагается универсальный алгоритм решения задач линейного программирования, названный им симплекс-методом. В 1941 г. Хичкок и независимо от него Купманс в 1947 г. формулируют транспортную задачу, Стиглер в 1945 г. — задачу о диете. В 1952 г.

было проведено первое успешное решение задачи линейного программирования на ЭВМ *«Seact>* в Национальном бюро стандартов США. С этого же периода наблюдается интенсификация исследований в трудах Гасса, Баранкина и Дорфмана (квадратичное программирование), Беллмана и Дрейфуса (нелинейное программирование).

В 1950-1960-х гг. появляются значительные работы в области экономико-математического моделирования и у нас, в том числе: «Экономический расчет наилучшего исследования ресурсов» Л. В. Канторовича (1959); «Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков» Л. В. Канторовича, М. К. Гавурина (1949); работы В. В. Новожилова по оптимальному планированию народного хозяйства. В 1960 г. академик В. С. Немчинов при Новосибирском отделении АН СССР создает лабораторию экономико-математического моделирования, в Киеве организуется институт кибернетики, возглавляемый академиком В. М. Глушковым.

В наше время исследование операций применяют к определенному классу задач, связанному со сложными организационными структурами современного общества. Наша естественная склонность ставить и решать подобные задачи проявляется в выражениях типа «с наименьшими затратами», «максимальная прибыль», «полная отдача» и т. п. Сюда относятся задачи наиболее эффективного управления предприятием, распределения ресурсов, управления технологическими процессами, создания оптимальных конструкций, управления грузопотоками, персоналом и многие другие.

Эти задачи возникают не только в промышленности, но и в повседневной жизни каждого человека. Например, задача программирования утреннего одевания*. Мы должны выбрать программу действий, которая позволит одеться так, чтобы выполнялись определенные ограничения или общепринятые правила. Время — основной ресурс, и выбранная программа должна быть наилучшей в том смысле, в каком каждый понимает расход утреннего времени. Если программа включает шесть предметов одежды: ботинки, носки, брюки, рубашку, галстук, пиджак, то программа — любой порядок, в котором можно надеть эти предметы. Всего в этом случае существует 6! = 720 различных программ. Многие из них недопустимы (носки поверх ботинок,

***Гаас С.* Путешествие в страну линейного программирования. М.: Мир, 1973.**

галстук под рубашку) и, если их отбросить, все равно остается несколько допустимых программ, которые нужно исследовать. Как же выбрать окончательное, оптимальное решение?

В этой или любой другой задаче, где необходимо анализировать все возможные варианты решений и выбрать единственный оптимальный, имеется некая основная цель, позволяющая сравнивать эффективность этих допустимых вариантов (программ действий). Если мы сможем как-нибудь сравнить меры этих программ, то тем самым можем выбрать и оптимальную. Если эта мера — затраты времени, то оптимальная программа утреннего одевания: носки, рубашка, брюки, галстук, ботинки, пиджак — минимизирует время на одевание без нарушения общепринятых ограничений. Но может быть и другая мера — минимизация утреннего шума — как можно меньше открывать и закрывать дверцы и шкафчики. Тогда будет и другое оптимальное решение.

Задачи математического программирования существуют только тогда, когда имеется много допустимых решений (два и более). Если допустимое решение единственное, не возникает никакой проблемы по его поиску.

Постановки задачи поиска оптимального решения известны еще из древности. Например, при изготовлении самого простого кувшина объективно требуют решения такие вопросы. Какой формы должен быть кувшин, чтобы при использовании имеющегося количества глины его объем был максимальным? Глина имеет некоторую стоимость, тогда — другая постановка вопроса. Какую выбрать форму, чтобы при заданной стоимости глины объем кувшина был максимальным? Или: какой формы должен быть кувшин заданного объема, чтобы стоимость его была минимальной?

Такая же постановка задачи сохраняется независимо от того, что будут изготавливать спустя тысячелетия. Иными словами, существует одна из двух задач принятия решений, например, в проектировании оптимальных конструкций — сделать изделие:

Ш с заданными свойствами минимальной стоимости;

Ж заданной стоимости с максимальными свойствами.

Неоптимальное решение этих задач приводит к излишним затратам сырья и времени. Допустим, что при интуитивном распределении людей на работы возможность их использования по сравнению с оптимальным вариантом, рассчитанным на компьютере, ухудшается всего на 3%.

Казалось бы, очень небольшая погрешность, на которую можно и не обратить внимания. Такая погрешность означала бы, например, в гончарном цехе прошлых веков с 30 работниками неполную загрузку в течение рабочего дня лишь одного из них. А в наши дни, если принять за число занятых в народном хозяйстве 100 млн человек, такая же погрешность может явиться причиной сокращения числа рабочих мест почти для 3 млн человек.

1 2
ЭТАПЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Чтобы менеджеру принять управленческое решение без компьютера, зачастую ничего не надо. Возникла в производстве ситуация, требующая своего разрешения, т. е. принятия менеджером соответствующего решения, он подумал и принял его. Правда, без гарантии оптимальности (т. е. правильности). Компьютер же никаких решений не принимает, а только подготавливает их для принятия менеджером. Что нужно сделать, чтобы найти такие варианты решений (рис. 1)?

Разработку любой модели оптимизации можно приблизительно разбить на 5 стадий, частично перекрывающих друг друга и не имеющих четких границ.

1. Постановка (формулировка) задачи.
2. Разработка математической модели изучаемой системы.
3. Отыскание решения с помощью этой модели.
4. Проверка данной модели и решения.
5. Уточнение решения на практике.

При постановке задачи проводится предпроектное обследование объекта моделирования, формулируется цель решения, ограничения, формы исходной и результатной информации, порядок ее преобразования и использования и т. д. Порядок принятия решений мы можем проследить по рисунку 1.

Рис. 1

При разработке математической модели формализуется цель решения, с которой увязываются переменные величины и наличные ограничения, оценивается число возможных (допустимых) вариантов решения.

Собственно решению на ЭВМ предшествует разработка алгоритма — формализованной последовательности действий по реализации модели (блок-схем решения задачи), по которой разрабатывается программа решения задачи на ЭВМ или подбирается готовый программный продукт.

Далее сравнивается полученное решение с реальной действительностью, чтобы выяснить, действительно ли решена реальная задача, все ли переменные в модели учтены, все ли ограничения формализованы, все ли изменения объекта внесены в модель и т. д.

Особенно важным на этих этапах представляется выбор цели решения. Например, установка зениток на торговых судах в Атлантике во время Второй мировой войны. Из 25 вражеских самолетов сбивали один, что не окупало установку орудий. Но после установки зениток потопляемость судов уменьшилась в 2,5 раза. Так ставить зенитки или нет? А если ставить, то какая при этом должна быть цель — сбивать самолеты или сохранять свои суда?

Хорошую модель, достаточно полно отражающую реальный моделируемый объект, составить непросто. По словам Беллмана, «если мы попытаемся включить в нашу математическую модель слишком много черт действительности, то захлебнемся в сложных уравнениях, содержащих неизвестные параметры и неизвестные функции. Определение этих функций приведет к еще более сложным уравнениям с еще большим числом неизвестных параметров и функций и т. д. Если же, наоборот, оробев от столь мрачных перспектив, построим слишком упрощенную модель, то обнаружим, что она не определяет последовательность действий так, чтобы удовлетворять нашим требованиям. Следовательно, Ученый, подобно Паломнику, должен идти прямой и узкой тропой между Западнями Переупрощения и Болотом Переусложнения».

Для обеспечения успеха моделирования надо выполнить три правила, которые, по мнению древних, являются признаками мудрости.

1. Отделить главные свойства моделируемого объекта от второстепенных.
2. Учесть в модели главные свойства объекта.
3. Пренебречь его второстепенными свойствами.

Модель — это условное представление действительности. Степень соответствия может быть различной, и проблема

заключается в том, чтобы, выбирая уровень упрощения реальной ситуации, оставить основные влияющие факторы и соотношения между ними. По этому поводу рассказывают, что академик С. А. Чаплыгин, будучи в свое время научным руководителем Центрального аэрогидродинамического института, не утвердил в смете расходы на продувку в аэродинамической трубе петуха. Причина его решения была лаконично проста: «Петух не летает».

Для экономических оптимизационных задач можно сформулировать ряд обязательных требований.

Ш Экономические задачи должны ставиться и решаться количественно, путем объективного расчета.

Ж Экономические задачи выбора рассматриваются как экстремальные.

Ш Функционирование экономики в целом, предприятия и его отдельного подразделения должно оцениваться по некому критерию.

Ш Лучший вариант приходится выбирать в условиях ограниченности ресурсов.

1.3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Во всех сферах человеческой деятельности большое место занимает принятие решений. Для постановки задачи принятия решения необходимо выполнение двух условий: 1) должно быть много решений; 2) вариант должен быть выбран по определенному принципу.

Очевидно, что если нет хотя бы двух возможных вариантов решения, то выбирать нечего и задача принятия решения отсутствует. Так, если предприятию задан план, устанавливающий номенклатуру и количество выпускаемой продукции, то задачи определения плана нет, так как план задан.

Известны два принципа выбора: волевой и критериальный.

Волевой выбор, наиболее часто используемый, применяют при отсутствии формализованных моделей как единственно возможный.

Критериальный выбор заключается в принятии некоторого критерия и сравнении возможных вариантов, соответствующих критерию. Вариант, для которого выбранный критерий принимает наилучшее решение, называют оптимальным (от лат. ***optimus),*** а задачу принятия наилучшего решения — задачей оптимизации.

Решение не может быть оптимальным вообще, во всех смыслах, а только в одном, единственном смысле, определяемом выбранным критерием.

Критерий оптимизации называют целевой функцией, функцией цели, функционалом и др.

Любую задачу, решение которой сводится к нахождению максимума или минимума целевой функции, называют задачей оптимизации. Задачи менеджмента чаще всего связаны с нахождением условного экстремума целевой функции при известных ограничениях, накладываемых на ее переменные.

В качестве целевой функции при решении различных оптимизационных задач принимают количество или стоимость выпускаемой продукции, затраты на производство, сумму прибыли и т. п. Ограничения обычно — ресурсы: людские, материальные, денежные.

Можно показать, что оптимизационные задачи менеджмента, различные по своему содержанию и реализуемые с использованием стандартных программных продуктов, соответствуют тому или иному классу экономико-математических моделей. Классификацию некоторых основных задач оптимизации, реализуемых менеджментом на производстве, можно выполнить по следующим признакам: функция управления; состав оптимизационных задач; класс экономико-математических моделей (табл. 1).

Другой важный признак систематизации — классификация моделей по ее элементам: исходным данным, искомым переменным, зависимостям, описывающим цель задачи (моделирования) и ограничения (рис. 2).

В зависимости от исходных данных выделяют 3 типа математического описания задач управления: детерминированные, вероятностные и задачи в условиях неопределенности.

Исходные данные, которые заданы определенными величинами, называют детерминированными.

Детерминированные задачи формулируются в условиях полной определенности о значениях используемых параметров, составе и виде влияющих ограничивающих условий. Такое описание имеет однозначность при математическом представлении и позволяет получить однозначное решение.

В детерминированной задаче всегда известно, что стратегия действий A приведет к результату a, а стратегия действий B — к результату $Ь$. Остается только определить, какой результат имеет большую полезность, чтобы выбрать лучшую из двух стратегий.

Исходные данные, которые зависят от ряда случайных факторов, называют случайными величинами. Например,

Таблица 1

Функция управления	Задачи оптимизации	Класс экономико-математических моделей
Техническая и организационная подготовка производства	**Моделирование состава изделий. Оптимизация состава марок, шихты, смесей. Оптимизация раскроя листового материала, проката. Оптимизация распределения ресурсов в сетевых моделях комплексов работ. Оптимизация планировок предприятий, производств и оборудования. Оптимизация маршрута изготовления изделий. Оптимизация технологий и технологических режимов**	**Дискретное (целочисленное) программирование. Линейное программирование. Сетевое планирование и управление. Имитационное моделирование. Динамическое программирование. Нелинейное программирование. Теория графов**
Технико-экономическое планирование	**Построение сводного плана и прогнозирование показателей развития предприятия. Оптимизация портфеля заказов и производственной программы. Оптимизация распределения производственной программы по плановым периодам**	**Балансовые (матричные) модели «затраты-выпуск». Корреляционно-регрессионный анализ. Экстраполяция тенденций. Линейное программирование**
Оперативное управление основным производством	**Оптимизация календарно-плановых нормативов. Календарные задачи. Оптимизация стандарт-планов. Оптимизация краткосрочных планов производств**	**Нелинейное программирование. Имитационное моделирование. Линейное программирование. Целочисленное программирование**

Рис. 2

имеющееся наличие ресурсов зависит от своевременности их поставки, производительность оборудования — от его исправности и т. д. Вероятностные, или, как их еще называют, стохастические задачи, включают в своей постановке задачи параметры, задаваемые в виде случайных величин, для которых известны вероятности достижения возможных значений. Такие задачи называют также задачами с риском, и их решение формулируется как конкретные результаты с вероятностной оценкой каждого из них.

Заметим, что детерминированные задачи можно рассматривать как предельный вариант задач с риском, в которых вероятность появления значений используемых параметров равна единице.

Оценки вероятностей бывают объективными и субъективными. Объективные вероятности получаются путем определения отношения числа интересующих нас событий к общему числу наблюдаемых событий.

Задачи в условиях неопределенности возникают в ситуациях, когда нет предварительной вероятностной оценки возможных будущих ситуаций или значений параметров, их характеризующих. В подобных задачах используют своеобразный подход для описания оценки предпочтительности управленческих стратегий. Оценка **МАКСИМИН** предполагает предпочтительность стратегии действий, у которой достигается максимально полезный результат при наиболее неблагоприятном развитии событий. Оценка **МИНИМАКС** ориентирует на выбор стратегии, требующей наименьших расходов при наиболее неблагоприятном развитии событий.

Переменные величины могут быть непрерывными и дискретными. **НЕПРЕРЫВНЫЕ** величины могут принимать в заданном интервале любые значения (например, процентное содержание элементов в марке материала). **ДИСКРЕТНЫЕ,** или **ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ,** принимают только целые значения (например, нельзя ввести в эксплуатацию 1,5 здания).

Зависимости между элементами могут быть линейными и нелинейными. **ЛИНЕЙНЫМИ** называют зависимости, в которые входят переменные в первой степени и нет их произведения. Если входят переменные не в первой степени или есть произведение переменных, то зависимости называют **НЕЛИНЕЙНЫМИ.**

Сочетание различных элементов модели приводит к различным классам задач оптимизации, которые требуют разных методов решения, следовательно, и разных программных средств (табл. 2).

Та блица 2

Исходные данные	Переменные	Зависимости	Задача
Детерминированные	Непрерывные	Линейные	Линейного программирования
	Целочисленные (дискретные)	Линейные	Целочисленного программирования
	Непрерывные, целочисленные	Нелинейные	Нелинейного программирования
Случайные	Непрерывные	Линейные	Стохастического программирования

1.4. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ МЕНЕДЖМЕНТА

Курс «Экономико-математические методы» — это математическая дисциплина, изучающая экстремальные математические задачи и методы их решения. За рубежом термин «экономико-математическое моделирование» не применяют, а заменяют терминами «экономическая кибернетика», «исследование операций» и др.

В общем виде математическая постановка экстремальной задачи состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ при условиях $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \le b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, где f, g_i — заданные функции; x_j $(j = 1, \ldots, n)$ — искомые переменные; b_i $(i = 1, \ldots, m)$ — некоторые действительные числа.

В зависимости от свойств функций f и g_i экономико-математические методы рассматривают как ряд самостоятельных разделов, изучающих методы решения определенных классов задач (см. рис. 3).

Прежде всего, экономико-математические методы подразделяют на методы решения задач линейного и нелинейного программирования. При этом, если все функции f и g_i являются линейными или не содержат произведения искомых переменных, соответствующая задача — это **задача линейного программирования.** Если хотя бы одна из этих функций — нелинейная или содержит произведения искомых переменных, то соответствующая задача — **задача нелинейного программирования.**

Среди задач нелинейного программирования наиболее изучены **задачи выпуклого программирования,** в результате решения которых определяют минимум выпуклой (или максимум вогнутой) функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве.

Из задач выпуклого программирования подробно разработаны **задачи квадратичного программирования,** в которых требуется найти максимум (или минимум) квадратичной функции при условии, что ее переменные удовлетворяют некоторой системе линейных неравенств и (или) линейных уравнений.

Отдельные разделы экономико-математических методов изучают методы решения задач целочисленного, параметрического, дробно-линейного программирования.

В задачах **целочисленного программирования** неизвестные могут принимать только целочисленные значения.

В задачах **параметрического программирования** целевая функция или функции, определяющие область возможных

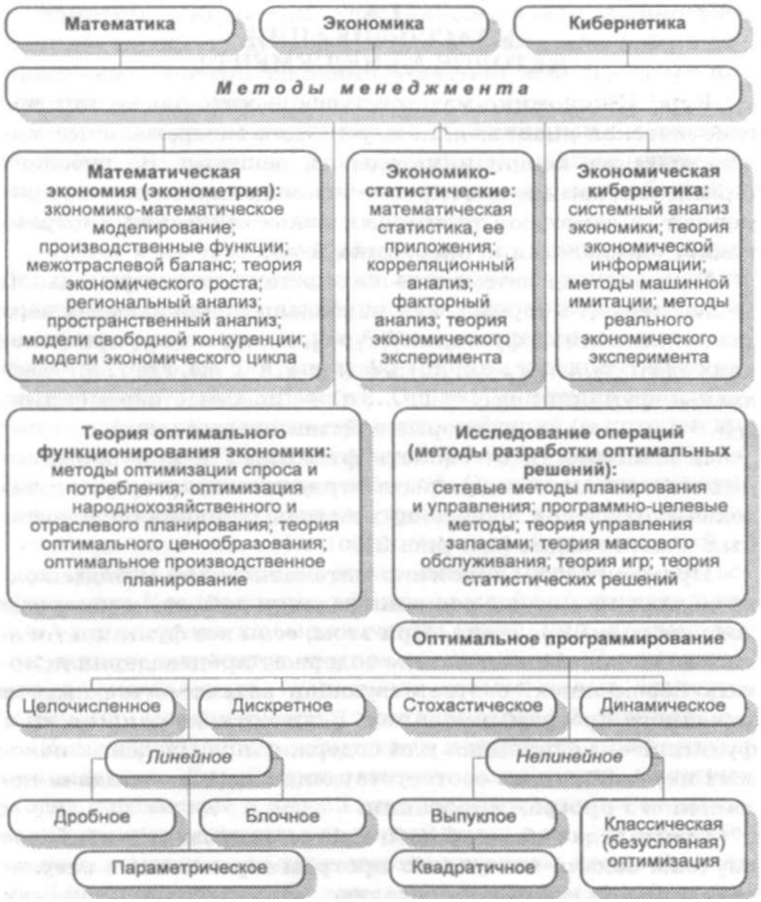


Рис. 3

изменений переменных (ограничения и граничные условия), либо то и другое зависят от некоторых параметров.

В задачах дробно-линейного программирования целевая функция — отношение двух линейных функций, а функции, определяющие область возможных изменений переменных, также линейны. В отдельные разделы выделены задачи динамического и стохастического программирования.

Задача динамического программирования — задача, процесс нахождения решения которой является многоэтапным.

Если в целевой функции или в функциях, определяющих область возможных изменений переменных, содержатся случайные величины, то такую задачу относят к стохастическому программированию.

1.5. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Что подразумевается под следующими понятиями: целевая функция, целочисленные переменные, допустимое решение? Назовите основные классификационные признаки экономико-математических моделей. На какие группы классифицируются экономико-математические модели в зависимости от свойств целевой функции и ограничений? Сформулируйте математическую постановку экстремальной задачи в общем виде.

Задание 2. Сформулируйте математическую постановку *задачи распределения.* Есть ограниченное количество средств, которое предполагается использовать для подготовки жилищно-коммунального хозяйства к зиме. Необходимо распределить эти средства на контроль и ремонт тепловых сетей, отопительного оборудования в домах и ТЭЦ, утепление домов и прочее, так, чтобы вероятность нарушения теплоснабжения в течение отопительного сезона была минимальной. Ответ — в виде вектора оптимального распределения средств.

Задание 3. Сформулируйте математическую постановку *задачи выбора.* Для строительства здания необходимо выбрать генерального подрядчика из нескольких строительных фирм так, чтобы обеспечить качество и сроки строительства не ниже заданных и выполнить строительство за минимальные сроки и с минимальными затратами. Ответ — наименование организации.

Задание 4. Сформулируйте математическую постановку *задачи размещения.* Необходимо построить торговый центр, и известны несколько вариантов его размещения. Необходимо выбрать такой вариант, чтобы стоимость доставки товаров от оптовых складов была минимальной, торговый оборот — максимальным, а стоимость строительства не превышала бы заданной величины. Ответ — в виде координат строительства.

Задание 5. Сформулируйте математическую постановку *задачи распределения затрат.* В регионе ремонтируются дороги, которыми будут пользоваться несколько фирм. Необходимо так распределить затраты между заинтересованными фирмами, чтобы ни одна из них не отказалась участвовать в финансировании ремонта. Ответ — вектор распределения затрат.

Задание 6. Сформулируйте математическую постановку *задачи дележа.* Работодатель нанимает группу служащих. На какую оплату своего труда они могут согласиться и каким образом должны распределить совокупный доход между собой? Ответ — вектор дележа.

ГЛАВА 2

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Любая модель принесет мало пользы при отсутствии необходимой информации.

Х. Таха

Ничего чрезмерного.

Правило Хилона

ЛОШАДЬ съедает воз сена ЗА .месяц, козд — ЗА ДВА .месяца, ОВЦА — ЗА три .месяца. ЗА кдкое время ЛОШАДЬ, КОЗА И ОВЦА съедят ТАКОЙ же коз сеид?

СтАрИННАЯ ЗАДАЧА

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Значительная часть задач принятия решения — это задачи распределения ресурсов между объектами.

Пусть имеется m видов ресурсов. Наличие каждого i-го вида ресурса составляет b_i $(i = 1, \ldots, m)$ в соответствующих единицах измерения. Эти ресурсы предназначены для производства n видов продукции. Для выпуска единицы j-го вида продукции необходимо a_{ij} единиц i-го вида ресурса. Требуется определить, какого вида и сколько продукции следует произвести, чтобы такой выпуск был наилучшим для принятого критерия оптимальности.

Обозначим через x_j количество выпускаемой продукции j-го вида. Тогда для i-го вида ресурса можно записать:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,$$

где левая часть неравенства выражает потребность в ресурсе i-го вида, правая — располагаемое количество этого ресурса.

Распространяя на m видов ресурсов, это ограничение можно записать:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i (i = 1, \ldots, m). \tag{1}$$

Если номенклатуру продукции ограничить предельными значениями объемов производства и продаж, то запишутся следующие граничные условия:

$$\underline{N}_j \le x_j \le \overline{N}_j \ (j = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

где $\underline{N}_j, \overline{N}_j$ — соответственно минимально и максимально-допустимые объемы производства и продаж продукции j-го вида.

В зависимость (1) можно ввести дополнительные переменные. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = 1, \ldots, m). \tag{3}$$

В реальных задачах суммарное количество основных $x_i (j = 1, \ldots, n)$ и дополнительных $y_i (i = 1, \ldots, m)$ переменных всегда больше, чем число зависимостей m, поэтому система (1) имеет бесчисленное множество решений. Из этого бесчисленного множества следует выбрать одно — оптимальное, соответствующее критерию — цели решения задачи.

Цель задачи распределения ресурсов устанавливается какой-либо одной из двух взаимоисключающих постановок:

1) при заданных ресурсах максимизировать получаемый результат;

2) при заданном результате минимизировать потребные ресурсы.

Первая постановка аналитически запишется:

$$\max L_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ (i = 1, \ldots, m), & (5) \\ \underline{N}_j \le x_j \le \overline{N}_j \ (j = 1, \ldots, n), & (6) \end{cases}$$

где *Xj* — количество выпускаемой продукции /-го вида — искомая переменная (/ = 1, *n);* *n* — количество наименований продукции; *Cj* — величина, показывающая, какой вклад в результат дает единица продукции /-го вида; b_i — заданное количество ресурса i-ro вида (i = 1, *m);* *m* — количество наименований ресурсов; ajj — норма расхода ресурса, т. е. какое количество ресурса **1**-го вида потребляется на производство единицы /-го вида продукции.

Решение задачи дает нахождение значений *Xj,* обеспечивающих при заданных ресурсах получение максимального результата. Вторая постановка задачи будет иметь вид:

$$\max L_2 = \sum_{i=1} y_i, \tag{7}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge C, & (8) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ (i = 1, \ldots, m), & (9) \\ \underline{N}_j \le x_j \le \overline{N}_j \ (j = 1, \ldots, n), & (10) \\ y_i \ge 0 \ (i = 1, \ldots, m), & (11) \end{cases}$$

где C — минимально допустимое значение потребного результата.

Первую и вторую задачи, в которые переменные x> входят в первой степени, т. е. в виде линейных зависимостей, называют задачами линейного программирования.

Каждая задача линейного программирования содержит целевую функцию (4) или (7), ограничения (5), (6) или (8)-(10), граничные условия (6) или (10), (11). Ограничения могут включать зависимости как для ресурсов *(Ъ{),* так и для экономических показателей (С).

Для решения задач линейного программирования используют графический и аналитический методы.

2.2 ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пример 1. Пусть требуется определить план выпуска четырех видов продукции А, В, С, *D,* для изготовления которых используются ресурсы трех видов: трудовые, материальные, финансовые. Количество каждого i-го вида ресурса для производства каждого /-го вида продукции называют нормой расхода и обозначают a_{ij}. Количество каждого вида ресурса, которое имеется в наличии, обозначают b_i (табл. 3).

Из таблицы 3 видно, что для выпуска единицы продукции, например, вида А, требуется шесть единиц трудовых ресурсов, вида C — 11 единиц материальных ресурсов и т. д. Предприятие располагает 12 ООО единиц финансовых ресурсов, 2000 единиц материальных, 800 единиц трудовых. Исходя из рыночного спроса и производственно-технологических возможностей (производственной мощности, уровня специализации, минимальных объемов выпуска), заданы верхние и нижние предельные границы выпуска каждого вида продукции (в натуральных или стоимостных единицах).

Таблица 3

Ресурсы (i)	Вид продукции (/)				Запас ресурса (Ь;)
	A	*B*	*C*	*D*	
	Удельный расход ресурсов (ау)				
Трудовые	6	4	2	1	800
Материальные	7	9	11	5	2000
Финансовые	3	4	5	6	12 000
Граница нижняя	1	_	3	_	_
Граница верхняя	12	2	–	_	
План	*XI*	*X2*	*хя*		_

Исходные данные таблицы по удельному расходу материальных и трудовых ресурсов проставляются в соответствии с действующей на предприятии нормативной и технологической документацией. Так, нормы расхода материальных ресурсов на каждое изготовляемое предприятием изделие содержатся в маршрутных ведомостях. Нормы трудоемкости изготовления изделия — в нормо-расценочных ведомостях или картах технологических процессов. Причем по строке «трудовые ресурсы» проставляется сводная трудоемкость изготовления изделия в нормо-часах как суммарная по всем деталеоперациям этого изделия. А по строке «материальные ресурсы» — норма расхода наиболее дефицитного (лимитируемого) вида материалов в принятых для этого материала единицах измерения (т, кг, м, л и др.). Впрочем, не исключена возможность представления всех исходных данных таблицы и в стоимостных единицах, как они проставлены по строке «финансовые ресурсы». Под удельным расходом финансовых ресурсов можно понимать, например, капиталоемкость производства каждого изделия, обусловленную необходимостью капитальных вложений в новое строительство или реконструкцию действующего производства. Если наличие каждого вида ресурсов (b_i, $i = 1, 2, 3$) выражено в таблице 3 в стоимостных единицах, то очевидно, что суммарный запас ресурсов предприятия составляет 14 800 денежных единиц.

На основании исходных данных требуется составить математическую модель для определения плана выпуска продукции.

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 — количество выпускаемой продукции видов A, B, C, D, которое необходимо определить.

Теперь составляем ограничения. Из таблицы 3 видно, что для выпуска единицы продукции A требуется 6 единиц трудовых ресурсов, B, C, D — соответственно 4, 2, 1 единиц трудовых ресурсов. Тогда необходимый трудовой ресурс для выпуска всех видов продукции будет равен $6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4$.

Очевидно, что потребный ресурс не может превышать располагаемый, т. е. для трудового ресурса будет справедливо неравенство

$$6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \le 800,$$

где 800 — располагаемый ресурс (табл. 3).

Если составить аналогичные зависимости для остальных видов ресурсов и добавить предельно допустимые значения выпуска каждого вида продукции, то получим систему:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \le 800, \\ 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 5x_4 \le 2000, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \le 12\,000, \\ 1 \le x_1 \le 12;\ x_2 \le 2;\ x_3 \ge 3;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

В этой системе неравенства, устанавливающие зависимости для ресурсов, — ограничения, а предельно допустимые значения переменных — граничные условия. В ограничениях левые части неравенства — потребные ресурсы, а правые — располагаемые.

Если в неравенства ввести дополнительные переменные $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$, $y_3 \ge 0$, то можно записать

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 800, \\ 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2000, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 12\,000. \end{cases}$$

В этой системе уравнений дополнительные переменные означают разность между располагаемым ресурсом и потребным и, следовательно, равны недоиспользуемым величинам ресурсов, т. е. это резервы каждого вида ресурсов.

Очевидно, что система, содержащая 3 уравнения и 7 переменных, имеет бесчисленное множество решений, т. е. различных вариантов плана. Все эти возможные варианты, включающие удовлетворяющие системе значения основных и дополнительных переменных, являются допустимыми планами.

Если получить оптимальное решение очень важно, то иметь допустимое решение — необходимо.

Итак, любая, разумеется, правильно составленная (как и в данном примере) задача планирования имеет бесчисленное множество допустимых решений. Какое из них выбрать?

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо сформулировать задачу оптимизации в какой-либо из двух взаимоисключающих постановок.

Обозначим F — ресурсы, R — результат их применения. Тогда при заданных зависимостях результата и потребных ресурсов от количества выпускаемой продукции $R = R(x_j)$, $F = F(x_j)$ обе постановки распределения ресурсов в сокращенной записи можно представить:

для первой постановки —

$$\begin{cases} L_1 = R(x_j) \to \max, \\ F(x_j) \le F^*, \end{cases}$$

для второй постановки —

$$\begin{cases} L_2 = F(x_j) \to \min, \\ F(x_j) \le F^*, \\ R(x_j) \ge R^*, \end{cases}$$

где F^*, R^* — заданные (плановые или прогнозируемые) величины ресурсов и результата.

Для составления модели в какой-либо постановке потребуются дополнительные данные относительно единичной эффективности производства и реализации каждого вида продукции предприятия, например, прибыль от реализации единицы продукции каждого вида и плановая прибыль в целом от производства всей продукции.

Пусть для продукции видов A, B, C, D она составит соответственно 5, 6, 7 и 8 денежных единиц, а суммарная прибыль от всего производства должна быть не менее 3000 денежных единиц.

Тогда для первой постановки к уже составленной системе ограничений и граничных условий добавляем целевую функцию и получаем математическую модель:

$$\max L_1 = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \le 800, \\ 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 5x_4 \le 2000, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \le 12\,000, \\ 1 \le x_1 \le 12;\ x_2 \le 2;\ x_3 \ge 3;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Для второй постановки:

$$\max L_2 = y_1 + y_2 + y_3,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \ge 3000, \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + y_1 \le 800, \\ 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 5x_4 + y_2 = 2000, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + y_3 = 12\,000, \\ 1 \le x_1 \le 12; x_2 \le 2; x_3 \ge 3; x_4, y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Так как y_1, y_2, y_3 — резервы по ресурсам, то максимизация их суммы обеспечивает минимизацию используемых ресурсов.

Из решения задачи в двух различных постановках (см. табл. 4) видно, что результаты решения тоже различные.

Таблица 4

Постановка	Целевая функция	Граничные условия	R''	$F>$		$X»$	_o	A	*2	У?	$у°2$	
1	$R°$-> **max**	F< **14 800**	**3162**	**4774**		**1**	**0**	**3**	**392**	**396**	**0**	**9630**
2	**-» min**	R > **3000**	**4531**	**137**		**1**	**0**	**3**	**371,75**	**416,25**	**101,25**	**9751,5**

В первой постановке $maxLx$ = 3162 денежных единиц. Общее количество использованных ресурсов F = 4774 единиц. При этом ресурсы оказались подразделенными на две группы: лимитирующие, для которых y_i = 0, и нелимитирующие, для которых y_i > 0. К первой группе относятся материальные ресурсы, ко второй — трудовые и финансовые. Значит, увеличение запасов материалов позволит найти такой новый оптимальный план производства и реализации продукции, выполнение которого приведет к увеличению прибыли, а прирост трудовых и финансовых, по которым и так имеются резервы в объемах г/$_x$ = 396 и y_3 = 9630 единиц, — нет.

Отсюда следует, что для повышения эффективности производства (роста прибыли предприятия) потребуется увеличение запасов не всех ресурсов, а только лимитирующих (на практике же, как правило, стремятся к необоснованному наращиванию запасов всех ресурсов по известному принципу «запас карман не тянет»).

Во второй постановке суммарный расход ресурсов оказывается несколько меньше и составляет F = 4531 единиц, и для всех их видов есть резервы.

Таким образом, по результатам после оптимизационного анализа сформулированной нами в обеих постановках задачи распределения ресурсов можно сделать следующие весьма важные для эффективного менеджмента предприятия выводы:

1) реализация найденных оптимальных планов обеспечивает достижение цели предприятия — максимальной эффективности деятельности (или по максимально возможной величине прибыли от реализации, или по минимуму издержек — расхода наиболее важнейших для предприятия ресурсов), особенно если его изделия конкурентоспособны;

2) реализация найденных оптимальных планов будет возможна даже в условиях высвобождения денежных средств, связанных в излишних, сверх требуемых на выполнение этих планов, запасах ресурсов. Понятно, что реализация излишних запасов ресурсов в пределах выявленных резервов будет способствовать еще большему росту эффективности деятельности предприятия, а значит, и стабилизации его рыночных позиций.

Конечно, все эти потенциальные возможности предприятия достигаются, если: а) подобную задачу в любой из этих постановок или в обеих постановках менеджеру удалось сформулировать, для чего необходимо будет предварительно подготовить исходные данные; б) подобную задачу удалось решить, что возможно только при сбалансированности и совместности ее условий.

2.3. ПРОВЕРКА СБАЛАНСИРОВАННОСТИ ПЛАНОВ

Представим себе такую ситуацию. Пусть предприятие, как это положено при грамотном менеджменте и маркетинге, организованном надлежащим образом, исследовало рынок. Исходя из своих потенциальных возможностей и конъюнктуры рынка, сформулировало собственные цели деятельности на отдаленную и ближайшую перспективу. В соответствии с целями разработало маркетинговую стратегию и программу, сформировало хозяйственный портфель. Несомненно, что содержимое этого портфеля (заказы и договоры с преимущественно реальными, т. е. платежеспособными заказчиками) менеджер обосновал оптимальными решениями, полученными из реализации задачи, подобной уже рассмотренной нами (пример 1).

После утверждения маркетинговой программы функциональные службы предприятия приступают к ее реализации. Так, конструкторы спроектировали новые конкурентоспособные изделия или модифицировали выпускаемые конструкции. Технологи разработали новые или усовершенствовали применяемые технологические процессы, снабженцы заключили договоры на поставку ресурсов от наиболее надежных и выгодных поставщиков. Сбытовики устанавливают эффективные каналы товародвижения. Экономисты планируют цены, издержки, прибыль, а финансисты, в свою очередь, изыскивают необходимые кредиты и контролируют достижение предприятием своих установленных целей по уровню рентабельности.

Казалось бы, менеджментом все было предусмотрено, чтобы предприятие стало лидером рынка и обрело устойчивые рыночные позиции в своей стратегической зоне хозяйствования. Но этого не произошло. «Вялые» продажи новой и традиционной продукции предприятия явно не покрывали понесенные издержки. К тому же наступили сроки расчетов с поставщиками ресурсов, погашения кредитов и обязательных платежей.

Оказалось, что маркетологи «проглядели» выход на рынок всего лишь одного конкурента на товары, аналоги которого более совершенны по своим потребительским свойствам; переключился рыночный спрос.

Понятно, что в такой ситуации менеджменту следует ориентироваться на выживаемость предприятия (не говоря уже о какой-либо «приличной» доле рынка). И первый шаг в направлении выживаемости, а затем и стабилизации финансового состояния, должен состоять в незамедлительной разработке комплекса срочных антикризисных мер.

Конечно, эти меры должны предусматривать уточнение ближайших и перспективных целей деятельности, корректировку маркетинговых программ, планов производства и сбыта продукции. Но их реализация, восполнение утраченных конкурентных преимуществ, как правило, сопряжены с длительными сроками. Ведь оборудование, предназначенное для изготовления ранее спроектированных конструкций по ранее разработанным технологиям, уже закуплено и установлено, запасы ресурсов созданы.

Тогда выход из этой кризисной ситуации может состоять в разработке конструкций, которые будут технологически подобны ранее спроектированным. Но, разумеется, они должны быть конкурентоспособными относительно рыночных аналогов, т. е. дешевле на единицу своего полезного эффекта. Иначе останется опасность проявления конкурентных угроз и тогда уже неизбежного банкротства.

Корректировка маркетинговой программы и плана производства будет связана с включением в них номенклатуры новых, более совершенных изделий взамен изделий, не пользующихся спросом. При обосновании такой корректировки результатами решения задачи оптимизации распределения ресурсов план производства может оказаться несбалансированным по номенклатуре, нормам расхода и обеспеченности ресурсами. Понятно, что работать по несбалансированному плану невозможно, и поэтому требование выпуска продукции без обеспечения его ресурсами невыполнимо.

Сбалансированность планов по номенклатуре и запасам ресурсов можно проверить моделированием на компьютере, и ответ будет получен не в конце планового периода, когда изменить уже ничего нельзя, а сразу же при моделировании и анализе складывающейся рыночной ситуации. Здесь особенно важным представляется использование достоверной информационной базы, отображающей, в частности, технически обоснованные удельные нормы расхода ресурсов, а также конъюнктуру рынка. Именно математические модели позволяют своевременно выявлять несбалансированность планов, актуализировать цели деятельности, обосновывать их реальными и потенциальными производственно-технологическими и сбытовыми возможностями предприятий.

Пример 2. Покажем, как можно обеспечить условие сбалансированности на примере предыдущей задачи (первая постановка). Только теперь в связи с изменением рыночной ситуации продукцию *A* необходимо выпускать в количестве не менее 15, *B* — не менее 5, C — не менее 2 единиц. Изделия *D* с производства снимаются как не пользующиеся спросом. Взамен планируется запустить технологически подобные, но более совершенные изделия *S*, на которые потенциальные потребители могут предъявить, по пессимистическим оценкам, платежеспособный спрос в объеме 500 единиц. Это позволяет предприятию планировать получение прибыли в размере не менее 5000 денежных единиц.

Перепишем новое условие задачи (табл. 5).

Решение. Исходя из данных этой таблицы непонятно, повлечет ли такое их изменение несбалансированность

Таблица 5

Ресурсы (i)	Вид продукции (j)				Запас ресурса (bi)
	A	*B*	*C*	*D*	
	Удельный расход ресурсов (оу)				
Прибыль на единицу продукции	5	6	7	13	–
Трудовые	6	4	2	1	800
Материальные	7	9	11	5	2000
Финансовые	3	4	5	6	12 000
Граница нижняя	15	5	2	500	–
Граница верхняя	–	–	–	–	
План	x_1	x_2	x_3	x_4	–

плана. Для выявления возможной несбалансированности составим математическую модель новой задачи:

$$\max L_1 = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \le 800, \\ 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 5x_4 \le 2000, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \le 12\,000, \\ x_1 \ge 15;\ x_2 \ge 5;\ x_3 \ge 2;\ x_4 \ge 500. \end{cases}$$

В результате решения этой задачи окажется, что *задача не имеет решения, так как она не сбалансирована по ресурсам*. Например по трудовым ресурсам (первое ограничение). Для проверки сбалансированности подставим вместо x_j ($j = 1, \ldots, 4$) значения, равные нижним границам этих переменных, т. е. проверим, хватит ли трудовых ресурсов для выполнения плана на нижнем пределе допустимых значений выпуска изделий. При этом потребный ресурс составит: $6 \cdot 15 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 500 = 1614$, что больше располагаемого, равного 800. Аналогично можно проверить по другим видам ресурсов и убедиться в несоответствии их запасов планируемым объемам производства и продаж.

Что же делать, если план не сбалансирован (хотя бы даже по одному из видов ресурсов), хотя данная постановка правильно описывает реальную экономическую ситуацию?

При постановке любой задачи распределения ресурсов до получения ее решения неизвестно, сбалансирована она или нет. Поэтому в том случае, когда есть подозрение, что задача может оказаться несбалансированной, менеджеру имеет смысл сразу же составить **модель с учетом возможной нехватки ресурсов**. В такой модели отличия будут в ограничениях по ресурсам, которые можно представить так:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 - d_1 \le 800, \\ 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 5x_4 - d_2 \le 2000, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 - d_3 \le 12\,000, \\ x_1 \ge 15;\ x_2 \ge 5;\ x_3 \ge 2;\ x_4 \ge 500, \\ d_1, d_2, d_3 \ge 0, \end{cases}$$

где d_1, d_2, d_3 — количество ресурса каждого вида, необходимое дополнительно для выполнения скорректированного плана производства.

Если в результате решения окажется, что какое-то $d_i = 0$, значит, дополнительных ресурсов i-го вида не потребуется.

По-видимому, естественно ожидать от менеджера, что он будет стремиться минимизировать дополнительные ресурсы. При этом, понятно, сокращаются издержки производства из-за высвобождения связанных в запасах средств. Тогда целевая функция будет

$$\min L = d_1 + d_2 + d_3.$$

Но менеджер не меньше должен быть заинтересован в получаемой прибыли, от величины которой зависит возможность выхода из кризиса и развития предприятия. Поэтому включим ее желаемое значение в систему и окончательно сформулируем новую задачу:

$$\min L_2 = d_1 + d_2 + d_3,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \ge 5000, \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 - d_1 \le 800, \\ 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 5x_4 - d_2 \le 2000, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 - d_3 \le 12\,000, \\ x_1 \ge 15;\ x_2 \ge 5;\ x_3 \ge 2;\ x_4 \ge 500, \\ d_1, d_2, d_3 \ge 0. \end{cases}$$

Результаты решения этой задачи (табл. 6) показывают, какого вида и сколько ресурса потребуется для обеспечения выполнения скорректированного плана.

В нашем примере финансовые ресурсы оказываются достаточными и подлежат полному использованию. Трудовые и материальные ресурсы лимитирующие, и по ним потребуется восполнение в объемах соответственно на 814 и 1172 единицы. Вся продукция выпускается на нижней границе. При этом будет получена прибыль в размере 6619 денежных единиц, что обеспечит не только выход из кризисной ситуации, но и создаст предпосылки достижения устойчивых конкурентных преимуществ. Вот что дает решение несбалансированной задачи на компьютере, который, конечно, не заменил дополнительные ресурсы, но показал, что нужно для выполнения несбалансированного плана. Переоценить пользу такого анализа вряд ли возможно.

Таблица 6

Показатели			«*	Минимальный суммарный дополнительный ресурс		Ч	г° *3	*А*	Максимальная прибыль
Значение	814	1172	0	1986	15	5	2	500	6619

Следовательно, один из методов преодоления несбалансированного плана — привлечение дополнительных ресурсов. А если ресурсы добавить нельзя, можно ли получить сбалансированный план?

Да, можно! Но при соблюдении условий: 1) уменьшения нижнего предела выпуска, а значит, за счет сужения рынка сбыта продукции, снижения объемов продаж и прибыли; 2) уменьшения нормы расхода каждого лимитирующего ресурса, а значит, за счет интенсификации технологий и, возможно, снижения уровня конкурентоспособности (качества) продукции.

2.4. ТРЕБОВАНИЯ СОВМЕСТНОСТИ УСЛОВИЙ

В общую постановку задачи оптимизации входят неравенства вида
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$
где n — число неизвестных; m — число неравенств. Если в каждое неравенство добавить переменную $y_i \ge 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, то от системы неравенств можно перейти к системе уравнений
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

В этой системе общее число неизвестных $N = n + m$, где n — число основных неизвестных x_j; m — число дополнительных неизвестных y_i, которое равно числу уравнений.

Возможны три варианта соотношения величин N и m: $N < m$, $N = m$, $N > m$.

Пусть число неизвестных **меньше**, чем число уравнений. Например,
$$\begin{cases} 3x = 11, \\ x = 6, \end{cases}$$
т. е. $N = 1$, $m = 2$. Очевидно, что эта система решения не имеет, т. е. нет таких значений x_1, которые бы удовлетворяли обоим уравнениям. В этом случае говорят, что система условий несовместна.

Если число неизвестных N меньше числа уравнений m, то система решения не имеет и является несовместной.

Пусть число неизвестных **равно** числу уравнений. Например,
$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Решением этой системы будут значения $x = y = 1$.

Линейная система, в которой число неизвестных N равно числу уравнений m, имеет одно решение.

Наличие или отсутствие решений при различных соотношениях числа переменных и числа уравнений справедливо только для линейно независимых уравнений, которые не могут быть получены умножением, делением, сложением, вычитанием исходных уравнений. Например, пусть есть уравнение 3* = 6, из которого можно получить несколько: $x = 2$; 9* = 18; 6* = 12 и т. д. Все эти уравнения линейно зависимы и новых сведений о зависимостях для переменной не содержат. Поэтому в этом примере m — 1 (а не 4).

Аналогично в следующей системе есть только два линейно независимых уравнения: так, уравнение (в) есть результат суммирования (а) и (б), а уравнение (г) есть результат деления (в) на 5:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, & (а) \\ 3x + 2y = 8, & (б) \\ Ъx + Ъy = 15, & (в) \\ x + y = 3. & (г) \end{cases}$$

Пусть число неизвестных больше числа уравнений. Например, $2x\backslash + x_2 = 2$. Очевидно, что все значения x_x и x_2, лежащие на прямой этого уравнения, являются его решением. Значит, это уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Если в системе число неизвестных N больше числа уравнений m, то такая система имеет бесчисленное множество решений.

В случае, когда система имеет более одного возможного решения, может быть поставлена задача оптимизации. При этом суть такой задачи, как мы уже знаем, заключается в том, чтобы из всех допустимых решений, удовлетворяющих ограничениям и граничным условиям, выбрать такое, которое придает целевой функции оптимальное, т. е. максимальное или минимальное значение.

Если все ограничения и целевая функция линейны, задача оптимизации, как нам известно, является задачей линейного программирования.

2.5. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Вспомним построение линейных зависимостей. Начнем с уравнений. Линейное уравнение с двумя переменными может быть записано $a_x x_x + a_2 x_2$ = Ь. Чтобы построить это уравнение, найдем точки пересечения с осями координат.

При $x_1 = 0$ получим $a_2x_2 = b$, откуда $x_2 = b / a_2$. При $x_2 = 0$ будем иметь $a_1x_1 = b$ и $x_1 = b / a_1$ (рис. 4).

Разделим теперь левую и правую части уравнения на b и перепишем уравнение, которое называют **уравнением прямой в отрезках:**

$$\frac{a_1x_1}{b} + \frac{a_2x_2}{b} = 1$$

$$\text{или } \frac{x_1}{b/a_1} + \frac{x_2}{b/a_2} = 1,$$

$$\text{или } \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_2} = 1.$$

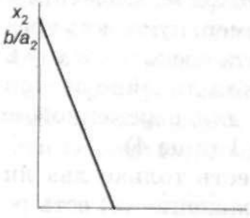


Рис. 4

Такое представление уравнения удобно для построения прямой, так как величины α_1 и α_2 — это отрезки, отсекаемые прямой на тех осях, которые указаны в числителе. Например, $2x_1 + x_2 = 2$ или в форме уравнения в отрезках:

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} = 1,$$

т. е. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$.

Теперь о неравенствах. Если линейное уравнение с двумя переменными $2x_1 + x_2 = 2$ может быть представлено прямой на плоскости, то неравенство $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$ изображается как полуплоскость.

Так, неравенство $2x_1 + x_2 \le 2$ представляет собой заштрихованную полуплоскость, координаты всех точек которой, т. е. x_1 и x_2, удовлетворяют заданному равенству. Значит, эти значения составляют **область допустимых решений** (рис. 5).

Рассмотрим построение системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 14, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 18, \\ 6x_1 + 2x_2 \le 27, \\ x_1, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

или в форме, аналогичной уравнениям в отрезках:

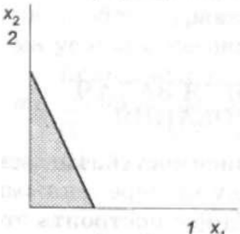


Рис. 5

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{14} + \dfrac{x_2}{7/2} \le 1, \\ \dfrac{x_1}{6} + \dfrac{x_2}{9/2} \le 1, \\ \dfrac{x_1}{9/2} + \dfrac{x_2}{27/2} \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

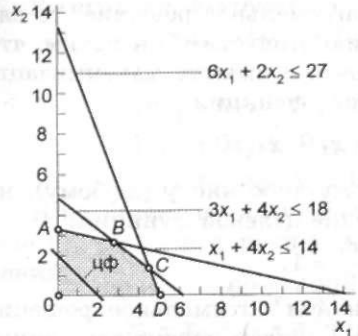


Рис. 6

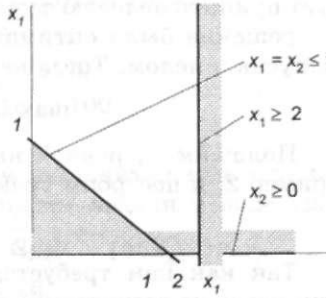


Рис. 7

Построим каждое неравенство в системе координат x_1, x_2 в виде соответствующих полуплоскостей (см. рис. 3). Решение этой системы неравенств — *координаты всех точек, принадлежащих области допустимых решений*, т. е. ABCDO.

Так как в области допустимых решений бесчисленное множество точек, значит, рассматриваемая задача имеет бесчисленное множество допустимых решений (рис. 6).

Не любая система линейных неравенств имеет область допустимых решений, т. е. допустимые решения.

Например, построим систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 2, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Из рисунка 7 видно, что нет таких точек, которые бы удовлетворяли всем неравенствам системы.

Итак, мы рассмотрели линейные уравнения и неравенства с двумя переменными. Если перейти к линейным зависимостям с тремя переменными, то тогда они будут описывать *плоскость* в трехмерном пространстве; линейное неравенство характеризует *полупространство*, а система линейных неравенств — *многогранник* как область допустимых решений в трехмерном пространстве.

С увеличением числа переменных **выше трех геометрическая интерпретация невозможна,** так как система неравенств — область допустимых решений в k-мерном пространстве.

При этом мерность пространства определяют так: если ограничения заданы неравенствами, то $k = n$, где n — число переменных; если ограничения в виде уравнений, то $k = n - m$, где m — число уравнений.

Если необходимо найти оптимальное решение, то следует принять целевую функцию. Допустим, мы хотим, чтобы решение было оптимальным в смысле максимизации выпуска в целом. Тогда целевая функция:

$$\max L = x_1 + x_2.$$

Положим L, равной какому-либо числу (любому), например 2, и построим уравнение целевой функции:

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} = 1.$$

Так как нам требуется найти оптимальное решение, при котором достигается $\max L$, будем перемещать линию целевой функции в направлении увеличения L. Очевидно, что оптимальным решением будут координаты точки C, равные x_1^*, x_2^*. При этом $L = L^*$.

Отсюда можно сделать исключительно важный вывод: оптимальное решение — координаты вершины области допустимых решений.

Из этого вывода следует **метод решения задач линейного программирования**, который заключается в поиске вершин области допустимых решений как точки пересечения ограничений; последовательном определении значения целевой функции в вершинах.

Вершина, в которой целевая функция приобретает оптимальное (максимальное или минимальное) значение, является оптимальной вершиной.

Координаты оптимальной вершины есть оптимальные значения искомых переменных.

2.6. ИДЕЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Пример 3. Рассмотрим задачу оптимизации плана производства с целью получения максимальной прибыли (табл. 7).

Таблица 7

Ресурсы	Норма расхода ресурсов				Запас ресурса
	Ш	Па	Пз	ш	
Трудовые	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Оборудование	4	6	10	13	100
Прибыль	60	70	120	130	–
План	Xl	X2	Xз	X4	

Решение. Математическая модель задачи:

$$\max L_1 = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110, \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

В ограничения задачи введем дополнительные переменные y_1, y_2, y_3 и перепишем условие задачи в виде уравнений:

$$\max L_1 = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 = 16, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + y_2 = 110, \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 + y_3 = 100, \\ x_j \ge 0\ (j = 1, \dots, 4);\ y_i \ge 0\ (i = 1, \dots, 3). \end{cases}$$

Эту постановку можно переписать в виде рисунка 8.

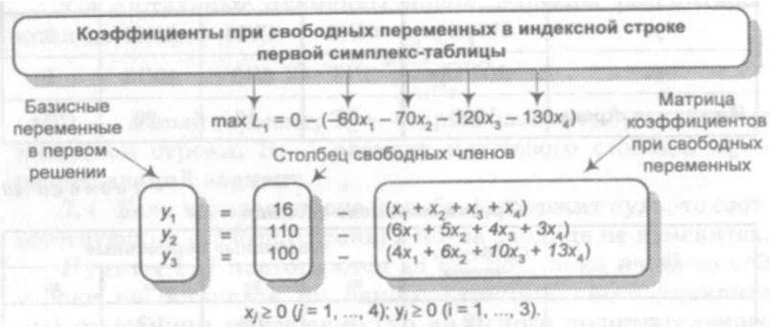


Рис. 8

Последнюю постановку можно представить в виде таблицы — первой таблицы симплекс-метода.

Правила составления симплекс-таблиц.

Для первой таблицы:

1) в первый столбец записывают y_i — базисные переменные, которые находятся в уравнениях слева;

2) свободные переменные *,, заключенные в скобках, выносят в верхнюю строку таблицы;

3) в остальные столбцы записывают коэффициенты перед свободными переменными;

4) индексная строка есть результат вычитания из нуля коэффициентов перед свободными переменными.

Для последующих таблиц (табл. 8, 9, 10, 11):

1) выбирается наименьший отрицательный элемент в индексной строке при отыскании максимума, но наибольший

Та блица 8

Первая симплекс^таблица

Базис	Свободные члены	Свободные переменные			
		Xl		Хз	
у₁	16	1	1	1	1
У*	110	6	5	4	3
У*	100	4	6	10	13
Индексная строка	0	-60	-70	-120	-130

Таt 'лица 9

Вторая симплекс-таблица

Базис	Свободные члены	Свободные переменные			
		Xl	Х₂	Ха	Х4
	108/13	9/13	7/13	3/13	0
У*	1130/13	66/13	47/13	22/13	0
Ха	100/13	4/13	6/13	10/13	1
Индексная строка	1000	-20	-10	-20	0

Таблица 10

Третья симплекс-таблица

Базис	Свободные члены	Свободные переменные			
		Xl	х₂	Хз	Ха
Xl	12	1	7/9	1/3	0
у2	26	0	-1/3	0	0
X₄	4	0	2/9	26/39	1
Индексная строка	1240	0	50/9	-40/3	0

Та б лица 11

Последняя симплекс-таблица

Базис	Свободные члены	Свободные переменные			
		XI	х2	XI	Х4
XI	10	1	1/18	0	
У2	26	0	-1/3	0	
Х4	6	0	13/6	1	
Индексная строка	1320	0	70/9	0	

положительный — при отыскании **минимума**, исключая вектор свободных членов;

2) этот элемент определяет ключевой вектор-столбец, и он вводится в базис;

3) компоненты вектора свободных членов делятся на **положительные** элементы ключевого столбца;

4) из полученных отношений выбирается **наименьшее**;

5) **вектор-строка**, содержащая наименьшее положительное частное, — ключевая и выводится из базиса;

6) на пересечении ключевых строк и столбца находится **разрешающий элемент**;

7) преобразование матрицы:

7.1. Каждый элемент ключевой строки делится на разрешающий элемент. Полученные частные являются элементами ключевой строки следующей таблицы.

7.2. Ключевой столбец в новой таблице — нули, за исключением разрешающего элемента.

7.3. Остальные элементы новой таблицы рассчитываются по схеме:

$$Э_н = Э_с - \frac{Э_1 \times Э_2}{Э_р},$$

где $Э_н$ — новый элемент; $Э_с$ — старый элемент; $Э_1$ — элемент ключевой строки; $Э_2$ — элемент ключевого столбца; $Э_р$ — разрешающий элемент.

7.4. Если нулевая строка (столбец) содержит нуль, то соответствующий столбец (строка) в новой таблице не изменится.

Пункты 1–7 повторяются до тех пор, пока в индексной строке не останется ни одного отрицательного элемента при отыскании максимума (но ни одного положительного при отыскании минимума).

Из последней таблицы видно,что:

1) в столбце свободных членов все элементы положительны, это значит, что полученное решение является допустимым;

2) в индексной строке все элементы также положительны. Это значит, что полученное решение — **оптимально**, т. е. максимизирует целевую функцию. При этом оптимальным планом будут величины: $x_1^0 = 10$, $x_3^0 = 6$ (значит, они базисные); $x_2^0 = x_4^0 = 0$ (так как они свободные), целевая функция $L = 1320$.

Из этой таблицы также следует, что базисная переменная $y_2 = 26$, а свободные переменные $y_1 = y_3 = 0$, т. е. в оптимальном плане резервы трудовых ресурсов и оборудования равны нулю, так как они используются полностью. А резерв ресурсов сырья $y_2 = 26$, что свидетельствует о его излишках.

2.7. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С каждой задачей линейного программирования можно некоторым образом сопоставить другую задачу линейного программирования, называемую **двойственной** по отношению к исходной (прямой).

Прямая задача:

$$\max(\min) L_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\max(\min) L_2 = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i,$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \ge C_j \quad (j = 1, \ldots, m), \\ z_i \ge 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \end{cases}$$

Двойственную задачу по отношению к прямой задаче составляют согласно правилам.

Целевая функция прямой задачи задается на максимум, тогда целевая функция двойственной задачи — на минимум, и наоборот.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов в системе ограничений прямой задачи, и аналогичная матрица

$$A^m = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

в двойственной задаче получаются друг из друга транспонированием. Число переменных в двойственной задаче *(m)* равно числу соотношений (ограничений) в прямой задаче, а число ограничений двойственной задачи (л) — числу переменных в прямой задаче.

Коэффициенты при неизвестных в целевой функции двойственной задачи — свободные члены (fy), а правые части в ограничениях двойственной задачи (c_j) — коэффициенты при неизвестных в целевой функции прямой задачи.

Если переменная *xj* прямой задачи может принимать только положительные значения *(Xj* > 0), то у'-е условие двойственной задачи — условие неравенства вида «>». Если *i-е* соотношение в прямой задаче — неравенство, то *i-я* переменная двойственной задачи $z_i > 0$.

Если прямая задача имеет решение, то и двойственная задача тоже имеет решение, причем max(min) L_1 = = min(max) L_2, поэтому для отыскания оптимума достаточно решить одну какую-либо из задач двойственной пары. Обычно решают ту, которая проще.

Оптимальный план двойственной задачи позволяет оценить степень дефицитности ресурсов, потребляемых при выполнении оптимального плана исходной задачи.

Пример 4. Для производства изделий А, В, С используются три различных вида ресурсов. Каждый из видов ресурсов может быть использован в количестве, соответственно не большем 180, 210, 244 ед. Известны затраты каждого из видов ресурсов на ед. продукции и цена ед. продукции каждого вида (табл. 12).

Определить план производства, при котором обеспечивается максимальный доход, и оценить дефицитность каждого вида ресурсов, используемых для производства продукции.

Оценки, приписываемые каждому виду ресурсов, должны быть такими, чтобы оценка всех используемых ресурсов была минимальной, а суммарная оценка ресурсов на производство единицы продукции каждого вида — не меньше цены единицы продукции данного вида.

Решение. Обозначим через x_1 искомый план производства изделий А, через x_2 — *В*, x_3 — С, а через z_1 — двойственную оценку дефицитности первого вида ресурса, через z_2 — второго, z_3 — третьего.

Таблица 12

Вид ресурса	Норма расхода ресурса на единицу продукции		
	A	*B*	*C*
1	4	2	1
2	3	1	3
3	1	2	5
Цена продукции	10	14	12

Тогда прямая и двойственная задачи формулируются:

- прямая задача

$$\max L_1 = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0; \end{cases}$$

- двойственная задача

$$\min L_2 = 180z_1 + 210z_2 + 244z_3,$$

$$\begin{cases} 4z_1 + 3z_2 + z_3 \ge 10, \\ 2z_1 + z_2 + 2z_3 \ge 14, \\ z_1 + 3z_2 + 5z_3 \ge 12, \\ z_1, z_2, z_3 \ge 0. \end{cases}$$

Решение прямой задачи дает оптимальный план производства изделий *A*, *B*, *C*, а решение двойственной задачи — оптимальную систему оценок ресурсов, используемых для производства этих изделий:

$$x_1^0 = 0;\ x_2^0 = 82;\ x_3^0 = 16;\ \max L_1 = 1340;$$

$$z_1^0 = 5{,}75;\ z_2^0 = 0;\ z_3^0 = 1{,}25;\ \min L_2 = 1340.$$

Исходя из анализа оптимальных двойственных оценок, можно сделать следующие выводы.

Ресурсы первого и третьего видов используются полностью. Полному использованию этих ресурсов соответствуют полученные оптимальные оценки z_1^0, z_3^0, отличные от нуля, т. е. положительные двойственные оценки имеют ресурсы, полностью потребляемые при оптимальном плане производства. Значит, ресурс второго вида недоиспользуется (на 80 ед.).

Двойственные оценки определяют дефицитность используемых ресурсов. Величина двойственной оценки показывает, на сколько возрастает максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества соответствующего ресурса на единицу.

Так, увеличение количества ресурса первого вида на 1 ед. приведет к тому, что появится возможность найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общий доход возрастает на 5,75 д. е. и станет равным 1340 + 5,75 = 1345,75 д. е. Анализ полученных оптимальных значений новой прямой задачи показывает, что это увеличение общего дохода достигается за счет увеличения производства изделий *B* на 0,625 ед. и сокращения выпуска изделий *C* на 0,25 ед. Вследствие этого использование ресурса второго вида уменьшается на 0,125 ед.

Точно так же увеличение на 1 ед. количества ресурсов третьего вида позволит перейти к новому оптимальному плану производства, при котором доход возрастет на 1,25 д. е. и составит 1340 + 1,25 = 1341,25 д. е., что достигается за счет увеличения выпуска изделий *C* на 0,25 ед. и уменьшения выпуска *B* на 0,25 ед., причем объем используемого ресурса второго вида возрастает на 0,625 ед.

При подстановке оптимальных двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи получаем:

$$4 \cdot 5{,}75 + 1{,}25 > 10;$$
$$2 \cdot 5{,}75 + 1{,}25 = 14;$$
$$5{,}75 + 5 \cdot 1{,}25 = 12.$$

Первое ограничение выполняется как строгое неравенство, т. е. двойственная оценка всех ресурсов на производство единицы изделия *A* выше цены этого изделия и, следовательно, выпускать его невыгодно. Его производство и не предусмотрено оптимальным планом прямой задачи.

При одновременном изменении ресурсов всех видов на величину Δb_i ($i = 1, \ldots, m$) можно оценить их суммарное влияние на значение целевой функции (при условии неизменности двойственных оценок в новой двойственной задаче относительно оценок в первоначальной двойственной задаче):

$$\Delta L = \sum_{i=1}^{m} \Delta b_i \cdot z_j^i,$$

где Δb_i — величина возможного (при сохранении оптимального плана первоначальной двойственной задачи) изменения (увеличения или уменьшения) ресурса i-го вида.

2.8. УСТОЙЧИВОСТЬ ОПТИМИЗАЦИОННОГО РЕШЕНИЯ

При исследовании экономических экстремальных задач важно выявить допустимую область изменения параметров задачи, при которой сохраняется ее решение. Совокупность оптимальных решений задачи является дискретной, и для каждого из них имеется диапазон значений из непрерывного интервала параметров. Определив соответствие между дискретной совокупностью решений и набором интервалов, можно говорить об областях устойчивости решения задачи.

Рассмотрим простейшую задачу линейного программирования:

$$\max L = 1,2x_1 + 1,4x_2,$$

$$\begin{cases} 40x_1 + 25x_2 \le 1000, \\ 35x_1 + 28x_2 \le 980, \\ 25x_1 + 35x_2 \le 875. \end{cases}$$

Ее оптимальное решение включает $x_1 = 16^{29}/_{31}$ и $x_2 = 12^{28}/_{31}$.

Двойственные оценки соответствуют решению системы уравнений:

$$\begin{cases} 40y_1 + 25y_3 = 1,2, \\ 25y_1 + 35y_3 = 1,4, \\ y_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть коэффициент 1,4 в целевой функции заменяется на случайный параметр C. Двойственные оценки y_1 и y_2 в этом случае равны:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{42 - 25C}{775}, \\ y_2 = \dfrac{40C - 30}{775}. \end{cases}$$

Для оптимального решения задачи необходимы положительные y_1 и y_2: $42 - 25C \ge 0$; $40C - 30 \ge 0$. Отсюда следует, что решение $x_1 = 16^{29}/_{31}$ и $x_2 = 12^{28}/_{31}$ остается оптимальным для следующего интервала значений: $0,75 \le C \le 1,68$. Если параметр C выходит за пределы допустимого интервала значений, то необходимо получить новое решение задачи.

Аналогичное исследование можно выполнить для выявления интервалов изменения ресурсов в ограничениях. Пусть система ограничений имеет вид:

$$40x_1 + 25x_2 + d_1 = 1000 + 2\lambda,$$
$$35x_1 + 28x_2 + d_2 = 980 + \lambda,$$
$$25x_1 + 35x_2 + d_3 = 875 + 3\lambda,$$

где d_1, d_2, d_3 — свободные переменные; λ — случайный параметр. В оптимальном решении $d_1 = d_3 = 0$, и, следовательно, решение этой системы уравнений будет иметь вид

$$x_1 = 16^{29}/_{31} - \lambda/155;$$
$$x_2 = 12^{28}/_{31} - 14\lambda/155;$$
$$d_2 = 12^{28}/_{31} - 202\lambda/155;$$

Данное решение имеет только структурную устойчивость для интервала значений λ от $-142^6/_7$ до $19^{187}/_{202}$.

2.9. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. По условию примера 4 определить целесообразность включения в план производства изделия D, нормы затрат ресурсов на единицу которого 2, 4, 3 ед., а цена изделия равна 18 ед. Как изменятся оптимальные планы прямой и двойственной задач, если фонды ресурсов каждого вида будут 140, 250, 240 ед.?

Задание 2. Поставить задачу линейного программирования. Пусть для производства л видов изделий предприятие имеет m типов взаимозаменяемого оборудования. Каждое из видов изделий необходимо изготовить в количестве bj (j — 1, л), причем каждый из типов оборудования может быть занят изготовлением этих изделий не более a_i часов (i = 1, m). Время изготовления одного изделия у'-го вида на t-м типе оборудования равно а# часам, а затраты на производство одного изделия на данном типе оборудования равны c_{ij} ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1$, л). Определить, сколько изделий каждого вида на каждом из типов оборудования следует произвести, чтобы себестоимость одного изделия была минимальной.

Задание 3. Поставить задачу. Пусть предприятие для производства n различных наименований изделий использует m видов ресурсов. На производство единицы изделия j-го наименования требуется a_{ij} единиц ресурсов i-го вида ($i = 1, \ldots, m$), а всего их может быть использовано b_i ($i = 1, \ldots, m$) единиц. Величина производственных фондов, используемых при производстве изделия j-го наименования, равна c_j, а прибыль от реализации d_j ($j = 1, \ldots, n$) руб. Предполагая, что предприятие может выпускать изделия разных наименований в любых соотношениях, найти план производства, обеспечивающий максимальную рентабельность.

Задание 4. Подставить произвольно данные в задания 2, 3 и решить задачи с помощью QSB и Excel. Проанализировать и устранить возможную несовместность ограничений. По результатам оптимального решения выявить дефицитные и излишние ресурсы. Не меняя структуру оптимального плана, улучшить значение целевой функции за счет варьирования постоянными величинами прямой задачи в установленных пределах чувствительности.

ГЛАВА 3

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Оптимальное решение является наилучшим только в рамках использования данной модели. Не следует считать, что это действительно самое лучшее решение анализируемой задачи.

Х. Таха

Каким количеством способов можно разменять 25 копеек монетами по 2 и 3 копейки?

Старинная задача

3.1. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Первые упоминания о линейных уравнениях возникли еще за несколько веков до нашей эры.

В Древней Греции **Диофант** (II–III вв.) формулирует уравнения, в которых искомые переменные — целые. Например, для уравнения первой степени, $a_0 + a_1x_1 = 0$, где a_0, a_1 — целые, решение $x_1 = -a_0/a_1$ — целое, если a_0 делится на a_1 без остатка, т. е. такое уравнение не всегда разрешимо в целых числах. Из двух уравнений $3x_1 - 27 = 0$ и $5x_2 + 21 = 0$ только первое имеет целое решение: $x_1 = 27/3 = 9$, а второе — нет, так как $x_2 = -21/5$.

Для уравнения с двумя неизвестными: $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, где a_1, a_2 — целые, решение будет $x_1 = -(a_2/a_1)x_2$. Например

$$10x_1 - 5x_2 = 0 \text{ или } x_1 = 0{,}5x_2. \tag{1}$$

Из этого примера можно сделать следующие выводы: уравнение имеет бесчисленное множество решений, так как $n > m$; решение — целое, если x_2 — четное.

Для того чтобы из множества допустимых решений выбрать одно — оптимальное, необходимо, как нам уже известно, добавить к условию (1) целевую функцию. Задачи оптимизации, в которых решение должно быть в целых числах, называют **задачами целочисленного программирования**. Если в этой задаче целевая функция и ограничения — линейные зависимости, то ее называют **целочисленной задачей линейного программирования**; если же хотя бы одна зависимость будет нелинейной, то такая задача формулируется как **целочисленная нелинейного программирования**.

Большинство практических задач принятия решения сводится к целочисленным задачам линейного программирования.

Если к условию (1) добавить такие, например, граничные условия:

$$2 \le x_1 \le 8; \ 1 \le x_2 \le 3,$$

то можно видеть, что такая система решения не имеет. Отсюда следует, что задача целочисленного программирования не всегда имеет решение, т. е. она не совместна.

Под **целочисленным или дискретным программированием** понимают такие задачи (обычно линейные), в которых искомые переменные по смыслу могут принимать только целые значения: число рабочих, разделяемых по рабочим местам; количество единиц оборудования, устанавливаемых на заданной площади, и т. п.

Аналитическая задача целочисленного программирования формулируется:

$$\max(\min) L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i & (i = 1, \dots, m), \\ d_j \le x_j \le D_j & (j = 1, \dots, n), \\ \text{где } x_j = 0, 1, 2, \dots & \\ \text{целые } (j = 1, \dots, n_1 \le n). & \end{cases}$$

Если $n_1 = n$, то задачу называют **полностью целочисленной**; если $n_1 < n$, то — **частично целочисленной**.

Предположим, что задача имеет многогранник решений (рис. 9). Если наложить требование целочисленности, то допустимое множество решений выразится в систему точек и уже не будет выпуклым.

Если добавить новые ограничения, связывающие внешние целочисленные точки, а затем в качестве многогранника использовать все выпуклое множество, ограниченное осями координат и новым контуром, то получим новую задачу линейного программирования со следующими свойствами:

- новый многогранник решений содержит все целые точки, заключавшиеся в первоначальном многограннике решений; любая его угловая точка целая;

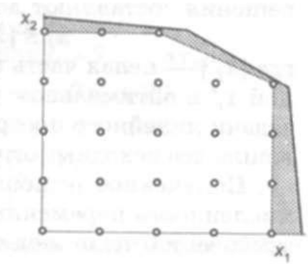


Рис. 9

- так как целевая функция достигает оптимума в угловой точке, то построением многогранника обеспечивается целочисленность оптимального решения.

Таким образом, решение задач целочисленного программирования трудоемко. Поэтому по возможности лучше не накладывать ограничений целочисленности переменных.

В ряде случаев задачу целочисленного программирования решают следующим образом:

1) как непрерывную задачу линейного программирования;
2) округляют переменные;
3) проверяют допустимость округленного решения;
4) если решение допустимое, то оно принимается как целочисленное.

При необходимости точного решения применяют специальные методы, где учитывается, что множество решений любой целочисленной задачи — конечно. Например, в задаче с переменными x_1, x_2: $0 < x_1 \leq 4$; $0 < x_j \leq 5$. Число возможных решений $4 \cdot 5 = 20$. Следовательно, возможен полный перебор всех возможных сочетаний целочисленных x_1, x_2 и выбор из них наилучших в смысле целевой функции. Трудоемкость этого метода возрастает с ростом числа переменных и области граничных условий, и для реальных задач он неприменим.

Поэтому в реальных задачах применяют методы, в которых не рассматривают все возможные альтернативы. Распространены **методы отсечений** и **методы возврата**, среди которых наиболее известен **метод ветвей и границ**. Метод отсечений для программной реализации сложен.

3.2. МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Задача линейного программирования решается без учета целочисленности. Такая задача называется **непрерывной**. Далее рассматривают одну из переменных x_j, на которую накладывают ограничение целочисленности, но которая получила дробное значение. На основе полученного решения составляют дополнительные ограничения:

$$x_j \leq [x_j^*] \text{ и } x_j \geq [x_j^*] + 1,$$

где $[x_j^*]$ — целая часть нецелочисленного значения переменной x_j^* в оптимальном решении, и затем решаются еще две задачи линейного программирования, в каждую из которых вошли все исходные ограничения и одно из дополнительных.

Полученное решение новых задач проверяют на целочисленность переменных. Если решение не удовлетворяет требованию целочисленности, на основе каждой из задач составляют, аналогично предыдущим, две новые и т. д.

Если одно из решений удовлетворяет требованию целочисленности, значение целевой функции принимается за граничное $L_{\text{гр}}$. При этом рассмотрение других задач продолжается до тех пор, пока не будет получено:

- на одной из ветвей недопустимое решение;
- на одной из ветвей целочисленное решение. Тогда значение целевой функции сравнивается с $L_{\text{гр}}$ (верхним — при max, нижним — при min); если полученное значение хуже, оно отбрасывается; если лучше, то принимается за граничное;
- на одной из ветвей нецелочисленное решение, однако при этом значение целевой функции хуже граничного. Тогда дальнейшее рассмотрение также прекращается. На первом цикле расчета

$$\begin{cases} -\infty & \text{при } \max L, \\ +\infty & \text{при } \min L. \end{cases}$$

Таким образом, для получения целочисленного решения методом ветвей и границ приходится решать большое число задач линейного программирования, причем в каждом очередном ветвлении число ограничений увеличивается на 1. Поэтому время решения задачи целочисленного программирования по сравнению с непрерывной значительно увеличивается.

Пример 1. $\max L = 7x_1 + 3x_2,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ 8x_1 + 4x_2 \leq 38, \\ x_1, x_2 \geq 0 - \text{целые}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В результате решения задачи симплекс-методом найдем оптимальное решение: $x_1^{1*} = 1$; $x_2^{1*} = 7{,}5$; $L_1 = 29{,}5$, где верхний индекс переменных — номер задачи.

В полученном решении $x_2 = 7{,}5$ — нецелочисленное. Поэтому для дальнейшего решения составляем две новые задачи с различными граничными условиями.

Задача 2.

$$\max L = 7x_1 + 3x_2,$$
$$\begin{aligned} &5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ &8x_1 + 4x_2 \leq 38, \\ &x_1 \leq 0, \\ &0 \leq x_2 \leq 7. \end{aligned}$$

Задача 3.

$$\max L = 7x_1 + 3x_2,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ 8x_1 + 4x_2 \leq 38, \\ x_1 \geq 0, \end{cases}$$

Результаты решения симплекс-методом задачи 2: $x_1^{2*} = 1{,}2$; $x_2^{2*} = 7$; $L_2 = 29{,}4$; задачи 3: $x_1^{3*} = 0{,}75$; $x_2^{3*} = 8$; $L_3 = 29{,}25$.

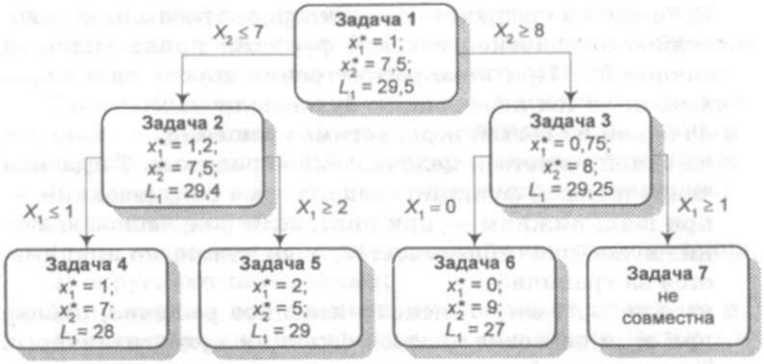


Рис. 10

В задаче 1 переменная $x_1^1 = 1$ — целочисленная, а в последующих задачах при целочисленности x_2 перестала быть целочисленной x_1. Затем следует накладывать ограничения целочисленности на x_1 и т. д. (рис. 10).

Результаты решения непрерывной и целочисленной задач вводятся в таблице 13. В качестве оптимального принимается решение задачи 5, которое дает наибольшее из целочисленных решений значение целевой функции.

Таблица 13

N задачи	XI	X2	L	N задачи	XI	X2	L
1	1	7,5	29,5	5	2	5	29
4	1	7	28	6	0	9	27

Из примера видно, что метод ветвей и границ достаточно трудоемкий. При этом оптимальное решение может быть получено в результате сравнения всех допустимых целочисленных решений. Поэтому при решении задач реальной размерности может потребоваться память, которой нет даже в современных компьютерах, или потребуется практически неприемлемое время решения.

Обязательное условие метода — наличие верхних границ на значения переменных D_j. Если D_j не назначена, то ее определяют по зависимости:

$$D_j = \min_{i=1,\ldots,m} \left\{ \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j^1}{a_{ij}} \right\} \quad j = 1, \ldots, n_1 \le n,$$

где d_j^1 — минимальные значения всех x_j, для которых определяется верхняя граница D_j.

3.3.
ЗАДАЧА ВЫБОРА ВАРИАНТОВ

Перейдем теперь к частному случаю задач целочисленного программирования — задаче выбора вариантов.

В этом частном случае искомая переменная x_j в результате решения может принимать не любое целое значение, а только одно из двух: либо 0, либо 1. Чтобы такие переменные отличать от обычных и каждый раз не писать $x_j\,[0;\,1]$, будем их вместо x_j обозначать δ_j. И это уже будет означать, что в результате решения задачи δ_j может быть равным или 0 или 1, т. е. всегда $\delta_j\,[0;\,1]$. Такие переменные обычно называют **булевыми** (в честь предложившего их английского математика Джорджа Буля, 1815–1864).

С помощью булевых переменных можно решать самые различные по содержанию задачи, в которых надо что-то выбирать из имеющихся различных вариантов (например, еще в первобытно-общинном строе глава племени наверняка решал такую задачу, выбирая, какого члена общины на какую работу поставить), в том числе: задачи о назначении, выбора вариантов, дискретного программирования.

Пример 2. В задаче выбора вариантов примем, что для получения результата в виде максимально возможной прибыли необходимы два вида ресурсов: материальные и трудовые. Возможны четыре варианта расхода ресурсов и получения прибыли (табл. 14).

Требуется выбрать, какие варианты принять для реализации при условии, чтобы общее число принятых вариантов не превышало трех ($k \le 3$).

Решение. Для составления модели примем, что j-му варианту будет соответствовать δ_j ($j = 1, \ldots, 4$). При этом

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й вариант принят;} \\ 0, & \text{если } j\text{-й вариант не принят.} \end{cases}$$

Тогда математическая модель задачи запишется

$$\max L = 65\delta_1 + 80\delta_2 + \delta_3 + 210\delta_4,$$

$$\begin{cases} 200\delta_1 + 180\delta_2 + 240\delta_3 + 250\delta_4 \le 800, \\ 10\delta_1 + 15\delta_2 + 22\delta_3 + 28\delta_4 \le 50, \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \le 3. \end{cases}$$

Таблица 14

Показатели	Варианты				Наличие
	1	2	3	4	
Прибыль, д. е./ед.	65	80	90	210	–
Материальные ресурсы	200	180	240	250	800
Трудовые ресурсы	10	15	22	28	50

Последняя строка системы обеспечивает выполнение условия, чтобы общее число принятых вариантов не превышало трех.

Из результатов решения этой задачи (первый столбец табл. 15) видно, что наибольшая прибыль ($\max L = 300$) будет получена в том случае, если будут приняты третий и четвертый варианты.

Таблица 15

Оптимальное решение	Дополнительные условия		
	нет	$\delta_2 = \delta_4$	$\delta_3 + \delta_4 = 1$
δ_1	0	0	1
δ_2	0	1	1
δ_3	0	0	1
δ_4	1	1	0
Прибыль ($\max L$)	300	290	235

С помощью булевых переменных можно накладывать дополнительные логические связи между вариантами. Например, требуется, чтобы четвертый вариант был принят только в том случае, если принят второй; а если же второй вариант не принят, то и четвертый не должен быть принят. Это условие можно записать так: $\delta_2 = \delta_4$ или в форме записи ограничений $\delta_2 - \delta_4 = 0$ (результат решения этой задачи во втором столбце табл. 15).

Может быть сформулирован и другой вариант дополнительных условий. Например, требуется, чтобы был принят либо третий, либо четвертый, т. е. $\delta 3 + \delta 4 = 1$ (результат решения в третьем столбце).

Сравнивая значение прибыли в оптимальном решении ($\max L = 300$) с прибылью при выполнении дополнительных условий, можно сделать вывод, что они, как всегда, приводят к снижению прибыли.

Переходя от примера с дополнительными условиями к общему случаю, задачу выбора вариантов можно записать так:

$$\max L = \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_j,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \delta_j \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \\ p \le \sum_{j=1}^{s \le n} \delta_j; \le k, \end{cases}$$

где последнее ограничение может учитывать самые разнообразные условия.

Если накладывается требование «должен», то в ограничении ставится знак равенства: $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 3$ (число принятых вариантов «должно быть» три).

Если требование «может», то — знак неравенства, в частности:

- если накладывается требование «И», то

$$\sum_{j=1}^{s} \delta_j \ge 1,$$

например, принятие и первого и третьего вариантов запишется $\delta_1 + \delta_3 \ge 1$;

- если для вариантов накладывается требование «ИЛИ», то условие запишется

$$\sum_{j=1}^{s} \delta_j = 1.$$

Следовательно, если принять, что $\delta_б$ соответствует «быть», $\delta_{нб}$ — «не быть», то извечный вопрос «быть или не быть» запишется $\delta_б + \delta_{нб} = 1$. В этом случае есть два допустимых решения: $\delta_б = 1$, $\delta_{нб} = 0$ — означает «быть»; $\delta_б = 0$, $\delta_{нб} = 1$ — означает «не быть». Так как целевая функция не сформулирована, то дать оптимальный ответ на этот вопрос невозможно. Чтобы принять решение, необходимо знать, чего мы хотим. Но об этом мы уже неоднократно говорили.

3.4. ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В задачах дискретного программирования результатом решения должны быть целые, но не любые целые.

Пример 3. Мебельная фабрика выпускает диваны, кресла и стулья. Требуется определить, сколько можно изготовить спинок диванов, подлокотников кресел и ножек стульев при известном удельном расходе ресурсов (табл. 16), чтобы доход был максимальным.

Таблица 16

Показатели	Изделия			Наличие ресурса
	спинка дивана	подлокотники кресла	ножка стула	
Цена, д. е./ед.	20	6	8	–
Древесина	10	5	3	206
Трудозатраты	2	7	4	100
Спрос	10	8	12	–
	x_1	x_2	x_3	

Причем выпуск спинок дивана может принимать любое значение, подлокотники изготавливаются парами, т. е. их количество должно быть кратно двум, а количество ножек стульев — четырем.

Р е ш е н и е. С учетом этих требований математическая модель задачи запишется:

$$\max L = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3,$$

$$\begin{aligned}
&10x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 206,\\
&2x_1 + 7x_2 + 4x_3 \le 100,\\
&0 \le x_1 \le 10,\\
&0 \le x_2 \le 8,\\
&0 \le x_3 \le 12,\\
&x_2 = 2\delta_{21} + 4\delta_{22} + 6\delta_{23} + 8\delta_{24},\\
&x_3 = 4\delta_{31} + 8\delta_{32} + 12\delta_{33},\\
&\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{24} = 1,\\
&\delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33} = 1,
\end{aligned}$$

где δ_{2k}, δ_{3k} — варианты количества подлокотников и ножек ($k = 1, \ldots, k_i$).

Здесь дополнительное введение булевых переменных дает возможность обеспечить выпуск изделий в кратном заданном количестве. Так, для подлокотников x_2 может принимать следующие значения: если в результате решения будет получено $\delta_{21} = 1$, а остальные $\delta_{22} = \delta_{23} = \delta_{24} = 0$, то $x_2 = 2$; если $\delta_{22} = 1$, а остальные $\delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{24} = 0$, то $x_2 = 4$ и т. д.

Для решения задачи с учетом дополнительных условий мы ввели еще семь переменных и четыре ограничения. Следовательно, введение дополнительных требований привело к увеличению размерности задачи. Заметим, что если бы нам требовалось определить выпуск спинок, подлокотников и ножек для одного изделия (комплекта), то можно было бы записать $x_2 = 2x_1$; $x_3 = 4x_1$ и не вводить дополнительных ограничений и булевых переменных. Но это была бы другая задача.

В результате решения задачи были получены следующие значения: $\max L = 320$; $x_1^0 = 10$; $x_2^0 = 4$; $x_3^0 = 12$; $\delta_{22}^0 = \delta_{33}^0 = 1$; $\delta_{21}^0 = \delta_{23}^0 = \delta_{24}^0 = \delta_{31}^0 = \delta_{32}^0 = 0$.

При этом оказались не полностью использованы ресурсы: резерв первого равен 50, второго — 4 ед.

Такое недоиспользование характерно для задач целочисленного программирования, т. е. ресурс остается, но для использования на увеличение дискретного количества продукции его оказывается недостаточно.

В общем виде задачу распределения ресурсов с учетом требования дискретного значения переменных можно записать:

$$\max(\min) L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m),\\
x_j = \sum_{k=1}^{k_j} d_{kj}\delta_{kj} \quad (j = 1, \ldots, n),\\
\sum_{k=1}^{k_j} \delta_{kj} = 1,
\end{cases}$$

где d_{1j}, d_{2j}, ..., d_{kj}, ... — дискретные значения, которые может принимать переменная x_j. Эта система отличается от обычной задачи распределения ресурсов появлением булевых переменных и увеличением числа ограничений:

$$\max(\min) L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m),\\
d_j \le x_j \le D_j \quad (j = 1, \ldots, n).
\end{cases}$$

Значит, в данном случае, как и всегда, за удовлетворение дополнительных требований приходится платить увеличением размерности задачи и целочисленностью.

3.5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ

Мы убедились, что с помощью булевых переменных можно решать часто встречающиеся задачи оптимизации. Но как решать?

Есть три метода решения задач с булевыми переменными:

- метод ветвей и границ;
- метод сплошного перебора;
- метод фильтрующего ограничения.

Методом ветвей и границ задачи дискретного программирования решаются, как обычные задачи целочисленного программирования. При этом на каждую переменную накладываются два требования:

$$0 \le \delta_j \le 1 \ (j = 1, \ldots, n);$$

$$d_j = 0, 1 \text{ — целые } (j = 1, \ldots, n).$$

Совершенно очевидно, что выполнение этих двух требований обеспечивает получение в решении значений δ_j [0; 1], т. е. равных 0 или 1.

Пример 4. Требуется решить систему методом сплошного перебора:

$$\max L = 3\delta_1 - 2\delta_2 + 5\delta_3,$$

$$\begin{cases} \delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3 \le 2, & (1) \\ \delta_1 + 4\delta_2 + \delta_3 \le 4, & (2) \\ \delta_1 + \delta_2 \le 3, & (3) \\ 4\delta_1 + \delta_2 \le 6. & (4) \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Так как δ_1, δ_2, δ_3 могут принимать значения 0 или 1 в любом сочетании, рассмотрим все возможные сочетания (табл. 17) в следующей последовательности.

Таблица 17

№ варианта	5:	52	53	(1)	(2)	(3)	(4)	L
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	1	4	3
3	0	1	0	2	4	1	0	- 2
4	0	0	1	- 2	1	0	1	5
5	1	0	1	0	2	1	5	8
6	1	1	0	3	5	2	4	1
Требование				< 2	<4	< 3	< 6	max

1. Заполнить все возможные сочетания допустимых значений δ_1, δ_2, δ_3.

2. Определить и записать значения левых частей ограничений (1)–(4) и целевой функции.

3. Вычеркнуть те варианты, в которых не удовлетворяется хотя бы одно ограничение, как приводящие к недопустимым решениям.

4. Из оставшихся вариантов принимается тот, в котором целевая функция максимальна. В примере $\max L = 8$ — в шестом варианте (оптимальном), в котором $\delta_1^0 = \delta_3^0 = 1$; $\delta_2^0 = 0$.

Из этого примера видно, что в данном случае всего вариантов будет $2^3 = 8$ и для каждого варианта надо вычислить четыре ограничения и целевую функцию, т. е. выполнить $N = 8(4 + 1) = 40$ вычислительных операций. Значит, в общем случае $N = 2^n(m + 1)$, где n — число переменных, m — число ограничений. Следовательно, при увеличении размерности задачи число вычислений резко возрастает (табл. 18).

Таблица 18

n	ТО		
	4	10	15
3	40	88	120
5	160	352	512
10	5120	11 264	16 384

Для сокращения трудоемкости полного перебора применяют различные методы.

Метод фильтрующего ограничения предполагает следующую последовательность действий.

1. Принимают некоторые значения δ_1, δ_2, δ_3, например: 1, 0, 0.

2. Определяют значение целевой функции при таком наборе переменных $L = 3\delta_1 - 2\delta_2 + 5\delta_3 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 3$.

3. Далее устанавливают новые значения переменных и целевой функции; причем если полученная целевая функция меньше 3, то этот вариант не рассматривают. Для исключения возможного рассмотрения такого варианта вводят дополнительное ограничение $3\delta_1 - 2\delta_2 + 5\delta_3 \ge 3$, которое называют **фильтром (Ф)**.

4. Составляют таблицу (табл. 19), в которой для каждого варианта проверяют выполнение всех ограничений, включая Ф.

Если вычисление прекращается и величины не определены, то в клетках таблицы ставится прочерк.

Введение фильтрующего ограничения Ф привело к сокращению числа вычисляемых величин (24 вместо 40, т. е. 60%).

Таблица 19

№ варианта	6i	82	5з	Ф = F	(1)	(2)	(3)	(4)
1	0	0	0	–	–	–	–	–
2	1	0	0	3	1	1	1	4
3	0	1	0	- 2	–	–	–	–
4	1	1	0	1	–	–	–	–
5	0	0	1	5	- 1	1	0	1
6	1	0	1	8	0	2	1	5
7	0	1	1	3	1	5	–	–
8	1	1	1	6	2	6	–	–
Требование				> 3	< 2	< 4	<;з	< 6

Число вычислений можно уменьшить, если фильтр будет не постоянным для всего цикла вычислений, а изменяющимся, т. е. если в ходе вычислений при каком-либо наборе переменных значение целевой функции окажется лучше, чем у фильтра, то это новое допустимое решение принимают для следующих вычислений в качестве нового фильтра. Такой фильтр называют **адаптивным.**

Например, из таблицы видно, что в пятом варианте $\Phi = 5$. Поэтому для дальнейших вычислений в качестве фильтрующего ограничения принимаем $3\delta_1 - 2\delta_2 + 5\delta_3 \geq 5$ (Φ_1). Однако для следующего варианта значение целевой функции будет еще больше ($\Phi = 8$) и в качестве фильтрующего ограничения принимается $3\delta_1 - 2\delta_2 + 5\delta_3 \geq 8$ (Φ_2). Для седьмого и восьмого вариантов значение целевой функции не удовлетворяет требованиям фильтра Φ_2 и значения ограничений не вычисляем. Значит, трехкратный фильтр (Φ, Φ_1, Φ_2) позволил сократить вычисления еще на 4, т. е. надо выполнить 20 вычислений вместо 40 (50%). Более значительное сокращение трудоемкости достигается методом Беллмана с фильтром, где наибольший Φ получают сразу.

3.6. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Во многих задачах менеджмента требуется изучить поведение оптимального решения задачи линейного программирования в зависимости от изменений коэффициентов целевой функции. Задачи, в которых исходные данные зависят от некоторого параметра (например, цена продукции от спроса), называют **задачами параметрического программирования.**

Задача, в которой коэффициенты целевой функции линейно зависят от параметра t, заключается в нахождении для каждого значения параметра t из промежутка его изменения $[\alpha, \beta]$ максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} (c_j' + c_j'' t) x_j, \tag{1}$$

при условиях

$$\mathrm{I}_{1}\; a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, \dots, m), \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, \dots, n), \tag{3}$$

где c_j', c_j'', a_{ij}, b_i — заданные постоянные числа.

Может быть поставлена и обобщенная параметрическая задача, в которой от параметра t линейно зависят коэффициенты при неизвестных в целевой функции (цены изделий от спроса на них), в системе уравнений (нормы расхода ресурсов от применяемых технологий), свободные члены системы уравнений (наличие ресурсов от предложений поставщиков):

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} (c_j' + c_j'' t) x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}' + a_{ij}'' t) x_j = b_i' + b_i'' t \; (i = 1, \dots, m),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$\lfloor \alpha \leq t \leq \beta,$$

где [a, B] — промежуток изменения значений параметра t (-co, +00).

Решение задач (1)-(3), (4)-(7) можно найти методами линейного программирования, например, геометрически при / = 2.

Предположим, что в задаче (1)-(3) множество неотрицательных решений системы линейных уравнений (2) (многогранник решений) не пусто и включает более чем одну точку. Тогда исходная задача состоит в определении при каждом параметре t е [a, B] такой точки многогранника решений, в которой функция (1) принимает max. Чтобы найти эту точку, будем считать $t = t_0$ и, используя геометрическую интерпретацию, находим решение полученной задачи линейного программирования (1)-(3), т. е. определяем вершину многогранника решений, в которой функция (1) имеет max, либо устанавливаем, что при данном значении t_0 задача неразрешима.

После нахождения точки, в которой при $t = t_0$ функция (1) принимает max, ищут множество значений t, для которых координаты этой точки определяют оптимальный план задачи (1)-(3). Найденные параметры t исключают из рассмотрения и берут некоторое новое значение t из промежутка [a, B].

Для выбранного значения параметра t из промежутка [a, B] либо находят оптимальный план, либо устанавливают неразрешимость задачи.

Пример 5. Пусть предприятие изготавливает два вида продукции А и В, для которых использует три вида ресурсов. Известны нормы расхода и запасы каждого вида (см. табл. 20).

Из анализа спроса установлено, что цена единицы продукции для изделия А может изменяться от 2 до 12 руб., а для изделия B — от 13 до 3 руб., причем эти изменения

Таблица 20

Ресурсы	Удельный расход ресурсов на изделие		Наличие ресурсов
	A	*B*	
1	4	1	16
2	2	2	22
3	6	3	36
Цена изделия	2 +*t*	13 -*t*	

определяются соотношениями $c_1 = 2 + t$, $c_2 = 13 - t$, где $0 \le t \le 10$.

Требуется для каждого из возможных значений цены каждого вида изделий найти такой план их производства, при котором обеспечивается максимальная выручка.

Р е ш е н и е. Математически задача формулируется:

$$\max\left[(2+t)x_1 + (13-t)x_2\right],$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 22, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0; \quad 0 \le t \le 10. \end{cases}$$

Для решения задачи (8)-(10) строим многоугольник решений, определенный системой линейных неравенств (9) и условием неотрицательности переменных (рис. 11).

После этого, полагая $t = 0$, строим целевую функцию $2x_1 + 13x_2 = 26$ (число 26 — произвольно) и вектор $c = (2; 13)$. Передвигая эту прямую в направлении вектора c, можно установить последнюю ее точку с многоугольником решений *OABCD*, т. е. точку A(0; 11). Следовательно, задача, полученная из задачи (8)-(10) при $t = 0$, имеет оптимальный план $x_0^* = (0; 11)$. Это означает, что если цена изделия *A* равна 2 + 0 = 2 руб., а цена изделия *B* 13 - 0 = 13 руб., то в оптимальном плане производство изделий *A* не предусматривается, а изделий *B* требуется изготовить 11, и максимальная выручка составит $\max F = 143$ руб.

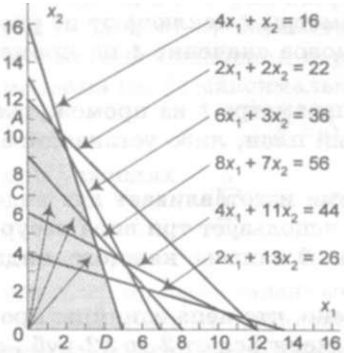


Рис. 11

Положим теперь $t = 2$ и построим прямую целевой функции $(2 + 2)x_1 + (13 - 2)x_2 = 4x_1 + 11x_2 = 44$ (число 44 — произвольно и вектор $\vec{c}_1$ (4; 11)). Передвигая эту прямую в направлении вектора $\vec{c}_1$, устанавливаем последнюю точку многоугольника решений, ту же точку *A*(0; 11).

Следовательно, при $t = 2$ задача, полученная из задачи (8)–(10), имеет тот же оптимальный план $x_0^* = (0; 11)$, означающий, что при цене изделия *A* 4 руб., а изделия *B* 11 руб., требуется изготовить только 11 ед. изделия *B*, которые обеспечат максимум выручки $\max F = 11 * 11 = 121$ руб.

Как видно из рисунка 11, данный план производства будет оставаться оптимальным для всякого значения t, пока прямая целевой функции $(2 + t)x_1 + (13 - t)x_2 = L$ не станет параллельной прямой $2x_1 + 2x_2 = 22$. Это произойдет тогда, когда

$$\frac{2+t}{2} = \frac{13-t}{2},$$

т. е. при $t = 5{,}5$ координаты любой точки отрезка *AB* дают оптимальный план задачи (8)–(10).

Таким образом, для всякого $0 \le t \le 5{,}5$ задача (8)–(10) имеет оптимальный план x_0^* (0; 11), при котором значение целевой функции

$$\max F = (2 + t)x_1 + (13 - t)x_2 =$$
$$= (2 + t) \cdot 0 + (13 - t) \cdot 11 = 143 - 11t.$$

При значениях параметра t, больших 5,5, например, $t = 6$: прямая целевой функции $8x_1 + 7x_2 = 56$ (56 — произвольно), которой соответствует вектор $\vec{c}_2$ (8; 7); в направлении движения по этому вектору последняя точка *B*(1; 10), т. е. при цене *A* 2 + 6 = 8, при цене *B* 13 − 6 = 7 руб.

$$x_1^0 = 1; \; x_2^0 = 10;$$
$$\max F = 78 \text{ руб.}$$

Как видно из рисунка 11, план $x_1^* = (1; 10)$ задачи (8)–(10) будет оптимальным для всякого $t > 5{,}5$ пока прямая целевой функции не станет параллельной прямой $6x_1 + 3x_2 = 36$. Это произойдет, когда

$$\frac{2+t}{6} = \frac{13-t}{3},$$

то есть при $t = 8$, при котором координаты любой точки отрезка *BC* дают оптимальный план задачи (8)–(10).

Таким образом, для всякого $5{,}5 \le t \le 8$ задача (8)–(10) имеет оптимальный план $x_1^* = (1; 10)$, при котором значение целевой функции

$$\max F = (2 + t) * 1 + (13 - t) * 10 = 132 - 9t.$$

3-2917

Используя рисунок 11 и аналогично рассуждая, получим для всякого $8 \le t \le 10$ оптимальным планом задачи (8)–(10) будет $x_2^* = (2; 8)$, т. е. если цена изделия A заключена между (или равна) 10 и 12 руб., а изделия B между 3 и 5 руб., то $x_1^0 = 2$ ед.; $x_2^0 = 8$ ед., которые обеспечат максимальную выручку

$$\max F = 108 - 6t.$$

Окончательно:

$$t = \begin{cases} [0; 5,5] = \begin{cases} x_0^* = (0; 11), \\ \max F = 143 - 11t, \end{cases} \\ [5,5; 8] = \begin{cases} x_1^* = (1; 10), \\ \max F = 132 - 9t, \end{cases} \\ [8; 10] = \begin{cases} x_2^* = (2; 8), \\ \max F = 108 - 6t. \end{cases} \end{cases}$$

3.7. ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Общая задача дробно-линейного программирования формулируется

$$\max L = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = \frac{L_1}{L_2},$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \end{cases}$$

где c_j, d_j, b_i, a_{ij} — некоторые постоянные числа;

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j > 0.$$

Для $n = 2$:

$$\max L = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2}, \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i \quad (j = 1, \ldots, n), & (2) \\ x_1, x_2 \ge 0, & (3) \end{cases}$$

где $d_1 x_1 + d_2 x_2 > 0$.

Задача (1)–(3) решается в следующей последовательности.

1. В системе ограничений (2) заменяют знаки неравенства на знаки равенства и строят определяемые этими равенствами прямые.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из неравенств системы ограничений задачи.

3. Находят область (многоугольник) допустимых решений задачи.

4. Строят прямую

$$L = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2},$$

уравнение которой получается, если положить значение целевой функции (1) равным некоторому постоянному числу.

5. Определяют точку максимума или устанавливают неразрешимость задачи.

6. Находят значение целевой функции в точке максимума.

Пример 6. Пусть для производства двух видов изделий A и B используется три типа технологического оборудования. Известны затраты времени и других ресурсов на производство единицы изделия каждого вида (табл. 21).

Таблица 21

Тип оборудования	Нормы времени		Ограничения по фонду времени работы оборудования	
	A	*B*	верхний	нижний
I	2	8	26	_
II	1	1	_	4
III	12	3	39	_
Затраты на производство	2	3	_	_

Требуется определить, сколько изделий каждого вида необходимо изготовить, чтобы себестоимость одного изделия была минимальной.

Решение

$$\min L = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}, \tag{4}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \le 26, & (5) \\ x_1 + x_2 \ge 4, & (6) \\ 12x_1 + 3x_2 \le 39, & (7) \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

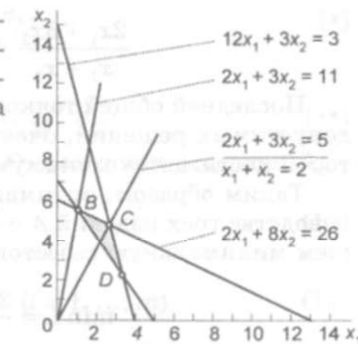


Рис. 12

Решение задачи определяется из области допустимых решений (рис. 12). Из рисунка видно, что область допустимых решений представляется треугольником *BCD*. Значит целевая функция принимает значение в одной из точек: *B*, *C* или *D*. Чтобы определить, в какой из этих точек, положим значение функции L равным некоторому числу, например, 11/4:

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{11}{4} \text{ или } -3x_1 + x_2 = 0. \quad (8)$$

Очевидно, уравнение (8) определяет прямую, проходящую через начало координат. Координаты точек этой прямой, принадлежащие и многоугольнику решений, являются планами задачи, при которых значение целевой функции равно 11/4. В данном случае к указанным точкам относится только одна точка $B(1; 3)$.

Теперь положим, что

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{5}{2} \text{ или } -x_1 + x_2 = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9), как и (8), определяет прямую, проходящую через начало координат. Ее можно рассматривать как прямую, полученную в результате вращения прямой (8) по часовой стрелке вокруг начала координат.

Следовательно, если положить значение целевой функции равным некоторому числу L_0,

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = L_0, \quad (10)$$

а прямую (10), проходящую через начало координат, вращать в направлении часовой стрелки вокруг начала координат, то получим прямые

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = L, \text{ где } L < L_0.$$

Последней общей точкой вращаемой прямой с областью допустимых решений, очевидно, будет точка $D(3; 1)$, в которой достигается минимум функции (4).

Таким образом, оптимальный план заключается в производстве трех изделий A и одного изделия B, обеспечивающем минимальную себестоимость одного изделия, равного

$$\min L = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{3 + 1} = \frac{9}{4}.$$

Угловую точку области допустимых решений, в которой целевая функция может принимать минимальное (или максимальное) значение, можно найти, вычисляя и сравнивая значение целевой функции в этих подозрительных на экстремум точках: $L(B) = 11/4$, $L(D) = 9/4$. Так как $L(B) > L(D)$, то можно утверждать, что в точке D целевая

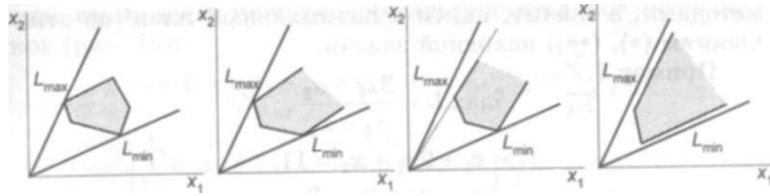


Рис. 13

функция принимает минимальное значение (а в точке B — максимальное).

Необходимо помнить, что решение дробно-линейных задач определяется видом области допустимых решений (рис 13).

1. Область допустимых решений ограничена, max или min целевой функции достигаются в ее угловых точках.
2. Область допустимых решений не ограничена, но существуют угловые точки, в которых целевая функция принимает собственно максимальное и минимальное значение.
3. Область допустимых решений не ограничена, и один из экстремумов достигается ($L_{\min}$) в одной из ее вершин, а целевая функция имеет так называемый асимптотический максимум.
4. Область допустимых решений не ограничена; max и min являются асимптотическими.

Задача дробно-линейного программирования при $n > 2$ может быть решена сведением ее к задаче линейного программирования. Для этого следует обозначить через

$$y_0 = \left(\sum_{j=1}^{n} d_j x_j\right)^{-1}, \quad (*)$$

и ввести новые переменные

$$y_j = y_0 x_j (j = 1, \ldots, n). \quad (**)$$

Тогда исходная задача (1)–(3) сведется к следующей:

$$\max L^* = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j, \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \quad (i = 1, \ldots, m), & (12) \\ \sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1, & (13) \\ y_j \geq 0 \qquad (j = 1, \ldots, n),\ y_0 \geq 0. & (14) \end{cases}$$

Задача (11)–(14) — это задача линейного программирования, и, следовательно, ее решение можно найти известными методами, а значит, найти и оптимальный план (по отношениям (*), (**)) исходной задачи.

Пример 7.

$$\max L = \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 9, \\ x_1, \ldots, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Здесь x_3, x_4, x_5 — фиктивные переменные, преобразующие неравенства в равенства.

Решение. Сводим эту задачу к задаче линейного программирования. Для этого обозначим $y_0 = (x_1 + x_2)^{-1}$ и вводим новые переменные $y_j = y_0 x_j$ ($j = 1, \ldots, 5$). Получим задачу линейного программирования, которая может быть решена на компьютере.

$$\max L^* = 2y_1 + y_2,$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 - 11y_0 = 0, \\ y_1 - y_2 + y_4 - 8y_0 = 0, \\ -y_1 + 3y_2 + y_5 - 9y_0 = 0, \\ y_1 + y_2 = 1, \\ y_1, \ldots, y_5 \geq 0, y_0 \geq 0. \end{cases}$$

Ее оптимальный план: $y_1^0 = 0{,}9$; $y_2^0 = 0{,}1$; $y_3^0 = y_4^0 = 0$; $y_5^0 = 1{,}5$; $y_0^0 = 0{,}1$.

Так как $y_j = y_0 x_j$, то оптимальный план исходной задачи:

$$x_j^0 = y_j^0 / y_0^0, \text{ т. е. } x^0 = (9; 1; 0; 0; 15),$$

$$\max L = \frac{2 \cdot 9 + 1}{9 + 1} = 1{,}9.$$

3.8. БЛОЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Рис. 14

В решении конкретных экономических задач часто используют постановки, системы ограничений которых содержат все переменные (ограничения, образующие блок-связку), а другая часть ограничений содержит часть переменных (ограничения, образующие блоки). Структура таких задач может содержать значительное число блоков (рис. 14):

$$\max L = c_1 x_1 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n = \sum^{n} c_j x_j,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, \ldots, m_0), \\ \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = m_0 + 1, m_1), \\ \sum_{j=n_1+1}^{n_2} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = m_1 + 1, m_2), \\ \sum_{j=n_{p-1}+1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = m_{p-1} + 1, m_p), \\ d_j \leq x_j \leq D_j & (j = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Такой задаче специальной блочной структуры соответствует особая структура исходных данных (табл. 22).

Таблица 22

Ограничение	Переменные					Свободный член
	n_1	n_2	n_3	...	n_p	
m_0	A_{01}	A_{02}	A_{03}	...	A_{0p}	b_0
m_1	A_1			...		b_1
m_2		A_2		...		b_2
m_3			A_3	...		b_3
...	...	...	...	...	...	...
m_p				...	A_p	b_p

Применительно к матрице блочной структуры математическую постановку задачи можно переписать иначе, вводя двухиндексное обозначение переменной x_{pj}, указывающей на принадлежность переменной x_j к p-му локальному блоку:

$$\max(\min) L = \sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{n} c_{pj} x_{pj},$$

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{n_p} a_{ij} x_{pj} \leq b_i & (i = 1, \ldots, m_0); \text{ (для блока-связки)}, \\ \sum_{j=1}^{n_p} a_{ij} x_{pj} \leq b_i & (i = 1, \ldots, m_p, p = 1, \ldots, P), \\ d_{pj} \leq x_{pj} \leq D_{pj} & (j = 1, \ldots, n_p; p = 1, \ldots, P), \end{cases}$$

где P — общее число локальных блоков; n_p — число переменных, входящих в *p-й* локальный блок; m_p — число ограничений в *p-м* локальном блоке.

Задачи такого класса ставятся применительно к производственным комплексам, холдингам, финансово-промышленным группам, корпорациям и т. п., состоящим из нескольких других предприятий со своими локальными характеристиками (ресурсами, показателями) и в то же время объединенным совокупностью ограничений (общих для всей системы) и единой целевой функцией.

Особенность таких задач — большая размерность, затрудняющая формирование и отладку постановки и исходных данных.

Современные программные средства в большинстве используют специальные методы решения с разложением (декомпозицией) задачи на Р подзадач, например, метод декомпозиции Данцига-Вульфа. По этому методу каждый блок матрицы формируется и отлаживается автономно как отдельная подзадача с последующим объединением блоков общими ограничениями на этапе окончательного составления задачи. Такие задачи экономически интерпретируются как задачи многоуровневой иерархической структуры.

3 9
КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Поставить и решить с помощью *QSB* и *Excel* задачу целочисленного программирования. Пусть для производства двух видов изделий на двух предприятиях одного объединения может быть использовано 480 ед. сырья. Нормы затрат сырья на одно изделие соответственно равны 4 и 3 ед., а прибыль от реализации одного изделия соответственно равна 5 и 6 млн руб. На каждом из предприятий изделия проходят последовательную обработку, причем используются два типа технологического оборудования. Известны затраты времени на изготовление на каждом из типов оборудования каждого предприятия и их общий фонд времени работы (табл. 23).

Таблица 23

Тип обо-рудо-вания	1-е предприятие		2-е предприятие		Общий фонд рабочего времени предприятия	
	Затраты времени на одно изделие					
	изделие *m*	изделие *B*	изделие *A*	изделие *B*	1-е пред-приятие	2-е пред-приятие
I	2	1	2	3	360	420
II	1	3	4	5	420	340

С учетом имеющихся ресурсов и возможностей использования предприятиями технологического оборудования определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить на каждом из предприятий, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Задание 2. Используя геометрическую интерпретацию, решить задачи дробно-линейного программирования:

$$1)\ \max L = \frac{8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4},$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 300, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 70, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 340, \\ x_1, \ldots, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

$$2)\ \max L = \frac{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 + 8x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 120, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 320, \\ x_1, \ldots, x_6 \ge 0. \end{cases}$$

$$3)\ \max L = \frac{5x_1 + x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 5x_5 + x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}$$

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + 3x_4 + x_5 \le 40, \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_6 = 20, \\ &3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 \ge 30, \\ &x_1, \ldots, x_6 \ge 0. \end{aligned}$$

$$4)\ \max F = \frac{5*,\ + 3x,}{x_1 + 3x_2}$$

$$\begin{aligned} &2x_1 + 3x_2 - x_3 = 12, \\ &-x_1 + 6x_2 + x_4 = 18, \\ &x_1 - 3x_2 + x_5 = 3, \\ &x_1, x_2, \ldots, x_5 \ge 0. \end{aligned}$$

$$5)\ \min F = \frac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2}$$

$$\begin{aligned} &2x_1 - 4x_2 \le 12, \\ &-x_1 + 2x_2 \le 8, \\ &x_1 + x_2 \ge 10, \\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

$$6)\ \max F = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2},$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задание 3. Решить задачу параметрического программирования:

$$\max F = 2x_1 + (3+4t)x_2,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 - x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ -0{,}5 \le t \le 0. \end{cases}$$

Задание 4. Поставить задачу. Пусть для производства трех видов изделий предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода каждого вида сырья определяются матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Предприятие может использовать сырья I вида не более 20 ед., II вида — не более 42 ед., III вида — не более 36 ед. Цена продукции каждого вида линейно зависит от некоторого параметра t и эта зависимость соответственно имеет вид $2+t$, $12-t$, $6+t$. Для каждого значения параметра $0 \le t \le 10$ определить максимальную выручку.

Задание 5. Поставить задачу. Пусть для производства n видов продукции, сбыт которой обеспечен, предприятие использует m видов ресурсов. Норма расхода ресурса i-го вида на единицу продукции j-го вида равна a_{ij} ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$). Известна также прибыль от реализации единицы продукции j-го вида, равная c_j ($j = 1, \ldots, n$). Предприятие может использовать не более $b_i' + b_i''t$ ($i = 1, \ldots, m$) единиц i-го вида ресурса, где t — некоторый параметр, значение которого принадлежит промежутку изменения (α, β). Для каждого значения t определить план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Задание 6. Поставить задачу. Пусть на предприятии m видов продукции могут производиться n технологическими способами. Потребность в продукции каждого вида определяется числами b_j ($i = 1, \ldots, m$). Количество i-й продукции, изготавливаемой j-м технологическим способом в единицу времени, равно $a_{ij}' + a_{ij}''t$, где t — некоторый параметр, ($\alpha \le t \le \beta$).

Для каждого значения параметра t определить план производства продукции, при котором необходимое количество продукции каждого вида будет изготовлено за минимальное время.

ГЛАВА 4

ОПТИМИЗАЦИЯ НА ГРАФАХ

Коль строить что-нибудь желание придет.
То прежде план составив, мы затем
Свой замысел рисуем на бумаге,
И лишь увидев дома очертанья.
Должны подумать о его цене.

В. Шекспир

Две стрелки насажены на одну ось н в некоторый момент времени совмещены. Одна из стрелок описывает крут за 12 часов, а другая за 16 часов. Через какое время стрелки совместятся опять?

Старинная задача

4.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Наука, занимающаяся графическими представлениями, — геометрия из-за своей наглядности получила широкое распространение уже в древности. Так, задолго до жившего в VI в. до н. э. Пифагора была известна теорема, которая позже стала носить его имя. Наглядность геометрии широко используют в наше время, в том числе при анализе больших технических и организационных систем, в которых используют теорию графов.

Граф — совокупность вершин и ребер — универсальное средство наглядного представления достаточно разнообразных задач (рис. 15а).

Разнообразные сочетания различных ребер и вершин представляют многообразие возможных графов и их применения. Граф, в котором вершины — прямоугольники и направления ребер не заданы, описывает *блок-схему* (или *структуру) технической системы* (рис. 15б). Рисунок 15в — *граф-дерево* (например, описание метода ветвей и границ) — многоуровневая иерархическая система, в которой все вершины

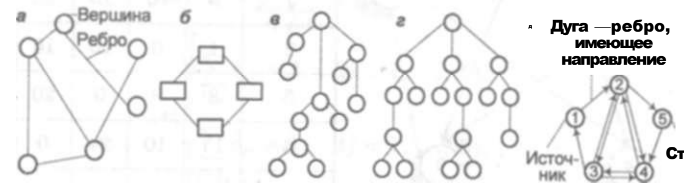


Рис. 15

распределены по нескольким уровням. Рисунок 15д – граф с дугами, изображающими связь между вершинами, — *сеть.*

Сетями представляют различные задачи, в которых исследуют перемещение или выполнение работ во времени. Сеть характеризуется структурой и параметрами дуг. Структура (топология) сети показывает, какие вершины связаны между собой, и направление связывающих их дуг.

Каждую вершину сети нумеруют порядковым номером. Начальную 1 вершину в описании движения потоков называют источником, конечную — стоком.

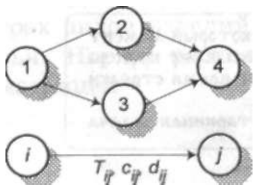


Рис. 16

Дугу (рис. 16) обозначают двойной индексацией 1-2; 3-4 и т. д. В общем случае дугу обозначают ***i-j,*** где i — номер вершины, из которой исходит дуга; у — номер вершины, в которую входит дуга. Каждая дуга имеет свою характеристику: ***tij*** — продолжительность движения по дуге ***i-j; Cц*** — стоимость перемещения; ***dij*** — пропускная способность дуги и т. д.

Зная топологию сети и ее параметры, можно решать самые разнообразные, часто встречающиеся задачи оптимизации.

4.2. ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Пример 1. Пусть имеются пять пунктов, соединенных между собой дорогами так, что из любого пункта можно проехать в любой другой пункт (рис. 17). Известно время перевозки из пункта i в пункт у (табл. 24).

Требуется найти такой маршрут, начинающийся в данном пункте, проходящий через все пункты и заканчиваю-

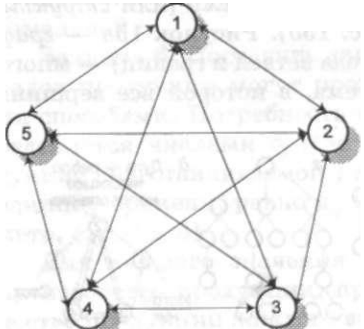


Рис. 17

Таблица *24*

Из пункта *i*	В пунктУ				
	1	2	3	4	5
1	0	10	25	25	10
2	1	0	10	15	2
3	8	9	0	20	10
4	14	10	24	0	15
5	10	8	25	27	0

щийся в пункте выезда, чтобы его продолжительность была наименьшей.

Решение. Для решения этой задачи необходимо составить математическую модель. Введем обозначения: i и j — номера пунктов выезда и въезда; t_{ij} — время переезда из пункта i в пункт j. Из таблицы 24 видно, что t_{ij} в общем случае может быть не равно времени переезда в обратном направлении $t_{ij} \neq t_{ji}$ (например, когда один пункт на вершине горы, а другой — у ее подножия). Введем булевы переменные:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если из пункта } i \text{ торговец переедет в пункт } j, \\ 0, & \text{если не поедет.} \end{cases}$$

Составим модель (рис. 18). Из п. 1 можно выехать в любой из п. 2 или 5, или 3, или 4, или остаться в п. 1. Но при этом можно выехать только в одном единственном направлении. Это условие можно записать так:

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} + \delta_{15} = 1, \text{ или}$$

$$\sum_{j=1}^{5} \sigma_{1j} = 1, \text{ или для произвольного } i\text{-го пункта}$$

$$\sum_{j=1}^{5} \sigma_{ij} = 1 \; (i = 1, \ldots, 5).$$

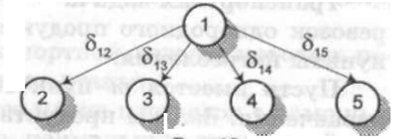


Рис. 18

Эти зависимости обеспечивают выполнение условия, что из каждого пункта выезд производится только один раз и только в одном направлении.

Условие въезда в п. 1 аналогично условию выезда из п. 1 (рис. 18). Требование минимальной продолжительности маршрута запишется в виде целевой функции:

$$\min L = t_{11}\delta_{11} + t_{12}\delta_{12} + t_{13}\delta_{13} + t_{14}\delta_{14} + \\ + t_{15}\delta_{15} + t_{21}\delta_{21} + t_{22}\delta_{22} + \ldots + t_{55}\delta_{55},$$

где t_{ij} берутся из исходной таблицы, а δ_{ij} — искомые переменные.

Тогда всю задачу можно сформулировать:

$$\min L = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} t_{ij}\delta_{ij},$$

$$(*) \begin{cases} \sum_{j=1}^{5} \delta_{ij} = 1 & (i = 1, \ldots, 5), \\ \sum_{i=1}^{5} \delta_{ij} = 1 & (j = 1, \ldots, 5), \\ \delta_{ij} = [0;1] & (i, j = 1, \ldots, 5). \end{cases}$$

В результате решения системы (*) получим (рис. 19) следующие значения Sft = 5°2 = 6°3 = 5°4 = 5°! - 1, остальные 88 - 0;

$$\min L = 10 + 8 + 10 + 20 + 14 = 62.$$

Переходя от частной к общей постановке, задачу коммивояжера можно сформулировать как:

$$\min L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}\delta_{ij},$$

$$(*)\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{5} \delta_{ij} = 1 & (i = 1, \ldots, n), \\ \sum\limits_{i=1}^{5} \delta_{ij} = 1 & (j = 1, \ldots, n), \\ \delta_{ij} = [0;1] & (i, j = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

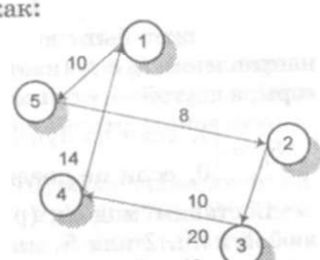


Рис. 19

4.3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Транспортная задача — это задача о выборе плана перевозок однородного продукта из пунктов производства в пункты потребления.

Пусть имеется m пунктов отправления и n пунктов назначения. Запасы продукта в пунктах отправления обозначим через a_i, потребность в продукте в пункте потребления — b_j. Расходы на доставку единицы продукта из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения равняются C_{ij}.

Балансовое условие производства и потребления имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Требуется определить x_{ij} — количество продукта, доставляемого от i-го пункта отправления к j-му пункту потребления. При этом обязательными условиями являются: необходимость вывоза всего произведенного продукта, необходимость удовлетворения всех потребителей, оптимальный план доставки продукта должен обеспечить минимум общей суммы затрат на доставку. Экономико-математическая модель задачи:

$$\min L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & (i = 1, \ldots, m), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j = 1, \ldots, n), \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

В рассмотренной ЭММ предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям. Такая модель называется **закрытой**. Если это условие не выполняется, то модель называется **открытой**. Для сведения открытой модели к закрытой вводится или фиктивный пункт отправления, или фиктивный пункт назначения.

Транспортная задача может быть решена методами линейного программирования. Однако благодаря особенностям переменных задачи разработаны специальные методы ее решения. Наиболее применяемый из них метод потенциалов.

Согласно методу потенциалов, каждому i-му пункту отправления устанавливается потенциал U_i, который можно интерпретировать как цену продукта в пункте отправления, а каждому j-му пункту назначения устанавливается потенциал V_j, который можно условно принять как цену продукта в пункте назначения. В простейшем случае цена продукта в пункте назначения равна его цене в пункте отправления плюс транспортные расходы на его доставку, т. е. $V_j = U_i + c_{ij}$.

Алгоритм решения транспортной задачи **методом потенциалов** включает следующие этапы:

1) определение начального плана перевозок с помощью метода северо-западного угла, наименьших стоимостей или аппроксимации Фогеля;

2) построение системы потенциалов на основе равенства $V_j = U_i + c_{ij}$;

3) проверка начального плана на оптимальность, и в случае его неоптимальности реализация циклов перераспределения плана перевозок.

Третий этап повторяется до тех пор, пока план перевозок не станет оптимальным.

Пример 2. Пусть имеется 3 поставщика и 4 потребителя. Запасы продукта у поставщиков, спрос потребителей и транспортные расходы на доставку единицы продукта от i-го поставщика к j-му потребителю заданы (табл. 25).

Таблица 25

Поставщик	Потребитель				Запас
	1	2	3	4	
1	3	5	6	2	170
2	6	4	7	5	250
3	5	4	6	5	180
Спрос	150	230	160	60	600

Требуется составить такой план перевозки, чтобы обеспечить минимум общей суммы транспортных расходов.

Решение. Обозначим x_{ij} — количество продукта, доставляемого от i-го поставщика к j-му потребителю. Тогда модель:

$$\min L = 3x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 2x_{14} + 6x_{21} + 4x_{22} + $$
$$+ 7x_{23} + 5x_{24} + 5x_{31} + 4x_{32} + 6x_{33} + 5x_{34},$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 170, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 250, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 180, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 230, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 160, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 60. \end{cases}$$

Определим начальный план перевозок с помощью метода северо-западного угла, по которому транспортная матрица заполняется слева направо и сверху вниз. Потребность первого потребителя удовлетворяется за счет первого поставщика. Если потребности оказались выше возможностей первого поставщика, то подключаем второго поставщика. Если запасы первого поставщика больше потребностей первого потребителя, то остаток первого поставщика передаем второму потребителю и т. д. (табл. 26).

Мы должны заполнить $m + n - 1$ клеток. Если число заполненных клеток меньше $m + n - 1$ (случай вырождения), то недостающие клетки выбираются произвольно и заполняются нулями. Это так называемые условные поставки.

Первоначальный план содержит шесть перевозок: от первого поставщика — 150 ед. к первому потребителю и 20 ед. ко второму; от второго поставщика — 210 ед. ко второму и 40 ед. к третьему; от третьего поставщика — 120 ед. к третьему потребителю и 60 ед. к четвертому.

Таблица 26

Поставщик		Потребитель 1	2	3	4	Запас
		$V_1 = 3$	$V_2 = 5$	$V_3 = 8$	$V_4 = 7$	
1	$U_1 = 0$	3 / 150	5 / 20	6 / 6	2 / 2	170
2	$U_2 = 1$	6 / 7	4 / 210	7 / 40	5 / 6	250
3	$U_3 = 2$	5 / 7	4 / 6	6 / 120	5 / 60	180
Спрос		150	230	160	60	600

Построим систему потенциалов на основе равенства

$$V_j = U_i + c_{ij}.$$

Присвоим первому поставщику потенциал $U_1 = 0$. От первого поставщика продукт направляют первому и второму потребителям, следовательно, $V_1 = U_1 + c_{11} = 0 + 3 = 3$; $V_2 = 0 + 5 = 5$. Зная потенциал второго потребителя, найдем потенциал второго поставщика $U_2 = V_2 - c_{22} = 5 - 4 = 1$. Потенциал третьего потребителя $V_3 = 1 + 7 = 8$. Потенциал третьего поставщика $U_3 = 8 - 6 = 2$. Потенциал четвертого потребителя $V_4 = 2 + 5 = 7$. Вычисленные потенциалы помещаем в таблицу 27.

Проверим первоначальный план на оптимальность. План считается оптимальным, если для всех свободных ячеек выполняется условие

$$U_i + c_{ij} \geq U_j.$$

Осуществляем проверку:

$U_1 + c_{13} = 0 + 6 = 6 < 8$ — не выполняется, т. е. если бы продукт отправлялся от первого поставщика к третьему потребителю, то его цена у первого поставщика была бы ниже, чем в первоначальном плане.

$$U_1 + c_{14} = 0 + 2 = 2 < 7 \text{ — не выполняется}$$
$$U_2 + c_{11} = 1 + 6 = 7 \geq 3$$
$$U_2 + c_{14} = 1 + 5 = 6 < 7 \text{ — не выполняется}$$
$$U_3 + c_{11} = 2 + 5 = 7 \geq 3$$
$$U_3 + c_{12} = 2 + 4 = 6 \geq 5$$

Рассчитанные значения заносятся в свободные ячейки таблицы 27.

Таблица 27

Итерация 1. Целевая функция = 2590.

Поставщик		Потребитель 1	2	3	4	Запас
		$V_1 = 3$	$V_2 = 0$	$V_3 = 3$	$V_4 = 2$	
1	$U_1 = 0$	3 / 150	5 / 5	6 / 6	2 / 20	170
2	$U_2 = -4$	6 / 2	4 / 230	7 / 20	5 / 1	250
3	$U_3 = -3$	5 / 2	4 / 1	6 / 140	5 / 40	180
Спрос		150	230	160	60	600

4-2917

Для улучшения плана (целевая функция = 2690) необходимо переместить перевозку в ячейку, вде условие оптимальности нарушено больше всего, т. е. разность *Vj - (U + Су)* максимальна (ячейка 1.4).

Перемещение производится так, чтобы по отношению к выбранной ячейке образовать связку. Для этого необходимо провести замкнутую ломаную линию, состоящую из горизонтальных и вертикальных линий, в которой одной из вершин полученного многоугольника является свободная ячейка, а остальные вершины должны находиться в занятых ячейках.

Далее каждой ячейке в связке поочередно присваиваются знаки плюс и минус, начиная со свободной. Из ячеек со знаком минус перемещаем перевозки в ячейки со знаком плюс. Чтобы не получить отрицательных перевозок, перемещаем наименьшее количество продукта, которое находится в ячейках связки со знаком минус.

Последовательное улучшение плана представлено в таблицах 27-29.

Таблица 28

Итерация 2. Целевая функция = 2570.

Поставщик		Потребитель 1	2	3	4	Запас
		$V_1 = 3$	$V_2 = 1$	$V_3 = 3$	$V_4 = 2$	
1	$U_1 = 0$	3 / 130	5 / 5	6 / 6	2 / 40	170
2	$U_2 = -3$	6 / 20	4 / 230	7 / 4	5 / 2	250
3	$U_3 = -3$	5 / 2	4 / 1	6 / 160	5 / 20	180
Спрос		150	230	160	60	600

Таблица 29

Итерация 3. Целевая функция = 2550.

Поставщик		Потребитель 1	2	3	4	Запас
		$V_1 = 3$	$V_2 = 1$	$V_3 = 4$	$V_4 = 2$	
1	$U_1 = 0$	3 / 110	5 / 5	6 / 6	2 / 60	170
2	$U_2 = -3$	6 / 20	4 / 230	7 / 4	5 / 2	250
3	$U_3 = -2$	5 / 20	4 / 2	6 / 160	5 / 3	180
Спрос		150	230	160	60	600

ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕВОГО ГРАФИКА

Метод оценки и проверки планов *(PERT)* и метод критического пути *(CPM)* были разработаны в 1950-х гг. для управления сложными проектами. *CPM* появился в 1957 г. для организации строительства и ремонта химических заводов Дюпона. *PERT* разрабатывался независимо для нужд военно-морского флота и появился в 1958 г.

Алгоритм методов *CPM* и *PERT:*

1) определить основные работы по проекту и их продолжительность;

2) установить связи между работами;

3) вычертить сеть, содержащую все работы;

4) рассчитать критический путь (самый продолжительный).

Главное различие в методах состоит в том, что в *CPM* продолжительность работы — детерминированная величина, а в *PERT* — случайная.

В *PERT* используются три временных оценки для каждой работы: пессимистическая ($t_п$), наиболее вероятная ($t_{нв}$) и оптимистическая ($t_о$). Тогда ожидаемая продолжительность работы определяется как:

$$t_{ож} = \frac{t_п + 4t_{нв} + t_о}{6}.$$

Отклонение времени выполнения работы:

$$\sigma = \left(\frac{t_о - t_п}{6}\right)^2.$$

Сетевой график (сеть) состоит из дуг и узлов (вершин). Дуге соответствует выполняемая работа (обозначается стрелкой); вершине — событие, т. е. состояние перед и после работы (обозначается кружком).

Исходные данные, необходимые для составления сети, представляют в форме таблицы, которая включает последовательность работ и продолжительность выполнения каждой работы (см. табл. 30).

По исходным данным таблицы 30 строится сетевой график (см. рис. 20), на котором числа над дугами показывают продолжительность каждой работы. События будем обозначать порядковыми номерами. Два события отметим особо: начальное — состояние, с которого начинается весь комплекс работ; конечное — состояние, которым завершается комплекс работ.

Таблица 30

Работа	Содержание работы	Следует после работ	Продолжительность	Обозначение
ai	Закупка и доставка оборудования	–	1	1-2
a%	Разработка технологии	–	2	1-3
аз	Монтаж и наладка оборудования	ai	4	2-3
OA	Обучение рабочих-операторов	Ol	3	2-4
аь	Пуск линии в эксплуатацию	*a.2, си*	6	3-4

Таблица 31

Событие	Время наступления
Начало работ	7Л
Оборудование получено	*Ti*
Технология разработана, оборудование отлажено	*Тз*
Персонал обучен, производство запущено	*Та*

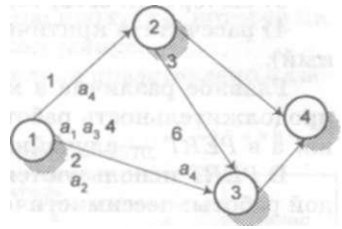


Рис. 20

Работу будем обозначать двумя индексами *i* и /', где *i* — номер события, после которого начинается работа, ***j*** — номер события, которым заканчивается работа (рис. 20 и табл. 31).

Последовательность работ, в которой конец предыдущей работы совпадает по времени с началом последующей, называется путем (табл. 32).

Таблица 32

Путь	Последовательность работ	Продолжительность
1	1-2-4	1 + 3 = 4
2	1-2-3-4	1 + 4 + 6 = 11
3	1-3-4	2 + 6 = 8

Путь наибольшей продолжительности называют критическим (в примере — второй). На критическом пути лежат работы 1-2; 2-3; 3-4.

Увеличение продолжительности работ критического пути приводит к более позднему наступлению конечного события.

Работы, не лежащие на критическом пути, могут быть позже начаты или позже окончены, или иметь большую

продолжительность без изменения срока окончания всех работ.

Величину, на которую можно увеличить продолжительность выполнения такой работы без увеличения времени наступления конечного события, называют **резервом**.

Если руководитель следит за выполнением всех работ в срок, то он должен четко знать и особо контролировать работы критического пути.

В нашем примере критический путь был найден простым перебором всех возможных путей. Исследование модели было словесным, без математической формулировки. Это необходимо для уяснения смысла, но недостаточно для сложных сетей.

Перейдем к формализации. В нашем примере время наступления каждого события может быть найдено по зависимостям

$$T_1 = 0;$$
$$T_2 = T_1 + t_{12} = 0 + 1 = 1.$$

Так как третье событие может наступить после выполнения работ 2–3 и 1–3, запишем:

$$\left.\begin{array}{l} T_3 \ge T_1 + t_{13} = 0 + 2 = 2, \text{ т. е. } T_3 \ge 2 \\ T_3 \ge T_2 + t_{23} = 1 + 4 = 5, \text{ т. е. } T_3 \ge 5 \end{array}\right\} \text{ значит, } T_3 = 5.$$

Аналогично найдем время наступления последнего события:

$$\left.\begin{array}{l} T_4 \ge T_2 + t_{24} = 1 + 3 = 4, \text{ т. е. } T_4 > 4 \\ T_4 \ge T_3 + t_{34} = 5 + 6 = 11, \text{ т. е. } T_4 \ge 11 \end{array}\right| \text{ значит, } T_4 = 11.$$

Окончательное время наступления событий: $T_1 = 0$; $T_2 = 1$; $T_3 = 5$; $T_4 = 11$ (рис. 21).

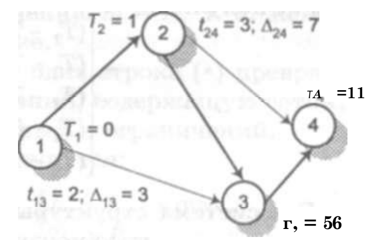


Рис. 21

Из рисунка 21 видно, что резерв работы 1–3, который будем обозначать $\Delta_{13} = 5 - 2 = 3$. Значит работа 1–3 может быть начата не в начальный момент времени, а спустя 3 ед. времени, или продолжаться на 3 ед. больше, чем первоначально предполагалось, т. е. может длиться 2 + 3 = 5 ед. без увеличения момента наступления конечного события 4.

Аналогично $\Delta_{24} = T_4 - (T_2 + t_{24}) = 11 - (1 + 3) = 7$, т. е. продолжительность работы 2–4 может быть увеличена на 7 ед. Очевидно, что для работ критического пути резерв времени равен 0, т. е. $\Delta_{12} = \Delta_{23} = \Delta_{34} = 0$.

Для третьего события можно записать

$$T_3 = T_1 + t_{13} + \Delta_{13}. \text{ Отсюда } (T_3 - T_1) - \Delta_{13} = t_{13}.$$

Выражение $(T_3 - T_1)$ записано в скобках, чтобы было наглядно видно, что это интервал времени между двумя последовательными событиями. И этот интервал за вычетом резерва Δ_{13} равен продолжительности работы 1–3. В этой зависимости нам задана продолжительность работы $t_{13} = 2$ (правая часть уравнения), остальные величины — искомые переменные. Если их обозначить:

$$T_3 = x_3;\ \Delta_{13} = x_{13};\ T_1 = x_1;\ t_{13} = b_{13},$$

то можно записать:

$$(x_3 - x_1) - x_{13} = b_{13}$$

и получить линейное уравнение с тремя неизвестными.

Если записать аналогичные зависимости для всех событий и работ, входящих в нашу сеть, то получим систему:

$$\begin{cases} (T_2 - T_1) - \Delta_{12} = t_{12}, \\ (T_3 - T_1) - \Delta_{13} = t_{13}, \\ (T_3 - T_2) - \Delta_{23} = t_{23}, \\ (T_4 - T_2) - \Delta_{24} = t_{24}, \\ (T_4 - T_3) - \Delta_{34} = t_{34}. \end{cases}$$

Эта система описывает топологию (структуру) нашей сети. Следовательно, сеть может быть представлена не только графически, но и в виде аналитических уравнений, которые можно ввести в ПЭВМ.

Если вместо t_{ij} подставить их известные (заданные) значения, получим:

$$\begin{cases} (T_2 - T_1) - \Delta_{12} = 1, \\ (T_3 - T_1) - \Delta_{13} = 2, \\ (T_3 - T_2) - \Delta_{23} = 4, \\ (T_4 - T_2) - \Delta_{24} = 3, \\ (T_4 - T_3) - \Delta_{34} = 6. \end{cases}$$

Эта система структуры сети содержит пять линейных уравнений с девятью неизвестными. Значит, она имеет бесчисленное множество решений. Чтобы ее решить, надо добавить граничные условия и целевую функцию.

При этом возможны две постановки задач оптимизации.

Первая постановка: задаемся временем начала работ, т. е. значением T_1, например $T_1 = 0$, и стремимся закончить комплекс работ как можно раньше:

$$\begin{cases} L_1 = T_4 \to \min, \\ T_1 = 0. \end{cases}$$

Вторая постановка: задан срок завершения всех работ, например $T_4 = 15$, и нас интересует как можно позже начать работы, но чтобы непременно уложиться в срок:

$$L_2 = T_1 \to \max,$$
$$T_4 = 15.$$

Обе постановки — это задачи линейного программирования, которые можно решить (табл. 33).

Таблица 33

Постановка	Целевая функция	Граничные условия	T_1	T_2	T_3	T_4	Δ_{12}	Δ_{13}	Δ_{23}	Δ_{24}	Δ_{34}
1	$T_4 \to \min$	$T_1 = 0$	0	1	5	11	0	3	0	7	0
2	$T_1 \to \max$	$T_4 = 15$	4	5	9	15	0	3	0	7	0

Из таблицы видно, что резерв Δ_{ij} не зависит от постановки задачи. Времена же окончания работ в первой постановке и начала работ во второй постановке определяются заданными граничными условиями.

Теперь перейдем к определению критического пути и других параметров сети, заданной в общей постановке.

В общем виде топология сети запишется:

$$(*)\ (T_j - T_i) - \Delta_{ij} = t_{ij} \text{ (для всех } i, j).$$

Если S — число событий, R — число работ, то, как видно из (*), система, описывающая сеть, будет включать n переменных, где $n = S + R$, так как каждому i-му событию соответствует неизвестная T_i, а каждой i, j-й работе — неизвестная Δ_{ij}. А число ограничений $m = R$, т. е. каждой работе соответствует ограничение.

Поэтому в начальных сетях одна строка (*) превращается в систему линейных уравнений, содержащую сотни, а может быть, и тысячи неизвестных и ограничений.

Тогда общие постановки запишутся:

$$\begin{cases} L_1 = T_n \to \min, \\ T_1 \ge T_{1пл}, \end{cases} \qquad \begin{cases} L_2 = T_1 \to \max, \\ T_n \ge T_{nпл}, \end{cases}$$

где $T_{1пл}$, $T_{nпл}$ — заданные плановые сроки начала и окончания работ сети.

Например, для графика (см. рис. 22) из 11 событий и 20 работ (всего лишь) первая постановка при $T_1 = 0$ будет иметь вид:

$$\begin{cases} L_1 = T_{11} \to \min, \\ (T_j - T_i) - \Delta_{ij} = t_{ij}\ (i = 1, \ldots, 10;\ j = 2, \ldots, 11), \\ T_1 = 0. \end{cases}$$

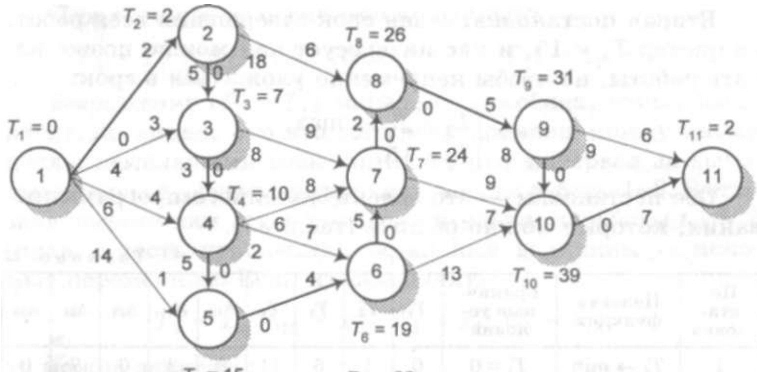


Рис. 22

В результате решения задачи на ПЭВМ определены критический путь, сроки начала работ и событий, резервы работ, приведенные под стрелками. Решение этой задачи вручную очень трудоемко!

4.5. ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ

Пусть имеется некоторая сеть с заданной пропускной способностью дуг *dij* — из i-го узла в у'-й узел. Необходимо так организовать перевозки, чтобы перевезти максимальное количество продукта из начального узла сети в конечный узел.

Обозначим *Xn* — количество перевозимого продукта из i-го пункта в у'-й пункт (£, у = 1, *n).*

Экономико-математическая модель задачи:

$$\max L = \sum_{i=1} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} x_{kl} - \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = 0, \\ 0 \le x_{ij} \le d_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n). \end{cases}$$

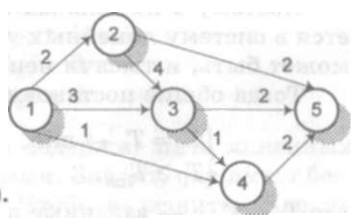


Рис. 23

Ограничение означает, что количество поступившего продукта должно быть равно количеству вывезенного продукта.

Пример 3. Определить максимальный поток в сети (рис. 23).

Решение. С помощью программы «Сетевое моделирование *(NET)»* получили, что максимальный поток равен 6 ед.

4.6. ЗАДАЧА О КРАТЧАЙШЕМ ПУТИ

Пусть имеется сеть с источником s и стоком t. Известно расстояние между i-м и j-м узлами — c_{ij}. Необходимо найти кратчайший путь от начального узла до конечного узла.

Обозначим через x_{ij} булеву переменную, которая равна 1, если узел принадлежит кратчайшему пути, и 0 — в противном случае.

Экономико-математическая модель задачи:

$$\min L = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{1j} - \sum_{j=1}^{n} x_{j1} = 1, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = 0 \quad (i \ne s; i \ne t), \\ \sum_{j=1}^{n} x_{nj} - \sum_{j=1}^{n} x_{jn} = -1, \\ x_{ij} \ge 0 \quad (i, j = 1, \dots, n). \end{cases}$$

Первое ограничение означает, что единица потока вытекает из источника *s;* второе ограничение — что единица потока втекает в сток г; третье ограничение гарантирует сохранение потока при протекании по сети.

Пример 4. Определить кратчайшее расстояние в сети (рис. 23) между первым и пятым пунктами.

Решение. С помощью программы «Сетевое моделирование *(NET)»* получили, что кратчайшее расстояние от первого до пятого пункта равно 3 ед. по маршруту 1-4-5.

4.7. КОНТРОЛЬНЫЙ ВОПРОС

Пусть имеется 4 поставщика и 3 потребителя. Запасы продукта у поставщиков, спрос потребителей и транспортные расходы на доставку единицы продукта от i -го поставщика к у-му потребителю заданы (табл. 34).

Таблица 34

Поставщик	Потребитель			Запас
	1	2	3	
1	6	8	7	220
2	9	5	1	190
3	5	4	7	250
4	9	7	5	100
Спрос	180	90	250	

Требуется составить такой план перевозки, чтобы обеспечить минимум общей суммы транспортных расходов.

ГЛАВА 5

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Не место красит человека, а человек место.

Поговорка

Y отцл спросили, сколько лет его двум сыноккялл. Отец ответил, что если к произведению чисел, ОЗНАЧАЮЩИХ ИХ ГОДА, ПРИБАВИТЬ сул\л*у этих чисел, то кудет 14. Сколько лет СЫНОВЬЯМ?

СТАРИННАЯ ЗАДАЧА

5.1. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИИ

В общем виде задача о назначениях формулируется следующим образом.

Пусть имеются n работ и n кандидатов для их выполнения. Назначению i-го кандидата ($i = 1, \ldots, n$) на j-ю работу ($j = 1, \ldots, n$) соответствует определенная эффективность (прибыль, производительность) или затраты какого-либо ресурса c_{ij}. Требуется найти такие назначения кандидатов на все работы, которые обеспечат наибольшую эффективность, т. е. минимум суммарных затрат или максимум прибыли (производительности). При этом каждого кандидата можно назначить только на одну должность и каждая работа может быть выполнена только одним кандидатом.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\max(\min) L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & (i = 1, \ldots, n), \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & (j = 1, \ldots, n), \\ x_{ij} = \{0 \wedge 1\} & (i, j = 1, \ldots, n), \end{cases}$$

где x_{ij} — искомая переменная:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й кандидат распределяется на } j\text{-ю работу;} \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

В такой постановке данная задача относится к классу комбинаторных, решение которых путем прямого перебора невозможно при достаточно больших n, так как число вариантов назначений составляет $n!$.

5.2. ВЕНГЕРСКИЙ МЕТОД

Известны несколько различных методов решения комбинаторных задач, из которых наиболее распространен **венгерский метод.**

Основная идея этого метода: оптимальность решения задачи не нарушается при уменьшении (увеличении) элементов строки (столбца) на одну и ту же величину $d_i (d_j)$. Решение считают оптимальным, если все измененные искусственно затраты $c'_{ij} \geq 0$ ($i, j = 1, \ldots, n$) и можно отыскать такой набор x_{ij}, что

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij} = n.$$

Пример 1. Пусть для монтажа четырех объектов ($n = 4$) требуется четыре крана ($n = 4$). Известно время монтажа каждым i-м краном каждого j-го объекта (табл. 35).

Таблица 35

Код крана (0	Затраты времени на монтаж по объектам *(cij)*				a,	*d,*
	1	•1	3	4		
1	3	7	5	8	1	3
2	2	Л	4	5	1	2
3	4	7	2	8	1	2
4	9	7	3	8	1	3
b>	1	1	1	1	–	–

Необходимо так распределить краны по объектам, чтобы суммарное время монтажа всех объектов было минимально.

Решение. Соответственно исходным данным задача формализуется:

$$\min L = 3x_{11} + 7x_{12} + 5x_{13} + 8x_{14} + 2x_{21} + \ldots + 8x_{44},$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1, \\ \ldots \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1, \\ \ldots \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1, \\ x_{ij} = \{0 \wedge 1\} \quad (i, j = 1, \ldots, 4). \end{cases}$$

Алгоритм метода включает следующие основные этапы (шаги).

Шаг 1. Получение нулей в каждой строке.

1.1. Находят наименьший элемент d_i, в каждой строке (см. табл. 35), который вычитают из всех ее элементов и получают новую матрицу (табл. 36).

Таблица 36

i	c_{ij}				a_i
	1	2	3	4	
1	0 = (3-3)	4 = (7-3)	2	5	1
2	0	2	2	3	1
3	2	5	0	6	1
4	6	4	0	5	1
b_j	1	1	1	1	–
d_i	0	2	0	3	

1.2. Аналогично в каждом столбце определяют его минимальный элемент d_j, который вычитают из всех его элементов с получением следующей матрицы (табл. 37).

Таблица 37

i	c_{ij}				a_i
	1	2	3*	4	
1	0*	2	2	2	1
2	0	0*	2	0	1
3	2	3	0*	3	1
4	6	2	0	2	1
b_j	1	1	1	1	

Шаг 2. Поиск оптимального решения.

2.1. Рассматривается одна из строк таблицы 37, имеющая меньшее число нулей (строка 1); отмечается звездочкой (*) один из нулей этой строки (c_{11} = 0) и зачеркиваются все остальные нули этой строки и того столбца, в котором находится этот нуль (c_{21}).

2.2. Аналогичные операции выполняют последовательно для всех строк.

2.3. Если назначения, которые получены при всех нулях, отмеченных звездочками, являются полными, т. е. число нулей, отмеченных точками, равно n, то решение является оптимальным. В противном случае переходят к шагу 3.

Шаг 3. Поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих нули.

3.1. Отмечают звездочкой:

3.1.1. все строки, в которых нет ни одного отмеченного звездочкой нуля (строка 4, табл. 37);

3.1.2. все столбцы, содержащие перечеркнутый нуль хотя бы в одной из отмеченных точкой строк (столбец 3, табл. 37);

3.1.3. все строки, содержащие отмеченные звездочкой нули хотя бы в одном из отмеченных звездочкой столбцов (строка 3, табл. 37);

3.2. Шаги 3.1.2) и 3.1.3) повторяют поочередно до тех пор, пока есть что отмечать.

3.3. После этого зачеркивают каждую непомеченную строку и каждый помеченный столбец (строки 1, 2 и столбец 3, табл. 37) с целью провести минимальное число горизонтальных и вертикальных прямых, пересекающих по крайней мере один раз все нули.

Шаг 4. Перестановка некоторых нулей.

4.1. Определяют наименьшее число из тех клеток, через которые не проведены прямые (не зачеркнуты), т. е. число 2 в таблице 37.

Это число вычитают из каждого числа невычеркнутых столбцов и прибавляют к каждому числу вычеркнутых строк с получением таблицы 38.

Если эти операции не приводят к оптимальному решению, то цикл повторяется, начиная с шага 2 до получения оптимума.

В данном случае число нулей, отмеченных точкой, оказалось равным 4, значит, назначение является полным, а решение оптимальным, т. е.

$$x_{11}^0 = x_{22}^0 = x_{33}^0 = x_{44}^0 = 1;$$
$$\min L = c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{44} = 3 + 4 + 2 + 8 = 17.$$

Таблица 38

i	j				a_i
	1	2	3*	4	
1	0*	2	4	2	1
2	θ	0*	4	θ	1
3	θ	1	0*	1	1
4	4	θ	θ	0*	1
b_j	1	1	1	1	–

5.3. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Поставить и решить задачу с помощью *QSB*. На предприятии имеется 5 видов оборудования, каждый из которых может выполнять 5 различных операций (табл. 39). Нормы времени на выполнение каждой операции заданы в таблице. Определить, какую операцию закрепить за каким оборудованием с тем, чтобы суммарное время выполнения операций было минимальным.

Таблица 39

Оборудование	Нормы времени по операциям				
	1	2	3	4	5
1	5	3	4	6	7
2	6	2	6	4	5
3	4	3	5	6	6
4	3	4	3	4	3
5	5	6	3	2	5

Задание 2. Как изменится постановка задачи, если данные из таблицы интерпретировать как производительность оборудования?

ГЛАВА 6

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Исследование операций как средство решения задач организационного управления можно рассматривать и как науку, и как искусство.

Х. Таха

Ревятд пилят вревнд нд .метровые куски. Отпнливднне одного такого кускл зднил\дет одну минуту. Зл сколько минут они рлспилят вревно длиной 5 метров?

СТАРИННАЯ ЗАДАЧ*

6.1. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачи нелинейного программирования — большой класс разнообразных задач, из которых будем рассматривать только сводящиеся к задачам линейного программирования.

Ранее в задачах линейного программирования полагалось, что себестоимость, цена и другие показатели эффективности на единицу продукции не зависят от изменения объема производства. Однако в общем случае зависимости между переменными в ограничениях и целевой функции не могут быть линейными. Например, себестоимость единицы продукции снижается при увеличении объема производства.

Задачи, в которых зависимости между переменными в целевой функции и/или в ограничениях нелинейны, называют задачами нелинейного программирования.

Если обозначить целевую функцию и ограничения через обобщенную функцию *h(xj),* то все многообразие задач нелинейного программирования можно свести к классификации (см. табл. 40).

В общем виде задача НЛП состоит в определении максимума (минимума) функции

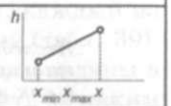
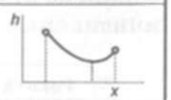
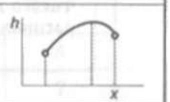
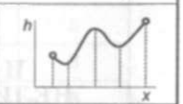
$$f(x_и \quad x_2, \qquad x_n) \qquad (1)$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i & (i = 1, \ldots, k), \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i & (i = k+1, \ldots, m), \end{cases} \qquad (2)$$

где f и g_i — некоторые известные функции n переменных; b_i — заданные числа.

Таблица 40

Отрезок, соединяющий две точки	$\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x}$	Вид функции	Число оптимумов	График
Совпадает	0	Линейная	2	
Выше вершины	> 0	Выпуклая вниз	3	
Ниже вершины	< 0	Выпуклая вверх (вогнутая вниз)	3	
По обе стороны от вершины	Меняет знак	Смешанная	Несколько	

Здесь имеется в виду, что в результате решения задачи будет определена точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, координаты которой удовлетворяют соотношениям (2), и такая, что для всякой другой точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей условиям (2), выполняется неравенство

$$f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \geq f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при max целевой функции или

$$f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при min целевой функции.

Если f и g_i — линейные функции, то задача (1), (2) — задача линейного программирования.

Соотношения (2) образуют систему ограничений и включают условия неотрицательности переменных, если такие имеются. Условия неотрицательности переменных могут быть заданы и непосредственно.

Нелинейные задачи решаются с помощью метода кусочно-линейной аппроксимации или метода множителей Лагранжа. В задачах квадратичного программирования применяется метод Била, Баранкина–Дорфмана, градиентные методы (метод Франка–Вулфа, штрафных функций, метод возможных направлений). В градиентных методах итерационный процесс осуществляется до того момента, пока градиент функции $f(x)$ в очередной точке x_{k+1} не станет равным нулю или пока $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \varepsilon$ (достаточно малое положительное число, характеризующее точность полученного решения).

6.2
МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Рассмотрим частный случай общей задачи нелинейного программирования (1), (2), предполагая, что система ограничений (2) содержит только уравнения, отсутствуют условия неотрицательности переменных и функции f и g_i — непрерывные вместе со своими частными производными

$$\max(\min)\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n); \tag{1}$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i (i = 1, \ldots, m). \tag{2}$$

В курсе математического анализа задачу (1), (2) называют задачей на условный экстремум или классической задачей оптимизации.

Чтобы найти решение такой задачи, вводят набор переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, называемых **множителями Лагранжа**, и составляют **функцию Лагранжа**:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \\ = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \left[b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right], \tag{3}$$

находят частные производные $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ и $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$, рассматривают систему $n + m$ уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

с $n + m$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Всякое решение системы (4) определяет точку $x = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, в которой может иметь место экстремум функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно, решив систему (4), получают все точки, в которых функция (1) может иметь экстремальные значения. Дальнейшее исследование найденных точек проводят так же, как и в случае безусловного экстремума.

Пример 1. Известен рыночный спрос на определенное изделие в количестве 180 штук. Это изделие может быть изготовлено двумя предприятиями одного концерна по различным технологиям. При производстве x_1 изделий первым предприятием его затраты составят $4x_1 + x_1^2$ руб., а при изготовлении x_2 изделий вторым предприятием они составляют $8x_2 + x_2^2$ руб.

Определить, сколько изделий, изготовленных по каждой технологии, может предложить концерн, чтобы общие издержки его производства были минимальны.

Р е ш е н и е. Задача запишется в виде:

$$\min f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2, \tag{5}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 180, & (6)\\ x_1,\ x_2 \ge 0. & (7) \end{cases}$$

Для нахождения минимального значения функции (5) при условии (6), т. е. без учета требования неотрицательности переменных, составляется функция Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2),$$

вычисляются ее частные производные по x_1, x_2, λ и приравниваются нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0.$$

Отсюда $4 + 2x_1 = 8 + 2x_2$ или $x_1 + x_2 = 2$. Решая это уравнение совместно с $x_1 + x_2 = 180$, находим $x_1^0 = 91$; $x_2^0 = 89$, т. е. получаем координаты точки, подозрительной на экстремум. Используя вторые частные производные, можно показать, что в этой точке функция f имеет условный минимум.

Такой же результат можно получить, если исследование на условный экстремум функции f свести к исследованию на безусловный экстремум функции f_1, полученной из f в результате ее преобразований.

Таким образом, если из уравнения связи $x_1 + x_2 = 180$ найти $x_2 = 180 - x_1$ и подставить это выражение в целевой функции, то получится функция одной переменной x_1:

$$f_1 = 4x_1 + x_1^2 + 8(180 - x_1) + (180 - x_1)^2.$$

Далее из уравнения

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \quad 0$$

можно найти стационарную точку этой функции f_1:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - 8 - 2(180 - x_1) = 0$$

или $4x_1 - 364 = 0$, откуда $x_1^0 = 91$; $x_2^0 = 180 - 91 = 89$. Используя вторые частные производные, устанавливаем, что в данной точке функция f имеет минимальное значение.

6.3. МЕТОД КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Пусть требуется определить максимальное значение вогнутой функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} f_1(x_j), \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Чтобы найти решение задачи (1)–(3) функции $f_j(x_j)$ и $g_{ij}(x_j)$ заменяют кусочно-линейными функциями $\hat{f}_j(x_j)$ и $\hat{g}_{ij}(x_j)$ и переходят к задаче

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_j(x_j), \tag{4}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \hat{g}_{ij}(x_j) \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m), & (5)\\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n). & (6) \end{cases}$$

В задаче (4)–(6) пока не определен вид функций. Чтобы определить их, считают, что переменная x_j может принимать значения из промежутка $[0; \alpha_j]$, где α_j — максимальное значение переменной x_j. Промежуток $[0; \alpha_j]$ разбивается на r_j промежутков с помощью $r_j + 1$ точек так, что $x_{0j} = 0$, $x_{r_j j} = \alpha_j$. Тогда функции $\hat{f}_j(x_j)$ и $\hat{g}_{ij}(x_j)$ можно записать в виде

$$\hat{f}_j(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} f_{kj}, \quad \hat{g}_{ij}(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} g_{kj}, \tag{7}$$

где $f_{kj} = f_j(x_k)$; $g_{kij} = g_{ij}(x_k)$, $(i=1,\ldots,m)$, $x_j = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} x_{kj}$. (8)

Причем

$$\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1, \quad \lambda_{kj} \ge 0 \quad \text{для всех } k \text{ и } j.$$

Подставляя теперь в (4), (5) выражения функций $\hat{f}_j(x_j)$ и $\hat{g}_{ij}(x_j)$ в соответствии с формулой (7), приходят к задаче линейного программирования:

$$\max \hat{F} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} f_{kj} \lambda_{kj}, \tag{9}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} g_{kij} \lambda_{kj} \le b_i, \quad (i = 1, \ldots, m), & (10)\\ \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1, \quad (j = 1, \ldots, n), & (11)\\ \lambda_{kj} \ge 0, \quad (k = 0, \ldots, r_j;\ j = 1, \ldots, n). & (12) \end{cases}$$

Эта задача может быть решена симплекс-методом и точность зависит от принятого шага разбиения промежутка $[0; \alpha_j]$: чем меньше шаг, тем точнее решение.

Пример 2. Решить задачу нелинейного программирования методом кусочно-линейной аппроксимации:

$$\max F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 - 9,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_2 \le 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. В данной задаче целевую функцию F можно представить как сумму двух функций $f_1(x_1) = -x_1^2 + 6x_1 - 9$ и $f_2(x_2) = x_2$, каждая из которых есть функция одной переменной. Следовательно, функция F — сепарабельная.

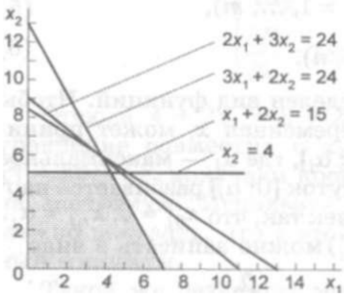


Рис. 24

Здесь нелинейной функцией является только целевая функция. Значит, кусочно-линейной функцией следует заменить только ее. При этом так как функция $f_2(x_2)$ линейная, то аппроксимируется только функция $f_1(x_1)$.

Далее строится область допустимых решений задачи (рис. 24).

Из графика области допустимых решений следует, что переменная x_1 может принимать значения в промежутке $[0; 8]$. Этот промежуток может быть разбит на восемь частей точками: $x_{01} = 0$; $x_{11} = 1$; $x_{21} = 2$; $x_{31} = 3$; $x_{41} = 4$; $x_{51} = 5$; $x_{61} = 6$; $x_{71} = 7$; $x_{81} = 8$. В этих точках вычисляются значения функции $f_1(x_1)$ (табл. 41).

Таблица 41

x_{k1}	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(x_{k1})$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16	-25

По формулам (7), (8) можно найти

$$\hat{f}_1(x_1) = -9\lambda_{01} - 4\lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} - 4\lambda_{51} - 9\lambda_{61} - 16\lambda_{71} - 25\lambda_{81},$$

$$x_1 = 0\lambda_{01} + 1\lambda_{11} + 2\lambda_{21} + 3\lambda_{31} + 4\lambda_{41} + 5\lambda_{51} + 6\lambda_{61} + 7\lambda_{71} + 8\lambda_{81}.$$

Найденные выражения $\hat{f}_1(x_1)$ и x_1 подставляются в исходные данные:

$$\max \hat{F} = -9\lambda_{01} - 4\lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} - 4\lambda_{51} - 9\lambda_{61} - 16\lambda_{71} - 25\lambda_{81} + x_2,$$

$$\begin{cases} 2\lambda_{11} + 4\lambda_{21} + 6\lambda_{31} + 8\lambda_{41} + 10\lambda_{51} + 12\lambda_{61} + 14\lambda_{71} + 16\lambda_{81} + 3x_2 + x_3 = 24, \\ \lambda_{11} + 2\lambda_{21} + 3\lambda_{31} + 4\lambda_{41} + 5\lambda_{51} + 6\lambda_{61} + 7\lambda_{71} + 8\lambda_{81} + 2x_2 + x_4 = 15, \\ 3\lambda_{11} + 6\lambda_{21} + 9\lambda_{31} + 12\lambda_{41} + 15\lambda_{51} + 18\lambda_{61} + 21\lambda_{71} + 24\lambda_{81} + 2x_2 + x_5 = 24, \\ x_2 + x_6 = 4, \\ \lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} + \lambda_{61} + \lambda_{71} + \lambda_{81} = 1, \\ x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0; \quad \lambda_{k1} \ge 0; \quad (k = 0, \dots, 8). \end{cases}$$

Для полученной задачи линейного программирования пять векторов P_{01}, P_3, P_4, P_5, P_6 являются единичными. Значит, ее решение может быть найдено симплекс-методом. Из симплекс-таблицы находят $x_2^0 = 4$, а по найденному λ_{k1} находят $x_1^0 = 3$, $F_{\max} = 4$.

6.4. КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Поставить и решить задачу. Пусть на двух предприятиях холдинга необходимо изготовить 200 изделий некоторой продукции. Затраты, связанные с производством x_1 изделий на первом предприятии, равны $4x_1^2$ руб., а затраты, обусловленные изготовлением x_2 изделий на втором предприятии, составляют $20x_2 + 6x_2^2$ руб.

Определить, сколько изделий на каждом из предприятий следует произвести, чтобы общие затраты на производство необходимой продукции были минимальными.

ГЛАВА 7

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Ученый, подобно Паломнику, должен идти прямой и узкой тропой между Западнями Переупрощения и Болотом Переусложнения.

Р. Беллман

вось.миведернын БОЧОНОК заполнен доверху квасом. Двое должны разделить квас поровну. Но у них есть только два пустых вочонкл, в один из которых входит 5 ведер, а в другой 3 ведра. Спрашивается, как они .могут разделить квас, пользуясь только этими тремя БОЧОНКАМИ?

Стариннаязадача

7.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

До сих пор рассматривались такие задачи оптимизации, в которых принятие решения осуществлялось в один этап. Зависимость рассматриваемого этапа от прошлого и его влияние на будущее не учитывалось.

В реальных задачах управления приходится принимать и реализовывать решения по нескольким этапам. Такие задачи многоэтапной оптимизации называют задачами динамического программирования (ДП), в том числе:

Ш распределение ресурсов, например, ограниченного объема капиталовложений между возможными направлениями их использования по объему и времени;

ш разработка правил управления запасами, устанавливающих момент пополнения и размер пополняемого запаса;

Ш выбор транспортных маршрутов или технологических способов изготовления изделий;

Ш разработка принципов календарного планирования производства.

Пример 1. Пусть установлены возможные варианты транспортной сети из маршрутов, соединяющих исходный пункт 1 с конечным пунктом 10. Все 10 пунктов можно отнести к пяти зонам (этапам). На линиях, соединяющих пункты, поставлено время проезда между соседними пунктами (рис. 25).

Требуется выбрать путь от начального пункта до конечного с минимальным временем.

Аналогичная задача может быть поставлена для оптимизации технологического маршрута изготовления изде-

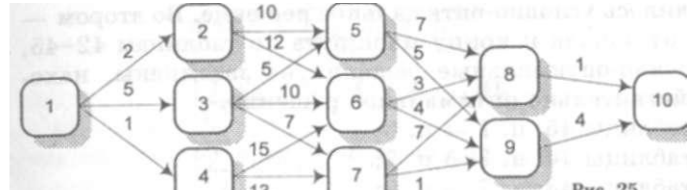


Рис. 25

лия, если на сети маршрутов задаться трудоемкостью или стоимостью каждой технологической операции. Искомый путь может быть найден интуитивно, а затем его можно сравнить с полученным оптимальным решением.

В основе решения задач ДП лежит принцип оптимальности: *на каждом этапе принимается такое решение, которое обеспечивает оптимальность с данного этапа до конца процесса,* т. е. на каждом этапе необходимо принимать решение, просматривая его последствия до самого конца. А так как последовательность решения следует просматривать до конца процесса, то *варианты анализируют, начиная с конца процесса.*

Допустим, мы оказались в зоне IV (пп. 8, 9), из которой надо продвинуться в зону V (п. 10) (табл. 42).

Таким образом, следуя от конца маршрутов, мы сначала определили, через какой пункт двигаться при условии, чтобы оказаться в зоне III, затем при условии, чтобы оказаться в зоне И, и наконец — в зоне I. Следовательно, на первом цикле решения

Таблица 42

Из пп. IV зоны	В п. 10 зоны V	min Tiv-v
8	1	1
9	4	4

Таблица 43

Из пп. III зоны	Через пп. IV зоны		min Гш-v
	8	9	
5	7 + 1	5 + 4	8
6	3 + 1	4 + 4	4
7	7 + 1	1 + 4	5

Таблица 44

	Через пп. III зоны			с 1
	5	6	7	
2	10 + 8	12 + 4	–	16
3	5 + 8	10 + 4	7 + 5	12
4	–	15 + 4	13 + 5	18

Таблица 45

Из пп. I зон²	Через пп. II зоны			с
	2	3	4	
1	2 + 16	5 + 12	1 + 18	17

определилось условно-оптимальное решение. Во втором — следуя от начала к концу маршрута по таблицам 42-45, где условно-оптимальные решения не затемнены, находим действительно оптимальное решение:

Ш из таблицы 45: п. 1 —> п. 3;

Ш из таблицы 44: п. 3 -> п. 7;

Ш из таблицы 43: п. 7 -> п. 9;

Ш из таблицы 42: п. 9 —> п. 10.

7.2. ОБОБЩЕННАЯ СХЕМА ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Пусть имеется ресурс *K,* который требуется вложить в *m* объектов в течение *n* этапов. В результате вложения в i-й объект (i = 1, m) на у-м этапе (у = 1, n) ресурса в размере *Хц* образуется доход, определяемый функцией дохода ***gij(Xij).*** Часть ресурса x_{ij} при этом остается неизрасходованной. Эта часть определяется функцией остатка *(pijiXij).* Известна величина ресурса K_j, распределяемая на каждом у-м этапе.

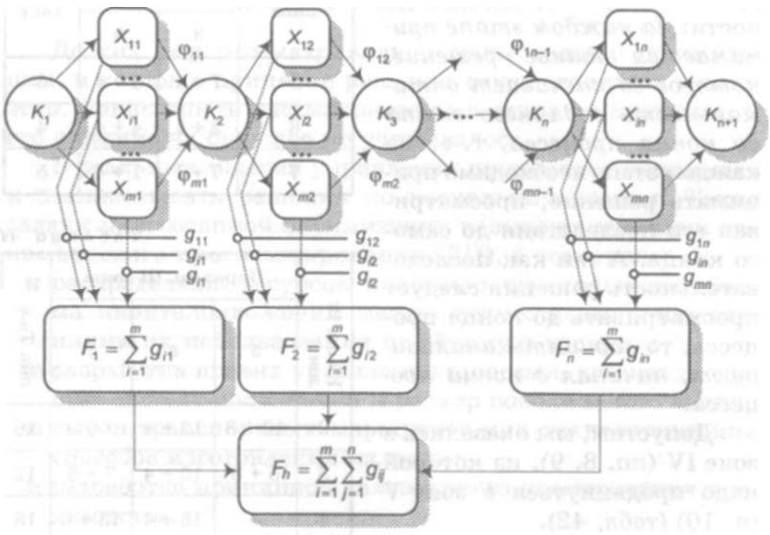


Рис. 26

Требуется определить значения *щ* вложения ресурсов на каждом этапе в каждый объект, чтобы на всех объектах и на всех этапах он был максимальным (рис. 26).

Данная задача аналитически формулируется:

$$\max F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_{ij}),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = k_j, \quad (j = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_{ij}(x_{ij}) = k_{j+1}, \quad (j = 1, \ldots, n),$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n).$$

Принцип оптимальности Беллмана: на каждом этапе необходимо так распределять ресурс, чтобы, начиная с этого этапа и до конца процесса распределения, доход был максимальным.

7.3. ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Условность задач линейного программирования применительно к управлению состоит в оптимизации только для какой-то стационарной ситуации. В действительности задачи управления динамичны, поэтому точнее определять оптимум не для одного момента времени, а последовательно на протяжении длительного периода.

Например, недостаточно определить оптимальный план производства на месяц, вполне вероятно, что в последующие месяцы производство может быть неоптимальным, так как возможности дальнейшего развития не учитывались. Составление ежемесячных оптимальных планов более эффективно с учетом предшествующих периодов, так как годовой оптимальный план будет результатом оптимальных решений, принятых для каждого месяца; причем план каждого последующего месяца должен учитывать решения, принятые в предыдущих.

Динамическое программирование дает возможность принять ряд последовательных решений (многошаговый процесс), обеспечивающих оптимальность развития процесса в целом.

Предположим, что есть некоторые ресурсы x, которые распределяются на два предприятия: на первое y, на второе $x - y$. Пусть в течение определенного периода (например, года) количество y приносит доход (прибыль) $g(y)$, а количество $x - y$ доход $h(x - y)$. Общий доход от вложенных ресурсов составит

$$R_1(x, y) = g(y) + h(x - y).$$

Обозначим через $F_1(x)$ наибольший доход, который могут принести ресурсы x при оптимальном распределении их между предприятиями.

Тогда

$$F_1(x) = \max_{0 \le y \le x}[g(y) + h(x - y)]. \quad (1)$$

Теперь рассмотрим двухшаговый процесс, состоящий из двух периодов (этапов). Так как доход получается вследствие выпуска и реализации продукции, что связано с определенными издержками (затратами ресурсов), то к началу второго периода первоначальная сумма y уменьшится до величины $a \cdot y$ $(0 \le a \le 1)$, а сумма $x - y$ до величины $b \cdot (x - y)$ $(0 \le b \le 1)$. Наибольший доход, который можно получить от суммарного остатка $a \cdot y + b \cdot (x - y)$ в течение второго этапа, равен $F_1[a \cdot y + b \cdot (x - y)]$.

Обозначим через $F_2(x)$ наибольший доход, который может быть получен от суммы x за оба периода. Этот доход равен максимальному значению суммы доходов первого и второго периодов при условии, что начальные для каждого периода ресурсы распределялись наилучшим образом. Иначе

$$F_2(x) = \max_{0 \le y \le x}\{g(y) + h(x - y) + F_1[a \cdot y + b(x - y)]\}. \quad (2)$$

Равенство (2) устанавливает связь между функциями $F_1(x)$ и $F_2(x)$.

Рассматривая n-шаговый процесс, приходим к **основному функциональному уравнению Беллмана**, устанавливающему связь между $F_n(x)$ и $F_{n-1}(x)$:

$$F_n(x) = \max_{0 \le y \le x}\{g(y) + h(x - y) + F_{n-1}[a \cdot y + b(x - y)]\}. \quad (3)$$

Определив по равенству (1) $F_1(x)$, пользуясь (2), вычисляем $F_2(x)$, затем $F_3(x)$ и т. д. Значение $F_n(x)$ является доходом, полученным за n шагов.

Основное функциональное уравнение Беллмана является математической формулировкой принципа оптимального динамического программирования.

Оптимальное поведение (управление) обладает свойством: каковы бы ни были первоначальное состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате предыдущего решения.

Это означает, как следует из уравнения Беллмана, что максимальный доход от n-шагового процесса равен сумме доходов от 1-го и $(n - 1)$ последующих шагов при условии наилучшего распределения в последующих шагах оставшихся после 1-го шага ресурсов.

7.4. БАЛАНСИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ МОЩНОСТЕЙ И ПРОГРАММЫ ПРЕДПРИЯТИЯ

Пример 2. Пусть известны возможные значения эффективности (например, прирост прибыли, выпуск продукции и др.) на каждом из четырех предприятий отрасли в результате расширения действующих мощностей (табл. 46).

Таблица 46

Капиталовложения (ж), Д. е.	Прирост выпуска продукции i-го предприятия *gi(x),* д. е7год			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	ПО
200	140	122	130	142

Требуется составить план распределения ограниченных капиталовложений по этим предприятиям (K = 200 д. е.), максимизирующий общий прирост выпуска при заданной номенклатуре и структуре отраслевого плана производства продукции.

Р е ш е н и е. Данная задача может быть решена методом динамического программирования.

Обозначим: $g_i(x)$ — прирост выпуска продукции (д. е./год) на i-м предприятии при x д. е. капиталовложений на реконструкцию или расширение активной части его основных фондов; $F(K)$ — максимально возможный прирост выпуска продукции (д. е./год) при распределении суммы K между четырьмя предприятиями.

Тогда согласно основному функциональному уравнению Беллмана:

$$F_4(K) = \max_{0 \le x \le K}[g_4(x) + F_3(K - x)], \quad (4)$$

$$F_1(x) = \max_{0 \le x \le K}[g_1(x)] = g_1(x), \quad (5)$$

т. е. максимальный прирост выпуска продукции на первом предприятии при распределении для него x $(0 \le x \le K)$ д. е. капиталовложений (только для него) будет соответствовать значениям графы 2 таблицы 46.

Реализация задачи будет заключаться в последовательном решении аналогичных уравнений Беллмана, описывающих максимальный прирост выпуска при распределении

Таблица 47

X	F,(x)	WW		
0	0	0	0	0
50	25	30	36	36
100	60	70	70	70
150	100	100	106	110
200	140	140	140	146

$K = 200$ д. е. между двумя предприятиями, затем тремя и четырьмя (табл. 47).

В процессе вычислений x меняется от 0 до K с шагом $\Delta = 50$ д. е.

$$F_2(50) = \max_{0 \le x \le 50} [g_2(x) + F_1(50 - x)] =$$
$$= \max [g_2(0) + g_1(50); g_2(50) + g_1(0)] =$$
$$= \max [0 + 25; 30 + 0] = 30,$$
$$F_2(100) = \max_{0 \le x \le 100} [g_2(x) + F_1(100 - x)] =$$
$$= \max [g_2(0) + g_1(100); g_2(50) + g_1(50); g_2(100) + g_1(0)] =$$
$$= \max [0 + 60; 30 + 25; 70 + 0] = 70,$$
$$F_2(150) = \max_{0 \le x \le 150} [g_2(x) + F_1(150 - x)] =$$
$$= \max [g_2(0) + g_1(150); g_2(50) + g_1(100);$$
$$g_2(100) + g_1(50); g_2(150) + g_1(0)] =$$
$$= \max [0 + 100; 30 + 60; 70 + 25; 90 + 0] = 100,$$
$$F_2(200) = \max_{0 \le x \le 150} [g_2(x) + F_1(200 - x)] =$$
$$= \max [g_2(0) + g_1(200); g_2(100) +$$
$$+ g_1(100); g_2(150) + g_1(50);$$
$$g_2(50) + g_1(150); g_2(200) + g_1(0)] =$$
$$= \max [0 + 140; 60 + 70; 25 + 90;$$
$$100 + 30; 122 + 0] = 140 \text{ и т. д.}$$

Полученные значения максимального прироста выпуска продукции при распределении x д. е. капиталовложений ($0 \le x \le 200$) между двумя предприятиями заносится в графу 3 таблицы 47.

Из анализа результатов расчетов (табл. 47) следует, что наибольший прирост продукции, который может быть достигнут, составит

$$F_4(200) = g_4(150) + F_3(50) = 110 + 36 = 146 \text{ д. е.},$$

то есть четвертому предприятию должно быть выделено 150 д. е., а первым трем — 50 д. е.

Как распределяются эти 50 д. е. по первым трем предприятиям?

$$F_3(50) = \max_{0 \le x \le 50} [g_3(50) + F_2(0)] = [36 + 0] = 36,$$

т. е. все оставшиеся 50 д. е. выделяются третьему заводу.

Итак, решение задачи $x_1^0 = x_2^0 = 0$; $x_3^0 = 50$; $x_4^0 = 150$ д. е.

7.5. ЗАДАЧИ О ПРАВИЛАХ ОСТАНОВКИ

Задачи о правилах остановки образуют простейший подкласс задач быстро развивающейся в настоящее время области проблем последовательных решений с многозначным выбором, включающий в себя такие аспекты, как динамическое программирование и последовательные испытания.

Типичный пример — **задача о разборчивой невесте**. Предположим, имеется N женихов, причем из любых двух женихов можно указать лучшего. Женихи рассматриваются в случайном порядке, и невеста хочет выбрать лучшего из них. При этом она может сравнивать жениха с рассмотренными ранее, но если некоторый субъект уже был отвергнут, то возвращаться к нему нельзя. Как ей следует поступить? На каком женихе остановиться, чтобы вероятность того, что он наилучший, была максимальной?

Очевидно, эту задачу можно сформулировать так. Имеется N вещественных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_N$, среди которых нет одинаковых. Эти числа перемешаны так, что все перестановки равновероятны. Мы последовательно просматриваем эти числа и хотим выбрать самое большое. Возвращаться к числам уже просмотренным и невыбранным запрещается.

Если некоторое число b_k больше всех предыдущих, то мы будем назвать его рекордсменом. Ясно, что наш выбор должен остановиться на каком-то из рекордсменов, поэтому изучим последовательность рекордсменов подробнее. Очевидно, что рекордсменом обязательно будет первое число b_1. Если

$$b_1 = \max_{1 \le k \le N} b_k,$$

то других рекордсменов вообще не будет. Самое большое из чисел b_k всегда будет рекордсменом, на каком бы месте оно ни стояло.

Обозначим r_k номер в порядке рассмотрения чисел $(k + 1)$-го рекордсмена: $r_0 = 1$, так как первый рекордсмен — b_1. Если r_n номер последнего рекордсмена в последовательности $b_1, b_2, \ldots, b_N$, то условимся считать, что $r_m = \infty$

при $m > n$. Нетрудно проверить, что $r_0, r_1, \ldots, r_n$ — марковская цепь. Состояния этой цепи суть числа 1, 2, ..., N и точка ∞. Найдем ее переходные вероятности:

$$p_{kn} = p\left\{\frac{r_{i+1} = n}{r_i = k}\right\} + \frac{p\{r_i = k, r_{i+1} = n\}}{p\{r_i = k\}}.$$

При $n \le k$ вероятность, стоящая в числителе, равна нулю. При $\infty > n > k$ событие $\{r_i = k, r_{i+1} = n\}$ означает, что среди чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ правее всех оказались b_k и b_n, причем $b_k > b_n$. Вероятность этого события равна

$$\frac{1}{(n-1)n}.$$

Вероятность, стоящая в знаменателе, равна $1/k$.

Таким образом, вероятности p_{kn} для цепи r_i равны 0 при $n \le k < \infty$. Вероятность того, что k-й рекордсмен последний, вычисляется по формуле

$$p_{k\infty} = 1 - \sum_{n=k+1}^{N} p_{kn} = 1 - \sum_{n=k+1}^{N} \frac{k}{n(n-1)} = \frac{k}{N}.$$

Если b_k — последний рекордсмен, то b_k — абсолютный чемпион, наибольшее число. Следовательно, если мы остановимся на рекордсмене b_k, то мы выиграем, т. е. выберем наибольшее число с вероятностью $P_{k\infty} = k/N$.

Посмотрим, какова будет вероятность q_k выигрыша, если мы остановимся на следующем после b_k рекордсмене. С вероятностью p_{kn} следующим рекордсменом будет b_n и с вероятностью $p_{n\infty}$ этот рекордсмен будет последним, поэтому

$$q_k = \sum_{n=k+1}^{N} p_{kn}\, p_{n\infty} = \frac{k}{N}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{N}\right).$$

Отношение

$$\frac{q_k}{p_{k\infty}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{N}$$

с ростом k монотонно убывает. Пока оно больше единицы, останавливаться не стоит: вероятность выигрыша на следующем рекордсмене больше, чем на нынешнем. Интуитивно ясно, что надо ждать, пока впервые не появится рекордсмен b_k с таким k, что $q_k/P_{k\infty}$ меньше 1. Именно на нем и нужно останавливаться. Все предыдущие рекордсмены имеют меньшую вероятность быть последним, а других рекордсменов с большой вероятностью не будет.

При больших N и k отношение $q_k/P_{k\infty} = ln(N/k)$, следовательно, впервые станет меньше 1 при $k \approx N/e$.

Оптимальная стратегия, при больших N состоит в том, что нужно пропустить приблизительно $N/e = N/2{,}71$ чисел, а затем выбрать то число, которое больше всех предыдущих. При малых N нужно пропустить kN чисел, а затем выбрать первое число, большее предыдущих, где kN — наименьшее решение неравенства $1/kN + 1/kN + 1 + \ldots + 1/N < 1$.

Так, при $N = 5$ нужно будет пропустить три первых числа; при $N = 10$ оптимальная стратегия состоит в выборе наибольшего после четырех пропущенных.

Можно подсчитать вероятность выигрыша при использовании оптимальной стратегии. Оказывается, при больших N эта вероятность стремится к $1/e = 0{,}37$.

Задача о разборчивой невесте приводит к отысканию оптимального момента остановки марковской цепи. В задаче о невесте эта цепь — последовательность номеров рекордсменов, и наша задача свелась к такому выбору правила остановки τ, чтобы с наибольшей вероятностью остановиться в момент, непосредственно предшествующий скачку в ∞. Из состояния k совершается скачок в ∞ с вероятностью k/N. Поэтому вероятность успеха при стратегии τ равна

$$\sum p\{r_\tau = k\}\frac{k}{N} = \frac{1}{N}\sum kp\{r_\tau = k\} = \frac{1}{N}Mr_\tau.$$

Таким образом, задача о разборчивой невесте эквивалентна выбору такого правила остановки τ для цепи $r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots$, которое бы максимизировало бы Mr_τ.

Общую задачу об оптимальной остановке марковской цепи $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ можно сформулировать так. Пусть есть две функции $f(x)$ и $g(x)$ на состояниях цепи. Требуется выбрать такой марковский момент τ, чтобы

$$M\left[f(x_\tau) + \sum_{k=0}^{\tau-1} g(x_k)\right]$$

приняло бы максимальное значение.

Пример 3. *Задача о бросании монеты при неограниченном капитале.* Осуществляются последовательные бросания симметричной монеты; выпадение герба означает выигрыш одного очка, выпадение решки — проигрыш одного очка.

Решение. Пусть $X_k = +1$, если в результате k-го бросания выпал герб, и $X_k = -1$, если в результате k-го бросания выпала решка, тогда выигрыш, накопившийся за n бросаний:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Поскольку временные и денежные ресурсы предполагаются неисчерпаемыми, то после каждого бросания имеется ровно два решения: прекратить игру и забрать накопившийся к данному моменту выигрыш или продолжить игру, по крайней мере, еще на одно бросание.

Выберем в качестве состояния системы общий накопленный к данному моменту выигрыш. Если мы находимся в состоянии i, т. е. если наш выигрыш к данному моменту составляет i, то независимо от того, сколько игр нам пришлось сыграть, чтобы накопить эту сумму, вероятность перехода в состояние $i + 1$ есть S и в состоянии $i - 1$ — тоже S.

Таким образом,

$$P(i \mid j) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ для } j = i+1, \\ \frac{1}{2} \text{ для } j = i-1, \\ 0 \text{ для других значений } j. \end{cases}$$

Начальное состояние есть $i_0 = 0$. Платеж, если мы останавливаемся в состоянии i, — это выигрыш к данному моменту: $F(i) = i$. Вступительного взноса нет: $f(i) = 0$; состояний с вынужденной остановкой или продолжением также нет.

Для этой игры существует хорошо известная стратегия, которая требует, чтобы игрок выходил из игры, как только начинает выигрывать.

Пример 4. *Задача о стоянках.* Предположим, что мы едем куда-то на автомобиле и что до места нашего назначения будет еще N стоянок. В поле зрения попадает каждый раз только одна стоянка. Естественно, что если стоянка занята, то мы не можем на ней остановиться; если же стоянка свободна и мы поставим на ней автомобиль, то штраф, или убыток — это то расстояние, которое нам придется пройти до места назначения пешком.

Решение. В последовательности независимых случайных величин $X_{-N}, X_{-N+1}, \ldots, X_0, X_1, \ldots$ все случайные величины принимают значение 0 или 1 с одной и той же вероятностью $P(X_k = 0) = p$; $P(X_k = 1) = 1 - p$.

Мы можем остановиться на X_k только в том случае, если $X_k = 0$, но если $X_k = 0$ и мы действительно останавливаемся, то мы платим штраф $|k|$.

Возьмем в качестве состояний пары чисел (i, k), где i пробегает значения: $-N, -N + 1, \ldots, 0, 1, \ldots$, а k принимает только значения 0 и 1. Содержательно это означает, что i измеряет расстояние от данной стоянки до пункта назначения, а k отмечает, свободна данная стоянка или нет. Переход из (i, k) в $(i + 1, 0)$ осуществляется с вероятностью p, а переход в $(i + 1, 1)$ — с вероятностью $1 - p$.

В примере есть состояния с вынужденным продолжением $(i, 1)$, где $i = -N, -N + 1, \ldots$ Платеж задается формулой $F(i, 0) = -|i|$, где минус показывает, что платеж — величина, противоположная штрафу. Вступительный взнос равен нулю, а в качестве начального состояния снова берется $(-N - 1, 0)$.

7.6. КОНТРОЛЬНЫЙ ВОПРОС

Определить оптимальный вариант маршрутной технологии обработки деталей на пяти группах взаимозаменяемого оборудования, если известны технологические себестоимости каждой операции обработки и все возможные варианты технологических маршрутов (рис. 27).

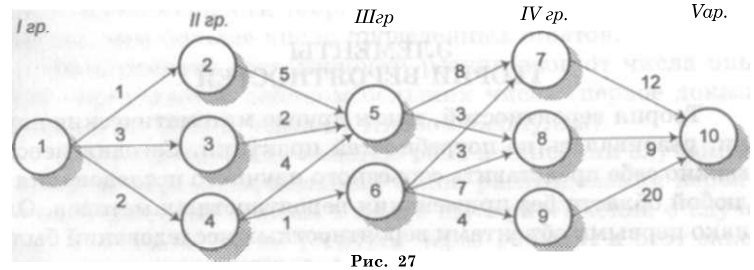


Рис. 27

ГЛАВА 8

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

На бога надейся, а сам не плошай.

Поговорка

Разделить 46 рублей нд 8 частей тлк, ЧТОБЫ каждая члсть БЫЛА Больше предыдущей НА полтинник.

Старинная задача

8.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей, как и другие математические науки, развивалась из потребностей практики. Сегодня невозможно себе представить серьезного научного исследования в любой области без применения вероятностных методов. Однако первыми объектами вероятностных исследований были не серьезные научные проблемы, а легкомысленные игры.

Так, Джероламо Кардано (1506-1576) — итальянский математик, философ и врач, с именем которого связывают формулу решения неполного кубического уравнения, создание кардана и гироскопа, утверждал, что во время осады Трои (ок. 1260 г. до н. э.) для развлечения томящихся от скуки воинов некто Галамед изобрел игральные кости в виде кубиков с числом точек на каждой строке от 1 до 6. Для игры в кости не требовалось ни знаний, ни умения. Результат бросания — чистый случай. Это была первая азартная игра.

Слово *азарт* (франц. *hasard* — случай, риск) происходит от арабского аз-зарт — игра в кости. Позже распространились игральные карты, которые в современном виде (первоначально были известны в древности) появились во Франции в XIV в. Азартные игры позволяют формировать четкие вопросы и дают возможность проводить массовые эксперименты.

В связи с этим и в наши дни изучение теории вероятностей начинают с вопросов: «Сколько раз при бросании монета упадет гербом вверх?», «Какова вероятность вытащить из колоды туза пик?» и т. д.

Одно из первых исследований по теории вероятностей принадлежит итальянцу Никколо Тарталье (ок. 1499-1557) и называется «Общее правило данного автора, найденное в первый день поста 1523 г. в Вероне, чтобы уметь найти, сколькими способами можно варьировать положение какого угодно количества костей при их метании».

Из многих функциональных положений теории вероятностей остановимся только на двух.

1. Если монету бросить дважды, то совершенно не обязательно, что один раз она упадет вверх гербом, а другой — цифрами. Если же монету бросить, скажем, 1000 раз, то примерно в половине случаев выпадет герб, а в половине — решка. Чем большее число раз бросать монету, тем ближе к $^1/_2$ будет частота появления гербов и цифр. Отсюда вывод: закономерности теории вероятностей тем более достоверны, чем больше число проведенных опытов.

Зависимость достоверности результатов от числа опытов определяется законом больших чисел (первое доказательство в XVII в. сделано Якобом Вернулли).

2. Исключительно важную роль в описании случайных явлений играет нормальный закон распределения вероятностей (впервые описан в книге Муавра «Учение о случаях» в XVIII в., затем у Гаусса через 100 лет, и этот закон назвали его именем). Впервые эту науку теорией вероятностей назвал Лаплас.

Для того, чтобы пользоваться отдельными положениями теории вероятностей, введем некоторые понятия.

Событие — всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Признак, что данный факт является событием, состоит в том, что ответом на вопрос «произошло ли событие?» может быть либо «да», либо «нет». Примеры событий: падение монеты при бросании гербом вверх, своевременная поставка сырья и др.

События могут быть достоверными, возможными и невозможными.

Достоверное — событие, которое непременно должно произойти; например, выпадение любого количества очков на игральной кости, расход ресурсов при выпуске продукции.

Невозможное — событие, которое не может произойти: появление двух тузов при вытаскивании одной карты, выпуск сверхплановой продукции без использования дополнительных ресурсов и др.

Возможное — событие, которое может произойти или не произойти: падение монеты гербом вверх, выполнение плана на 100% и др.

5*

Для выражения возможности события используют численную меру. Численную меру возможности события называют вероятностью. Вероятность события А, т. е. Р(А), можно вычислить.

P(A) = *m*/*n*, где *m* — число случаев, когда событие *A* может произойти; *n* — общее число случаев.

Очевидно, что если *P(A)* = 0, то событие невозможно;
1, достоверное событие;
>0 и < 1, событие возможное.

Вероятность *P(A)* характеризует возможность появления события *A* в будущем. Для оценки того, как часто события уже происходили, используют понятие частоты. Частоту события *A* обозначают *P*(A)* = *гп/п*, где *m** показывает, сколько раз событие произошло; *n* — общее число произведенных испытаний.

Несовместными будем называть события, исключающие друг друга. Так, падение монеты вверх гербом и цифрами — это два несовместных события. Очевидно, что сумма вероятностей всех несовместных событий равна 1.

Случайные события можно характеризовать числами. Такие числа называют случайными величинами. Случайная величина может принять то или иное значение, заранее неизвестное. Например, случайные величины: объем поставленных материалов, трудоемкость операции или работы.

Конкретное измеренное значение случайной величины называют ее реализацией. Различные реализации случайной величины относят к несовместным событиям. Действительно, если трудоемкость изготовления детали составила 100 чел./ч, то она не может быть 105 или аналогичным значением.

Случайная величина не может быть описана одним конкретным числом. Ее можно описать либо количественными характеристиками, либо законом распределения. Наиболее распространенными характеристиками случайной величины являются: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариабельности.

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины, обозначается M_x или *M[x]* или *x*:

$$M[x] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

где *n* — число реализаций; x_i — значение случайной величины в *i-й* реализации.

Дисперсия $D[x]$ **(или** D_x**) характеризует разброс значений случайной величины:**

$$D[x] = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Так как размерность дисперсии равна квадрату размерности самой случайной величины, использовать дисперсию для относительной оценки разброса случайной величины нельзя.

Поэтому разброс оценивают средним квадратическим отклонением:

$$\sigma_x^2 = D[x] \text{ или}$$

$$\sigma_x = \sqrt{D[x]} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

Удобной характеристикой случайной величины является коэффициент вариабельности, который показывает относительное значение разброса случайной величины:

$$\mu[x] = \sigma_x / \bar{x}.$$

Пример 1. Пусть наличие некоторого *i*-го ресурса в каждом квартале b_i — случайная величина. Реализация этой случайной величины — фактический объем ресурса в каждом квартале (по отчету прошлого года и трех кварталов текущего) (табл. 48).

Таблица 48

Квартал	I	II	III	IV	I	II	III
Ы	90	100	105	111	89	95	110

Решение. Математическое ожидание случайной величины b_i:

$$\bar{b} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} b_i = \frac{90+100+105+111+89+110}{7} = 100.$$

Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{7} \frac{(b_i - \bar{b})^2}{6}} = \sqrt{\frac{10^2+0^2+5^2+11^2+11^2+5^2+10^2}{6}} = 9.$$

Коэффициент вариабельности:

$$\mu_b = \sigma_b / \bar{b} = 9/100 = 0{,}09.$$

Наиболее полная характеристика случайной величины — закон ее распределения. Он показывает, какова вероятность появления каждого возможного значения случайной величины или каким образом суммарная вероятность появления случайной величины, равная единице, распределена между ее возможными значениями.

Закон распределения устанавливает связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления.

Из множества законов наиболее распространен **нормальный закон распределения**, с помощью которого решают различные задачи оптимизации, в том числе и в условиях неопределенности.

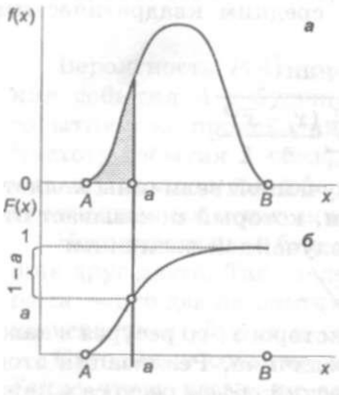


Рис. 28

Нормальный закон распределения имеет две формы представления: **плотность распределения** (рис. 28*а*) и **функцию распределения** (рис. 28*б*). С помощью графика (*а*) можно определить, например, чему равна вероятность принятия случайной величиной x, изменяющейся в интервале значений $A, B (A \le x \le B)$, значения не больше величины a, т. е. $P(x \le a)$. Оказывается, эта вероятность равна заштрихованной площади. Зная $P(x \le a)$, можно установить вероятность, что x будет не меньше величины a, т. е. $P(x \ge a)$.

Очевидно, что $P(x \le a) + P(x \ge a) = 1$ (как сумма несовместных событий), тогда $P(x \ge a) = 1 - P(x \le a)$, что соответствует незаштрихованной площади (рис. 28*а*).

Большое распространение получила другая форма распределения (потому что площадь криволинейной фигуры трудно вычислить) — функция распределения $F(x)$ (рис. 28*б*). Здесь вероятность $P(x \le a)$ равна ординате кривой $F(x)$. Следовательно, $P(x \le a) = F(a)$, т. е. $P(x \ge a) = 1 - F(a)$. Для обеспечения расчетов по нормальному закону распределения от реальной случайной величины x переходят к нормированной (центрированной) случайной величине

$$t = (x - \bar{x}) / \sigma_x.$$

При этом $P(x \le a) = F(t)$. Для определения $F(t)$ используют специальные таблицы (табл. 49), по данным которых можно построить график функции распределения.

Таблица 49

t	-3	-2	-1	-0,25	0	0,25	1	2	3
$F(t)$	0,001	0,02	0,16	0,4	0,5	0,6	0,84	0,98	0,999

По графику $F(t)$ (рис. 29) можно легко определить интересующие нас величины. Например, какова вероятность того, что наличный ресурс будет не менее 98.

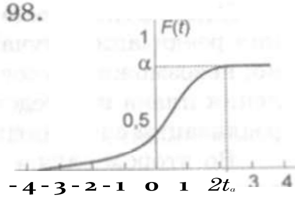


Рис. 29

Очевидно, что $P(x \ge 98) = 1 - P(x \le 98)$. Для данного примера $t = (98 - \bar{b}) / \sigma_b$.

Ранее установили, что $\bar{b} = 100$; $\sigma_b = 9$. Следовательно,

$$t = (98 - 100)/9 = -0{,}25.$$

Так как

$$P(x \le a) = F(t), \text{ то } P(x \le 98) = F(-0{,}25) = 0{,}4.$$

Тогда

$$P(x \ge 98) = 1 - P(x \le 98) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

Можно поставить и обратную задачу: при каком значении t_α вероятность появления случайной величины удовлетворяет условию $P(t \le t_\alpha) = \alpha$ — заданный уровень вероятности. Если α задать 0,6, то $t_\alpha = 0{,}25$.

8.2. ПОНЯТИЕ О СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

В задаче линейного программирования:

$$\max(\min) L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, \dots, m), \\ d_j \le x_j \le D_j \quad (j = 1, \dots, n), \end{cases}$$

заданные величины $c_j, a_{ij}, b_i, d_j, D_j$. Часто на практике величины c_j, a_{ij}, b_j, могут быть случайными. Так, если b_i — ресурс, то он зависит от ряда факторов. Аналогично, c_j — цены — будут зависеть от спроса и предложения, a_{ij} — расходные коэффициенты — от уровня техники и технологии. Задачи, в которых c_j, a_{ij}, b_i — случайные величины, относят к задачам стохастического программирования.

В задачах стохастического программирования случайный характер величин указывают различными способами:

- реализацией случайных величин;
- законом распределения случайных величин.

В первом случае в модель подставляют фактические значения случайных величин и решают задачу для этих значений. Такой подход обеспечивает решение задачи оптимизации и получение искомых значений для случая, когда значения реализации случайных величин известны. Такая задача есть обычная задача линейного программирования.

Недостатки такого подхода: необходимость иметь значения реализации случайных величин, что не всегда возможно; невозможность составить план, так как в момент составления плана на предстоящий период конкретных значений реализации случайных величин в принципе быть не может.

Во втором случае по закону распределения случайных величин эти недостатки отсутствуют. Обычно принимают, что случайные величины подчиняются нормальному закону распределения, заданному математическим ожиданием и дисперсией.

Задача стохастического программирования предусматривает стохастическую постановку и целевой функции, и ограничений.

Стохастическая постановка целевой функции может быть двух видов: *M*-постановка и *P*-постановка.

При *M*-постановке случайная величина заменяется ее математическим ожиданием и задача сводится к оптимизации детерминированной целевой функции:

$$\max(\min) L = \sum_j \bar{c}_j x_j,$$

где $\bar{c}_j$ — математическое ожидание случайной величины c_j.

При *P*-постановке целевая функция будет иметь вид:

- при максимизации целевой функции
$$\max L = P\left[\sum_j c_j x_j \geq r\right]$$
обозначает максимизацию вероятности того, что случайная величина $\sum_j c_j x_j$ будет *не меньше* некоторого значения r;
- при минимизации целевой функции
$$\min L = P\left[\sum_j c_j x_j \leq r\right]$$
обозначает максимизацию вероятности того, что случайная величина $\sum_j c_j x_j$ будет *не больше* некоторого значения r.

Наиболее распространены СТП-постановки в вероятностных ограничениях вида:

$$P\left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i\right] = \begin{cases} \geq \alpha_i, & \text{(а)} \\ \leq \alpha_i, & \text{(б)} \end{cases}$$

$$P\left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i\right] = \begin{cases} \geq \alpha_i, & \text{(в)} \\ \leq \alpha_i, & \text{(г)} \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i — случайные величины; α_i — заданные уровни вероятности.

Так, ограничение (а) означает, что вероятность соблюдения неравенства

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$$

должна быть не меньше, чем α_i. Аналогичный смысл и других ограничений.

Для случая, когда вероятностные ограничения представлены в виде типа (а), задачу СТП можно записать при *M*-постановке:

$$\max(\min) L = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j,$$

$$\begin{cases} P\left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i\right] \geq \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, m), \\ d_j \leq x_j \leq D_j \quad (j = 1, \ldots, n). \end{cases} \tag{*}$$

При *P*-постановке:

- в случае максимизации целевой функции

$$\max L = P\left[\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq r\right],$$

$$\begin{cases} P\left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i\right] \geq \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, m), \\ d_j \leq x_j \leq D_j \quad (j = 1, \ldots, n). \end{cases} \tag{**}$$

- в случае минимизации целевой функции

$$\max L = P\left[\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq r\right]$$

$$\begin{cases} P\left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i\right] \geq \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, m), \\ d_j \leq x_j \leq D_j \quad (j = 1, \ldots, n). \end{cases} \tag{***}$$

где c_j, a_{ij}, b_i — случайные величины.

Для остальных случаев ограничений (б, в, г) постановка задач стохастического программирования аналогична.

Задачи (*), (**), (***) непосредственно решены быть не могут. Одним из возможных методов их решения может быть представление их в виде детерминированного эквивалента.

8.3. ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Для решения задачи стохастического программирования в Р-постановке и с вероятностными ограничениями переходят к детерминированному эквиваленту.

Для целевой функции детерминированный эквивалент имеет вид:

- при минимизации целевой функции

$$\min L = \frac{\sum_{j=1} c_j x_j - r}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}},$$

- при максимизации целевой функции

$$\max L = \frac{r - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}},$$

где σ_j^2 — дисперсия случайной величины c_j. Решение таких задач затруднительно, поэтому далее рассматриваем целевая функция только в M-постановке.

Детерминированный эквивалент вероятностного ограничения типа (а)

$$P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right] \ge \alpha_i$$

может быть сведен к виду

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_j + t_{\alpha_i} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2} \le \overline{b}_i,$$

где $\overline{a}_{ij}, \overline{b}_i$ — математические ожидания; σ_{ij}^2, θ_i^2 — дисперсии случайных величин a_{ij}, b_i; $t_{\alpha_i} = \Phi^{*-1}(\alpha_i)$ — обратная функция нормального распределения при функции распределения:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-t^2/2} dt,$$

где α_i — заданный уровень вероятности (табл. 50).

Обычно решают задачи при $\alpha_i \ge 0{,}5$, поэтому даны значения t_α только для положительных t_{α_i}.

Таблица 50

α_i	0,5	0,6	0,7	0,77	0,84	0,89	0,93	0,96	0,98	0,987	0,994
	0,0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5

Если же $\alpha_i < 0{,}5$; то $t_{1-\alpha} = -t_\alpha$. Так, для $\alpha = 0{,}4$; $t_{0,4} = t_{(1-0,6)} = -t_{0,6} = -0{,}25$.

Детерминированный эквивалент задачи СТП в M-постановке имеет вид

$$\max(\min) L = \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_j + t_{\alpha_i} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2} \le \overline{b}_i, & (i = 1, \dots, m), \\ d_j \le x_j \le D_j & (j = 1, \dots, n). \end{cases} \qquad (*)$$

Из (*) следует, что для решения задачи стохастического программирования в M-постановке необходимы исходные данные, приведенные в предыдущей таблице.

Каждое i-е ограничение в детерминированном эквиваленте (*) отличается от аналогичного ограничения задачи линейного программирования

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$$

следующим:

- от детерминированных значений a_{ij}, b_i выполнен переход к математическим ожиданиям случайных величин $\overline{a}_{ij}, \overline{b}_i$;
- появился дополнительный член (ξ)

$$\xi_i = t_{\alpha_i} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2},$$

который учитывает все вероятностные факторы: закон распределения с помощью $t_{\alpha i}$; заданный уровень вероятности α_i; дисперсии случайных величин a_{ij}, равные σ_{ij}^2; дисперсии случайных величин b_i, равные θ_i^2.

8.4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТП

Детерминированный эквивалент задачи стохастического программирования в M-постановке включает ограничения, которые являются несепарабельными функциями.

Обозначим

$$T_i = \sqrt{\sum_i \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2},$$

тогда задачу стохастического программирования можно записать в сепарабельной форме:

$$\max(\min) L = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j + t_{\alpha_i} T_i \le \bar{b}_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$T_i^2 - (\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2) = 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$d_j \le x_j \le D_j \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$\underline{T}_i \le T_i \le \overline{T}_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

где

$$\underline{T}_i = \sqrt{\sum_j \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2}, \quad \overline{T}_i = \sqrt{\sum_j \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2}.$$

Эта задача является сепарабельной задачей нелинейного программирования и может быть решена с помощью стандартных программных средств.

Функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется сепарабельной, если она может быть представлена в виде суммы функций, каждая из которых является функцией одной переменной, т. е. если $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_j f_i(x_i)$.

Если целевая функция и функции в системе ограничений задачи нелинейного программирования сепарабельные, то приближенное решение может быть найдено методом кусочно-линейной аппроксимации.

Пример 2. Рассмотрим задачу распределения двух видов ресурсов для выпуска двух наименований изделий.

Решение. Ее модель:

$$\max L = c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2, \\ d_1 \le x_1 \le D_1, \\ d_2 \le x_2 \le D_2, \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i, c_j — случайные.

При M-постановке модель запишется:

$$\max L = M\left[c_1 x_1 + c_2 x_2\right],$$

$$\begin{cases} P(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1) \ge \alpha_1, \\ P(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2) \ge \alpha_2, \\ d_1 \le x_1 \le D_1, \\ d_2 \le x_2 \le D_2, \end{cases}$$

где α_1, α_2 — заданные уровни вероятности соблюдения каждого ограничения.

Для того чтобы решить задачу в M-постановке, необходимо перейти к ее детерминированному эквиваленту:

$$\max L = \bar{c}_1 \bar{x}_1 + \bar{c}_2 \bar{x}_2,$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{11} x_1 + \bar{a}_{12} x_2 \le \bar{b}_1 - t_{\alpha_1} \sqrt{\sigma_{11}^2 x_1^2 + \sigma_{12}^2 x_2^2 + \theta_1^2}, \\ \bar{a}_{21} x_1 + \bar{a}_{22} x_2 \le \bar{b}_2 - t_{\alpha_2} \sqrt{\sigma_{21}^2 x_2^2 + \sigma_{22}^2 x_2^2 + \theta_2^2}, \\ d_1 \le x_1 \le D_1; \quad d_2 \le x_2 \le D_2. \end{cases}$$

Исходные данные, необходимые для решения этой задачи, сведены в таблицах 51 и 52.

Таблица 51

Величина	c	d	D
X1	5	2	6
X2	8	3	9

Таблица 52

Ограничения	Случайные величины					
	а п		а ,₂		b.	
		а,1	а,₂	ал	k	в,-
1	10	2	15	3	100	9
2	20	6	14	4	150	12

Если задать уровни вероятности $\alpha_{1,2} = 0{,}6$, для которых $t_\alpha = 0{,}25$, то получим после подстановки исходных данных детерминированный эквивалент:

$$\max L = 5x_1 + 8x_2,$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 15x_2 \le 100 - 0{,}25\sqrt{4x_1^2 + 9x_2^2 + 81}, \\ 20x_1 + 14x_2 \le 150 - 0{,}25\sqrt{36x_1^2 + 16x_2^2 + 120}, \\ 2 \le x_1 \le 6; 3 \le x_2 \le 9. \end{cases}$$

Результаты решения этой задачи для детерминированного случая $\xi_i = 0$ и при $\alpha_i = 0{,}6$ (табл. 53), где

$$\xi_i = t_{\alpha_i} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2}.$$

Таблица 53

Величина	£, = о	а,- = о,6	Величина	6**о	ai = о,6
XI	2	2		0	4,4
X2	5,3	5,04	b	0	5,8
L	52,4	50,3		0	4,4
P	0	4	У2	0	5,1

Та блица 54

Величина	ai.a					
	0,5	0,6	0,77	0,89	0,96	0,987
x_1	2	2	2	3,71	3,07	2,165
x_2	5,3	5,04	4,51	3	3	3
L	52,4	50,3	46,1	42,6	39,3	34,8
р	0	4	12	18,7	25	33,6
у	0	4,4	12,3	17,9	24,3	33,3
уг	0	5,1	14,8	16,5	23,2	26

Рассмотрим теперь, как повлияют на результат решения задачи величины, определяющие ее вероятностный характер. К таким величинам относят заданный уровень вероятности ctj и дисперсий atj² и ОД Начнем с анализа влияния oti (табл. 54).

Из анализа решения этой задачи можно сделать следующие выводы: для обеспечения гарантированного (с вероятностью a = 0,6) выполнения плана необходимо иметь дополнительно около 5% каждого вида ресурса. При отсутствии дополнительного ресурса целевой функции может уменьшиться на величину B = 4% вследствие возможного сокращения выпуска продукции x_2 от 5,3 до 5,04.

Этот пример подтверждает тот факт, что в реальных условиях для гарантированного выполнения плана необходимы дополнительные ресурсы в размере 2^. В противном случае возможно уменьшение выпуска продукции.

При этом можно сделать выводы:

1) в целях повышения заданного уровня вероятности выполнения плана a_i требуется увеличить дополнительные ресурсы y_i. Так, для выполнения плана с вероятностью, близкой к 1 (a = 0,987), необходим дополнительный ресурс в размере y = 26, 33% от величины используемого без учета вероятностных характеристик;

2) отсутствие такого увеличения может привести к ухудшению целевой функции на величину B = 33,6%;

3) возрастание a отражается на номенклатуре продукции. При этом в интервале a = 0,5, 0,77 значение x_1 сохраняется неизменным, а x_2 — уменьшается. При дальнейшем увеличении a = 0,89, 0,987 значение x_2 = const, в то время как x_1 сначала скачком растет, а затем постепенно уменьшается. Несмотря на то что при a = 0,89 значения x_1, x_2 резко изменяются, целевая функция во всем интервале изменения a уменьшается плавно. Таково влияние заданного уровня вероятности соблюдения ограничений a на результат решения задачи.

Для большей реальности и выполнимости планов элементы модели должны постоянно уточняться по фактическим реализациям случайных величин.

8.5. КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Решить задачу распределения двух видов ресурсов для выпуска двух наименований изделий. Исходные данные — в таблицах 55 и 56.

Таблица 55

Величина	c	d	D
x_1	6	3	5
x_2	8	1	6

Таблица 56

Ограничения	Случайные величины					
	an		a,2		Ы	
	°ц	Oil	·.2	a,2		9,
1	12	3	14	4	140	8
2	16	5	12	4	160	10

ГЛАВА 9

ТЕОРИЯ ИГР

Ваши шансы там, где вы их найдете.

Поговорка

Веселый человек пришел в трактир с некоторой суммой денег и занял у содержателя трактира столько денег, сколько имел у севя. Из этой суммы истратил 1 русль. С остатком пришел в другой трактир, где опять занял столько денег, сколько имел. Е этом трактире также истратил 1 русль. Потом пошел в третий и четвертый трактиры и повторил то же самое. Наконец, когда вышел из четвертого трактира, он не имел ничего. Сколько денег имел первоначально веселый человек?

Старинная задача

9.1. УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

При управлении производством принимать решения очень часто приходится, не имея достаточной информации, т. е. в условиях неопределенности и риска.

Методами обоснования решений в условиях неопределенности и риска занимается математическая теория игр.

В теории игр рассматриваются такие ситуации, когда имеются два участника выполнения операции, каждый из которых преследует противоположные цели. В качестве участников могут выступать коллективы, конкурирующие предприятия и т. д. Во всех случаях предполагается, что операция проводится против разумного противника (конкурента), преследующего свои собственные цели и сознательно противодействующего достижению цели другим участником.

Так как цели противоположны, а результат мероприятия каждой из сторон зависит от действий конкурента, то эти действия называют конфликтными ситуациями. В конфликтной ситуации сталкиваются противоположные интересы двух участников. Формализованная (схематизированная) модель конфликтной ситуации называется игрой. Результат игры — победа или поражение, которые не всегда имеют количественное выражение, можно выразить (условно) числами (например, в шахматах: 1, 0, $1/2$).

Игра называется игрой с нулевой суммой, если один из игроков выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой.

Развитие игры во времени представляется как ряд последовательных «ходов». Ходы могут быть сознательные

Таблица 57

	B,	Bi		Bn
Ax	qn	ф2		gm
Aг	Q21	Q22		
Am		Qm2		Qmn

Таблица 58

	Bi	B2		B,,	a,
At	911	qi2		gm	ai
Аз	(721	Q'2		Я2n	α2
Am	Qml	Qm2			ai
P.	Pi	P2		Pn	

и случайные. **Случайный ход** — результат, получаемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (покупательский спрос, задержка с поставкой материалов и т. п.). **Сознательный ход** — выбор игроком одного из возможных вариантов действия (стратегии) и принятие решения о его осуществлении.

Возможные варианты **(исходы)** игры сводятся в прямоугольную таблицу (табл. 57) — **платежную матрицу**, в которой строки соответствуют различным стратегиям игрока A, столбцы — стратегиям игрока B, q_{ij} называется **ценой игры**.

Цель теории игр — выработка рекомендаций для различного поведения игроков в конфликтной ситуации, т. е. выбор оптимальной стратегии для каждого из них.

Для нахождения оптимальной стратегии необходимо проанализировать все возможные стратегии и рассчитывать на то, что разумный противник на каждую из них будет отвечать такой, при которой выигрыш игрока A минимален. Обычно минимальные числа в каждой строке обозначаются α_i и выписываются в виде добавочного столбца матрицы (табл. 58).

В каждой строке будет свое $\alpha_i = \min\limits_j q_{ij}$.

Предпочтительной для игрока A является стратегия, при которой α_i обращается в максимум, т. е.

$$\alpha = \max_i \alpha_i \text{ или } \alpha = \max_i \min_j q_{ij},$$

где α — **максиминный выигрыш (максимин)**, а соответствующая ей стратегия — **максиминная**.

Если придерживаться максиминной стратегии, то при любом поведении стороны B (конкурента) гарантирован выигрыш, во всяком случае не меньше α. Поэтому α называют также **ценой игры** — тот гарантированный минимум, который можно обеспечить при наиболее осторожной (**перестраховочной**) стратегии.

Очевидно, что аналогичные распределения можно провести и для конкурента B, который должен рассмотреть все свои стратегии, выделяя для каждой из них максимальные значения выигрыша:

$$\beta_j = \max_i q_{ij} \text{ (последняя строка матрицы).}$$

Из всех значений β_j находят минимальное:

$$\beta = \min_j \max_i q_{ij},$$

которое дает **минимаксный выигрыш, или минимакс.**

Такая β-стратегия — минимаксная, придерживаясь которой сторона B гарантирована, что в любом случае проиграет не больше β. Поэтому β называют верхней ценой игры.

Если $\alpha = \beta = C$, то число C называют **чистой ценой игры или седловой точкой.**

Для игры с седловой точкой нахождение решения состоит в выборе пары максиминной и минимаксной стратегий, которые являются оптимальными, так как любое отклонение от этих стратегий приводит к уменьшению выигрыша первого игрока и увеличению проигрыша второго игрока по сравнению с ценой игры C.

Пример 1. Конструктор получил задание разработать определенное новое изделие. В результате исследований он определил три возможных варианта изделия V_1, V_2, V_3, каждый из которых может быть реализован каким-либо из трех техпроцессов T_1, T_2, T_3.

Если первый вариант конструкции V_1 реализуется по первой технологии T_1, то внешний вид изделия оказывается наилучшим и оценивается экспертами в 9 баллов, а при

Таблица 59

Конструкция	Технология			$\alpha_i = \min_j q_{ij}$
	T_1	T_2	T_3	
V_1	9	6	5	5 (T_3)
V_2	8	7	7	7 (T_2 или T_3)
V_3	7	5	8	5 (T_2)
$\beta_j = \max_i q_{ij}$	9	7	8	$\max_i \min_j q_{ij} = 7 = \min_j \max_i q_{ij}$

реализации по второй технологии — в 6 баллов, по третьей — в 5 баллов и т. д. (табл. 59).

Р е ш е н и е. Конфликтная ситуация возникает из-за того, что затраты на реализацию каждого конструкторско-технологического решения (варианта) не одинаковы. Для простоты полагаем, что затраты пропорциональны внешнему виду (чем выше балл, тем больше затраты).

Конструктор должен представить только один вариант, конечно, самый красивый. Но он понимает, что тогда найдутся сторонники самого дешевого варианта («экономисты»). Поэтому его задача — выбрать оптимальный вариант по внешнему виду и стоимости.

Если конструктор выберет V_1, то экономисты будут настаивать на технологии T_3. На вариант V_2 будет ответ T_2 или T_3 и т. д.

Очевидно, что с точки зрения конструктора преимущество имеет вариант V_2, а так как даже при неблагоприятных обстоятельствах получится изделие, оцениваемое в 7 баллов (выигрыш 7), а может быть, даже 8, если удается уговорить экономистов на вариант T_1.

С точки зрения экономистов в смысле снижения затрат: при выборе технологии T_1 в варианте V_1 затраты наибольшие — 9 баллов, при T_2 в V_2 (7), при T_3 в V_3 (8). т. е. для экономистов оптимальным является техпроцесс T_2, так как он требует меньших затрат при различных вариантах конструкции. Следовательно, стратегия T_2V_2 с выигрышем 7 — наиболее выгодная сразу для обеих сторон — максимальный выигрыш V совпадает с минимальным проигрышем T.

Однако не все матрицы имеют седловую точку. Тогда решение находят, применяя **смешанные стратегии**, т. е. чередуя случайным образом несколько чистых стратегий (**гибкая тактика**).

Вектор, каждая из компонент которого показывает относительную частоту использования игроком соответствующей чистой стратегии, называют **смешанной стратегией данного игрока.**

Из этого определения следует, что сумма компонент этого вектора равна единице, а сами компоненты неотрицательны.

Обычно смешанную стратегию первого игрока обозначают как вектор $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, а второго игрока — как вектор $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$, где $u_i \geq 0$ ($i = 1, \ldots, m$), $z_j \geq 0$ ($j = 1, \ldots, n$),

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{j=1}^{n} z_j = 1.$$

Если u^0 — оптимальная стратегия первого игрока, z^0 — оптимальная стратегия второго игрока, то число

$$\upsilon = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^0 z_j^0$$

называют **ценой игры**.

Для того чтобы число υ — было ценой игры, а u^0 и z^0 — оптимальными стратегиями, необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^0 \geq \upsilon \; (j = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j^0 \leq \upsilon \; (i = 1, \ldots, m).$$

Если один из игроков применяет оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры υ вне зависимости от того, с какими частотами будет применять второй игрок стратегии, вошедшие в оптимальную, в том числе и чистые стратегии.

Пример 2. Найти решение игры, заданной матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Прежде всего проверяется наличие седловой точки. Для этого определяются минимальные элементы в каждой из строк (2 и 4) и максимальные элементы в каждом из столбцов (6 и 5).

Значит, нижняя цена игры

$$\alpha = \max_i(\min_j a_{ij}) = \max(2; 4) = 4,$$

верхняя цена игры

$$\beta = \min_i(\max_j a_{ij}) = \min(6; 5) = 5.$$

Так как $\alpha = 4 \neq \beta = 5$, то решение игры — смешанные оптимальные стратегии, а цена игры υ в пределах от 4 до 5.

Пусть для игрока A стратегия задается вектором $U = (u_1, u_2)$. Тогда при применении игроком B чистой стратегии B_1 или B_2 игрок A получит средний выигрыш, равный цене игры, т. е.

$$\begin{cases} 2u_1^0 + 6u_2^0 = \upsilon & \text{(при стратегии } B_1\text{)}, \\ 5u_1^0 + 4u_2^0 = \upsilon & \text{(при стратегии } B_2\text{)}, \\ u_1^0 + u_2^0 = 1 & \text{(уравнение связи частот } u_1^0,\ u_2^0\text{)}. \end{cases}$$

Из решения трех уравнений с тремя неизвестными оптимальная стратегия игрока A: $u_1^0 = {}^2/_5$; $u_2^0 = {}^3/_5$; $\upsilon = {}^{22}/_5$.

Пусть для игрока B стратегия задается вектором $Z = (z_1, z_2)$. Тогда

$$\begin{cases} 2u_1^0 + 6u_2^0 = 22/5, \\ 5u_1^0 + 4u_2^0 = 22/5, \\ u_1^0 + u_2^0 = 1. \end{cases}$$

Отсюда оптимальная стратегия игрока B: $z_1^0 = {}^1/_5$; $z_2^0 = {}^4/_5$. Следовательно, решением игры будут смешанные стратегии $u^0 = ({}^2/_5;\ {}^3/_5)$, $z^0 = ({}^1/_5;\ {}^4/_5)$ с ценой игры $\upsilon = {}^{22}/_5$.

9.2. ОЦЕНКА РИСКА В «ИГРАХ С ПРИРОДОЙ»

В случае, когда между сторонами (участниками) отсутствует «антагонизм» (например, в процессе работы предприятий и торговых посредников), такие ситуации называют **«играми с природой»**.

Здесь первая сторона принимает решение, а вторая сторона — «природа» — не оказывает первой стороне сознательного, агрессивного противодействия, но ее реальное поведение неизвестно.

Пусть торговое предприятие имеет m стратегий: $\text{Т}_1, \text{Т}_2, \ldots, \text{Т}_m$ и имеется n возможных состояний природы: $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$. Так как природа не является заинтересованной стороной, исход любого сочетания поведения сторон можно оценить выигрышем b_{ij} первой стороны для каждой пары стратегий Т_i и Π_j. Все показатели игры заданы платежной матрицей $\{b_{ij}\}_{m \times n}$.

По платежной матрице можно принять ряд решений. Например, оценить возможные исходы: **минимальный выигрыш**

$$\text{В}_i^{\min} = \min_j \text{В}_{ij},$$

т. е. наименьшая из величин в каждой i-й строке как пессимистическая оценка; **максимальный выигрыш** — то наилучшее, что дает выбор i-го варианта

$$\text{В}_i^{\max} = \max_j \text{В}_{ij}.$$

При анализе «игры с природой» вводится показатель, по которому оценивают, насколько то или иное состояние «природы» влияет на исход ситуации. Этот показатель называют **риском**.

Риск r_{ij} при пользовании стратегией Т_i и состоянии «природы» Π_j оценивается разностью между максимально возможным выигрышем при данном состоянии «природы» $\text{В}_i^{\max}$ и выигрышем В_{ij} при выбранной стратегии Т_i:

$$r_{ij} = \text{В}_i^{\max} - \text{В}_{ij}.$$

Исходя из этого определения можно оценить максимальный риск каждого решения:

$$r_i^{\max} = \max_j r_{ij}$$

Решения могут приниматься по результатам анализа ряда критериев.

1. Критерий, основанный на известных вероятностных состояниях «природы».

Если известны вероятности состояний «природы» (например, спроса по данным анализа за прошлые годы):

$$P_1 = P(\text{П}_1);\ P_2 = P(\text{П}_2);\ \ldots,\ P_n = P(\text{П}_n),$$

полагая, что $P_1 + P_2 + \ldots + P_j + \ldots + P_n = 1$.

Тогда в качестве показателя эффективности (рациональности, обоснованности) стратегии Т_i берется среднее (математическое ожидание) — выигрыш применения этой стратегии:

$$\overline{\text{В}}_i = \sum_{j=1}^{n} \text{В}_{ij} P_j,$$

а оптимальной считают стратегию, для которой этот показатель эффективности имеет максимальное значение, т. е.

$$\overline{\text{В}} = \max_i \overline{\text{В}}_i.$$

Если каждому решению Т_i соответствует множество возможных результатов В_{ij} с вероятностями P_{ij}, то среднее значение выигрыша определится

$$\overline{\text{В}}_i = \sum_{j=1}^{n} \text{В}_{ij} P_{ij},$$

а оптимальная стратегия выбирается по условию

$$\overline{\text{В}} = \max_i \overline{\text{В}}_i.$$

В этом случае можно воспользоваться и стратегией минимального среднего риска для каждого i-го состояния «природы»

$$\overline{r} = \min_i \overline{r}_i = \min_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} P_{ij}.$$

2. Максиминный критерий Вальда. Здесь выбирается решение торговой организации, при котором гарантируется максимальный выигрыш в наихудших условиях внешней среды (состояния «природы»):

$$W = \max_i \min_j \text{В}_{ij} = \max_i \text{В}_i^{\min}.$$

3. Критерий пессимизма–оптимизма Гурвица. Здесь представляется логичным, чтобы при выборе решения вместо двух крайностей в оценке ситуации (оптимизм–пессимизм) придерживаться некоторого компромисса, учитывающего возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения «природы». В соответствии с этим компромиссным критерием для каждого решения будет линейная комбинация минимального и максимального выигрышей и выбирается тот, для которого эта величина окажется наибольшей:

$$G = \max_i \left[x \min B_{ij} + (1 - x) \max B_{ij}\right],$$

где x — показатель пессимизма–оптимизма (чаще всего 0,5).

4. Критерий минимаксного риска Сэвиджа. Здесь выбирают ту стратегию, при которой величина риска имеет минимальное значение в самой неблагоприятной ситуации:

$$S = \min_i \max_j r_{ij},$$

чтобы избежать слишком большого риска при выборе решения.

Комплексный анализ всех этих критериев позволяет в какой-то мере оценить возможные последствия принимаемых решений.

Пример 3. Известна матрица условных вероятностей P_{ij} продажи старых товаров C_1, C_2, C_3 при наличии новых товаров H_1, H_2, H_3 (табл. 60).

Таблица 60

Старые товары	Новые товары		
	H_1	H_2	H_3
C_1	0,6 9	0,3 6	0,6 4
C_2	0,2 8	0,7 3	0,2 7
C_3	0,1 5	0,4 5	0,5 8

Определить наиболее выигрышную политику продаж.

Решение. Минимальный выигрыш

$$\text{В}_i^{\min} = \min_j \text{В}_{ij}.$$

Минимальный выигрыш при продаже старого товара

$$C_1 : \text{В}_1^{\min} = \min_{j=1,\ldots,3} \{\text{В}_{11}, \text{В}_{12}, \text{В}_{13}\} = \min\{9, 6, 4\} = 4 = \text{В}_{13}.$$

$$C_2 : \text{В}_2^{\min} = \min\{8, 3, 7\} = 3 = \text{В}_{22},$$

$$C_3 : \text{В}_3^{\min} = \min\{5, 5, 8\} = 5 = \text{В}_{31},$$

где B_{12}, B_{22}, B_{31} образуют систему пессимистических оценок выигрыша от продаж старых товаров.

Максимальный выигрыш при продаже старых товаров:

$$C_1 : B_1^{\max} = \max_{j=1,\dots,3} \{B_{11}, B_{12}, B_{13}\} = 9 = B_{11},$$

$$C_2 : B_2^{\max} = \max_{j=1,\dots,3} \{B_{21}, B_{22}, B_{23}\} = 8 = B_{21},$$

$$C_3 : B_3^{\max} = \max\{5, 5, 8\} = 8 = B_{33},$$

где B_{11}, B_{21}, B_{33} образуют систему оптимистических оценок выигрыша от продаж старых товаров.

При анализе «игры с природой» вводится показатель влияния какого-либо состояния «природы» на исход продаж, т. е. **показатель риска:**

$$r_{ij} = B_i^{\max} - B_{ij},$$

каждый из которых составит матрицу рисков (табл. 61).

Таблица 61

Товары	H_1	H_2	H_3
C_1	0	3	5
C_2	0	5	1
C_3	3	3	0

Максимальное значение риска для каждого решения:

$$r_i^{\max} = \max_j r_{ij},$$

т. е. при продаже товаров:

$$C_1 : r_1^{\max} = \max_{j=1,\dots,3} \{r_{11}, r_{12}, r_{13}\} = \max\{0, 3, 5\} = 5 = r_{13},$$

$$C_2 : r_2^{\max} = \max\{0, 5, 1\} = 5 = r_{22},$$

$$C_3 : r_3^{\max} = \max\{3, 3, 0\} = 3 = r_{31}.$$

Решения о плане продаж принимается исходя из анализа системы критериев.

Критерий по известным вероятностным состояниям «природы» P_{ij}: оптимальной считают стратегию, для которой этот показатель наибольший, т. е.

$$\bar{B} = \max_i \bar{B}_i,$$

где $\bar{B}_i$ — математическое ожидание выигрыша при i-й стратегии:

$$\bar{B}_i = \sum_{j=1}^{3} B_{ij} P_{ij},$$

где B_{ij} — результат (выигрыш при применении ij-й стратегии):

$$\bar{B}_1 = 9 \cdot 0,6 + 6 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,1 = 7,6,$$

$$\bar{B}_2 = 8 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,7 + 7 \cdot 0,1 = 4,4,$$

$$\bar{B}_3 = 5 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,5 = 6,5.$$

Тогда

$$\bar{B} = \max_i \{B_i\} = \max\{7,6; 4,4; 6,5\} = 7,6 = \bar{B}_1,$$

т. е. оптимальной стратегией по этому критерию будет продажа изделия C_1.

Максиминный критерий Вальда:

$$W = \max_i \min_j B_{ij} = \max_i B_i^{\min},$$

$$W = \max_i \{B_1^{\min}, B_2^{\min}, B_3^{\min}\} = \max\{6, 3, 5\} = 6 = B_1^{\min},$$

то есть при продаже изделия C_1 гарантируется выигрыш даже в наихудших условиях.

Критерий пессимизма–оптимизма Гурвица:

$$G = \max_i [x B_i^{\min} + (1 - x) B_i^{\max}],$$

где x — доля оптимизма–пессимизма (0,5).

$$G = \max_i [0,5\{6, 3, 5\} + 0,5\{9, 8, 8\}] = \max\{(3 + 4,5),$$

$$(1,5 + 4); (2,5 + 4)\} = \max\{7,5; 5,5; 6,5\} = 7,5,$$

т. е. исходя из уравновешенной точки зрения принимается решение о продажах C_1.

Критерий минимаксного риска Сэвиджа, по которому принимают решение минимальным значением риска в самой неблагоприятной ситуации:

$$S = \min_i \max_j r_{ij} = \min_i r_i^{\max},$$

где $r_i^{\max}$ вычислена по матрице рисков.

$$S = \min_i \{r_1^{\max}, r_2^{\max}, r_3^{\max}\} = \min\{5, 5, 3\} = 3,$$

что соответствует целесообразности в смысле этого критерия продажам изделия C_3.

Комплексный анализ всех критериев позволяет предположить, что наилучшей стратегией продаж будет продажа изделий H_1, H_2, H_3, C_1, C_3. Изделие C_2 должно быть снято с продаж.

9 3.
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ

Пример 4. Решить игру, заданную матрицей.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} & \end{array}$$

Р е ш е н и е. На плоскости UOZ вводится система координат OZ и OU. На оси OU откладывается отрезок единичной длины A_1A_2, каждой точке которого ставится в соответствие некоторая смешанная стратегия $U = (u_1, u_2) = (u_1, 1 - u_1)$

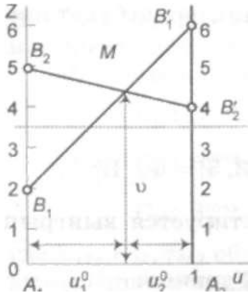


Рис. 30

(рис. 30). Например, точке $A_1(0; 1)$ соответствует стратегия A_1, точке $A_2(1; 0)$ — стратегия A_2 и т. д.

В точках A_1, A_2 восстанавливаются перпендикуляры, на которых откладываются выигрыши игроков. На первом перпендикуляре (совпадающем с осью OZ) откладывается выигрыш игрока A при стратегии A_1, на втором — при стратегии A_2.

Если игрок A применяет стратегию A_1, то его выигрыш при стратегии B_1 игрока B равен 2, а при стратегии B_2 он равен 5 (точки B_1 и B_2 на оси OZ).

Если игрок A применяет стратегию A_2, то его выигрыш при стратегии B_1 игрока B равен 6, а при стратегии B_2 он равен 4 (точки B_1' и B_2' на перпендикуляре из точки A_2).

Соединяя между собой точки B_1 и B_1', B_2 и B_2', получим две прямые, расстояние до которых от оси OU определяет средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий. Например, расстояние от любой точки отрезка B_1B_1' до оси OU определяет средний выигрыш υ_1 при любом сочетании стратегий A_1 и A_2 (с частотами u_1 и u_2) и стратегии B_1 игрока B. Это расстояние равно $2u_1 + 6u_2 = \upsilon_1$. Аналогично, средний выигрыш при стратегии B_2 определяется ординатами точек отрезка B_2B_2'.

Таким образом, ординаты точек, принадлежащих ломаной B_1MB_2', определяют минимальный выигрыш игрока A при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина $(\min\limits_j a_{ij})$ является максимальной в точке

$$M(\max_i \min_j a_{ij}).$$

Следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$, а ее ордината равна цене игры υ. Координаты точки M находятся как координаты точки пересечения прямых B_1B_1' и B_2B_2':

$$\begin{cases} 2u_1^0 + 6u_2^0 = \upsilon, \\ 5u_1^0 + 4u_2^0 = \upsilon, \\ u_1^0 + u_2^0 = 1. \end{cases}$$

Решение этих уравнений:

$$u_1^0 = 2/5;\ u_2^0 = 3/5;\ \upsilon = 22{,}5.$$

Аналогично определяется оптимальная стратегия для игрока В из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2z_1^0 + 5z_2^0 = 22/5, \\ z_1^0 + z_2^0 = 1. \end{cases} \quad \text{или } z_1^0 = 1/5;\ z_2^0 = 4/5.$$

Решение игры — смешанные стратегии $u^0 = (^2/_5;\ ^3/_5)$, $z^0 = (^1/_5;\ ^4/_5)$, $\upsilon = {}^{22}/_5$.

Обобщая решение игровых задач размерностью $2 \times n$ и $n \times 2$, можно выделить этапы:

1) строят прямые, соответствующие стратегиям второго (первого) игрока;

2) определяют нижнюю (верхнюю) границу выигрыша;

3) находят две стратегии второго (первого) игрока, которым соответствуют две прямые, пересекающиеся в точке с минимальной (максимальной) ординатой;

4) определяют цену игры и оптимальные стратегии.

Пример 5. Решить игру, заданную матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Строим прямые — стратегии второго игрока B_1B_1', B_2B_2', B_3B_3' (рис. 31).

Ломаная B_1MB_2' соответствует нижней границе выигрыша игрока B, т. е.

$$z_1^0 = 1/3;\ z_2^0 = 2/3;\ \upsilon = 8.$$

В точке M с минимальной ординатой пересекаются прямые B_1B_1', B_2B_2', которым соответствуют стратегии игрока A:

$$\begin{cases} 7u_1 + 9u_2 = \upsilon, \\ u_1 + u_2 = 1, \end{cases} \text{т. е. } u_1^0 = u_2^0 = 1/2.$$

Следовательно, решение игры: $u^0 = (^1/_2;\ ^1/_2;\ 0)$, $z^0 = (^1/_3;\ ^2/_3)$, цена игры $\upsilon = 8$.

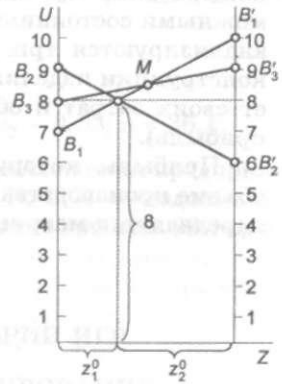


Рис. 31

Пример 6. Решить игру, заданную матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Строим прямые — стратегии первого игрока (рис. 32). Ломаная A_1MA_4' соответствует верхней границе выигрыша игрока A,

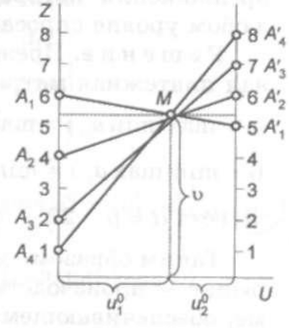


Рис. 32

получим: $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 \geq 1 \ (j = 1, \ldots, n), \\ y_i^0 \geq 1 \ (i = 1, \ldots, m; \ \upsilon > 0), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} y_i^0 = \dfrac{1}{\upsilon}. \end{cases}$

Так как первый игрок стремится получить максимальный выигрыш, то он должен обеспечить минимум величине $^1/_\upsilon$. С учетом этого определение оптимальной стратегии сводится к нахождению минимума функции

$$L_1 = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1 \ (j = 1, \ldots, n); \ y_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m).$$

Аналогично определение оптимальной стратегии второго игрока сводится к нахождению максимума функции

$$L_2 = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \ (i = 1, \ldots, m); \ x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n), \text{ где } = z_j / \upsilon.$$

Таким образом, чтобы найти решение данной игры по матрице A, нужно составить следующую пару двойственных задач и найти их решение.

Прямая задача

$$\max L = \sum_{j=1}^{n} x_j, \quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 & (i = 1, \ldots, m), \\ x_j \geq 0 & (j = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Двойственная задача

$$\min L = \sum_{i=1}^{m} y_i, \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1 & (j = 1, \ldots, n), \\ y_i \geq 0 & (i = 1, \ldots, m). \end{cases}$$

Используя решения пары задач, можно выявить оптимальные стратегии и цену игры:

$$u_i^0 = \frac{y_i^0}{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^0} = \upsilon y_i^0, \qquad z_j^0 = \frac{x_j^0}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^0} = \upsilon x_j^0,$$

$$\upsilon = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^0} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^0} \ (i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n).$$

Итак, решение игры с использованием методов линейного программирования включает этапы:

1) составляют пару двойственных задач, эквивалентных данной игре;

2) определяют оптимальные планы двойственных задач;

3) находят решение игры по соотношениям между планами задач, оптимальными стратегиями и ценой игры.

Пример 9. Найти решение игры, определяемой матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Пара двойственных задач:

Прямая задача

$$\max L = x_1 + x_2 + x_3, \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_3 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \\ x_0 = (0; 1/2; 1). \end{cases}$$

Двойственная задача

$$\min L = y_1 + y_2 + y_3, \quad \begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 2y_1 + y_3 \geq 1, \\ y_2 \geq 1, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0, \\ y_0 = (1/2; 1; 0). \end{cases}$$

Из решения пары задач:

$$\upsilon = \frac{1}{1/2 + 1} = \frac{1}{1/2 + 1} = \frac{2}{3}, \qquad u^0 = (^1/_3; \ ^2/_3; \ 0), \quad z^0 = (0; \ ^1/_3; \ ^2/_3).$$

Таким образом, если для всякой матричной игры можно записать симметричную пару двойственных задач, то и для всякой симметричной пары двойственных задач можно записать матричную игру.

Пусть задана симметричная пара двойственных задач:

$$\left\{ \begin{matrix} \max L = CX, & \min L = BY, \\ AX \leq B, & A^{\mathrm{T}} Y \geq C, \\ X \geq 0. & Y \geq 0. \end{matrix} \right\}.$$

Тогда этой паре двойственных задач можно поставить в соответствие игру, определяемую матрицей:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & A & -B \\ -A^{\blacklozenge} & 0 & C^{\blacklozenge} \\ B^{\blacklozenge} & -C & 0 \end{pmatrix}.$$

Если каждая матричная игра имеет оптимальные стратегии, то не всякая задача линейного программирования имеет решения.

Пример 10.

$$\max(2x_1+3x_2), \quad \min(10y_1+12y_2),$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2\le 10,\\ -x_1+3x_2\le 12,\\ x_1,x_2\ge 0.\end{cases} \quad \begin{cases}2y_1-y_2\ge 2,\\ y_1+3y_2\ge 3,\\ y_1,y_2\ge 0.\end{cases} \quad L^0=19{,}71;\quad x^0=\begin{pmatrix}2{,}5714\\4{,}8571\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix},\quad A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}10\\12\end{pmatrix},\quad B^{\mathrm{T}}=(10;12),$$

$$C=(2;3),\quad C^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Тогда матрица игры будет

$$D=\begin{pmatrix}0&0&2&1&-10\\0&0&-1&3&-12\\-2&1&0&0&2\\-1&-3&0&0&3\\10&12&-2&-3&0\end{pmatrix}.$$

9.5. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Найти решение игр по примерам 10.1.–10.7. сведением к задачам линейного программирования.

Задание 2. Дана матрица игры

$$A=\begin{pmatrix}7&6&7&5\\6&7&9&8\\5&8&4&6\end{pmatrix}.$$

Определить нижнюю и верхнюю цены, седловую точку, составить двойственную пару задач линейного программирования.

Задание 3. Решить игру, заданную матрицей A.

$$3.1)\begin{pmatrix}3&5&1&4&6\\7&4&9&5&3\end{pmatrix},\quad 3.2)\begin{pmatrix}3&5&9&7&4\\6&4&1&3&5\end{pmatrix},\quad 3.3)\begin{pmatrix}3&4&5\\7&6&4\end{pmatrix},$$

$$3.4)\begin{pmatrix}7&6&7&5\\6&7&9&8\\5&8&4&6\end{pmatrix},\quad 3.5)\begin{pmatrix}8&4&7\\6&5&9\\7&7&8\end{pmatrix},\quad 3.6)\begin{pmatrix}4&7\\9&3\\5&9\\6&9\end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 10

ТЕОРИЯ ОЧЕРЕДЕЙ

Математика подобна мясорубке, она может переработать любое мясо, но для того, чтобы получить хорошие котлеты, нужно и хорошее мясо.

Гексли

Один воин вышел из город* и проходил по 12 верст в день, А **другой вышел одновременно и шел так: в первый день прошел 1 версту, во второй день 2 версты, в третий день 3 версты, в четвертый 4 версты, в пятый 5 верст и тлк** ПРИБАВЛЯЛ КАЖДЫЙ **день по версте,** ПОКА **не** НАСТИГ **первого. Через сколько дней второй воин илстигиет первого?**

ОтАрИННАЯ ЗАДАЧА

10.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ОЧЕРЕДЕЙ

Многие экономические задачи связаны с системами массового обслуживания, в которых происходит удовлетворение требований на выполнение каких-либо услуг.

Исследованием систем массового обслуживания занимается теория очередей, на начальное развитие которой оказали особое влияние труды датского ученого А. К. Эрланга (1878-1929) в области проектирования и эксплуатации телефонных станций.

Общая схема системы массового обслуживания показана на рисунке 33.

Требование на обслуживание (например, неисправный автомобиль) поступает в обслуживающую систему (автомастерскую). Если есть свободные *каналы обслуживания* (мастера), то требование выполняется. Если все каналы заняты, то требование ставится в *очередь* по определенным правилам или покидает систему не обслуженным.

Основная задача теории массового обслуживания сводится к определению оптимального соотношения между входным потоком требований и числом обслуживающих каналов, при котором общие суммарные затраты минимальны.

Рис. 33

Общие суммарные затраты складываются из затрат обслуживания и затрат ожидания, причем по мере увеличения сервиса затраты обслуживания увеличиваются, а затраты ожидания уменьшаются.

Систему массового обслуживания можно описать, задавая следующие ее компоненты: входной поток требований, дисциплину очереди и механизм обслуживания.

Входной поток требований характеризуется вероятностным законом распределения моментов поступления требований в систему и количеством требований в каждом поступлении.

В настоящее время теоретически наиболее разработаны и удобны в практических приложениях методы решения таких задач теории очередей, в которых поток требований является простейшим (пуассоновским).

Простейший поток событий обладает тремя свойствами:

Ш *стационарностью* — постоянным количеством событий в единицу времени;

Ш *отсутствием последействия* — независимостью количества событий после любого момента времени от количества событий до него;

ш *ординарностью* — практической невозможностью одновременного поступления нескольких требований.

Для простейшего потока частота наступления событий подчиняется закону Пуассона, т. е. вероятность того, что за время t произойдет k событий, определится:

$$P_k(t) = \frac{l^k}{k!} e^{-l},$$

где X — количество событий в единицу времени (интенсивность потока).

Вероятность выхода из строя одной установки (k = 1) при отказе в среднем в единицу времени двух установок ($\lambda = 2$)

$$P_k(t) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 0,27.$$

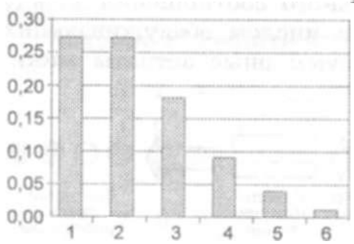


Рис. 34

Вероятность отсутствия вышедших из строя установок за любой случайный час — 13%, вероятность выхода из строя одной установки — 27%, двух — 27%, трех — 18%, четырех — 9% и т. д. (рис. 34).

По теореме сложения вероятностей, вероятность суммы независимых событий равна сумме вероятностей этих событий, отсюда вероятность отказа в единицу времени не более четырех установок равна сумме вероятности отсутствия отказа и вероятностей отказа одной, двух, трех, четырех установок:

$$P(k \le 4) = \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} + \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} + \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} + \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} + \frac{2^4}{4!} \cdot e^{-2} = 0,945.$$

Вероятность отказа более четырех установок

$$P(m > 4) = 1 - 0,945 = 0,055.$$

Дисциплина очереди описывает порядок обслуживания требований в системе. Длина очереди может быть ограниченной или неограниченной. Правила постановки в очередь: *FIFO* — «первым пришел первым обслуживаешься», *LIFO* — «последним пришел первым обслуживаешься», по другим приоритетам или случайно.

Механизм обслуживания характеризуется продолжительностью процедур обслуживания и количеством одновременно обслуживаемых требований.

Время обслуживания требований в системе является случайной величиной и обычно описывается *экспоненциальным законом распределения*, т. е. распределение длительности оставшейся части работ по обслуживанию не зависит от того, сколько оно уже продолжалось.

Вероятность того, что время обслуживания не превосходит некоторой величины t, определяется формулой:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

где μ — величина, обратная среднему времени обслуживания.

Введем в рассмотрение параметр α — коэффициент загрузки системы или среднее число каналов, которое необходимо иметь, чтобы обслуживать в единицу времени все поступающие требования:

$$\alpha = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = \lambda \cdot T_{обс},$$

где λ — среднее число требований, поступающих в единицу времени; μ — среднее число требований, удовлетворяемых в единицу времени; $T_{обс}$ — среднее время обслуживания одним каналом одного требования.

Заметим, что если α меньше количества каналов обслуживания, то очередь не может расти безгранично, т. е. число обслуживающих каналов должно быть больше среднего числа каналов, необходимых для того, чтобы за единицу времени обслужить все поступившие требования.

Различают следующие виды систем массового обслуживания.

В зависимости от условий ожидания требованием начала обслуживания различают системы массового обслуживания с отказами и с ожиданием.

В системах с отказами требования, поступающие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ и утрачиваются.

В системах с ожиданием требование, застав все обслуживающие каналы занятыми, ставится на очередь вплоть до освобождения любого из каналов.

Системы, допускающие очередь, но с ограниченным числом требований в ней, называются системами с ожиданием и ограниченной длиной очереди.

Системы, допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней, называются системами с ограниченным временем ожидания.

Системы массового обслуживания, допускающие очередь, но с ограниченным числом циркулирующих в системе требований, называются системами с ограниченным потоком требований.

По числу каналов обслуживания различают одноканальные и многоканальные системы.

По числу фаз обслуживания — однофазные и многофазные (последовательная обработка требований на нескольких каналах).

10.2. СИСТЕМА С ОТКАЗАМИ

Система массового обслуживания с отказами не допускает образования очереди поступающих работ. Если в момент поступления очередного требования в системе все каналы заняты, то требование покидает систему. Если имеется свободный канал, то он немедленно приступает к обслуживанию поступившего требования.

Каждый из n каналов может одновременно обслуживать только одно требование и все каналы функционируют независимо.

В систему поступает простейший (пуассоновский) поток требований с параметром ***X***. Время обслуживания каждого требования является случайной величиной, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром ц.

Состояние такой системы описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_0(t), \\ P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)P_k(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), \quad 1 \le k \le n-1, \\ P_n'(t) = \lambda P_{n-1}(t) - n\mu P_n(t), \end{cases}$$

где $P_k(t)$ — вероятность того, что в системе в момент времени t занято k каналов обслуживания.

1. Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!}}.$$

2. Вероятность того, что в системе находится k требований:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot P_0.$$

3. Вероятность того, что все обслуживающие каналы заняты:

$$P_n = \frac{\alpha^n}{n!} \cdot P_0.$$

4. Среднее число свободных от обслуживания каналов:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)P_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \cdot \alpha^k \cdot P_0.$$

5. Коэффициент простоя каналов:

$$K_{\text{пр}} = N_0/n.$$

6. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$N_{\text{з}} = n - N_0 = \alpha(1 - P_n).$$

7. Коэффициент загрузки каналов:

$$K_{\text{з}} = N_{\text{з}}/n.$$

Для данного класса систем массового обслуживания решаются задачи выбора оптимального количества аппаратов, подбора параметров обслуживающего комплекса, расчета пропускной способности системы и др.

Экономическая оценка вариантов системы имеет вид:

$$J = a \cdot c_1 \cdot n + c_2 \cdot N_{\text{з}} + \\ + c_3 \cdot (n - N_{\text{з}}) + c_4 \cdot T \cdot P_n \cdot \lambda$$

где a — норма амортизации; c_1 — цена канала обслуживания; c_2 и c_3 — текущие затраты на обслуживание работающего и простаивающего канала; c_4 — потери производства от невыполнения одной работы (потери одного отказа), T — годовой фонд рабочего времени системы.

Пример 1. Фирма имеет $n = 4$ телефонных диспетчеров. Среднее число вызовов в течение часа составляет $\lambda = 96$. Среднее время телефонного разговора $T_{обс} = 2$ минуты. Определить степень загрузки диспетчеров и вероятность отказа в обслуживании.

Решение. Определим параметр системы

$$\alpha = 96 \cdot \frac{2}{60} = 3,2.$$

1. Вероятность того, что все диспетчеры свободны:

$$P_0 = \frac{1}{\dfrac{3,2^0}{0!} + \dfrac{3,2^1}{1!} + \dfrac{3,2^2}{2!} + \dfrac{3,2^3}{3!}} = 0,068.$$

2. Вероятность того, что все диспетчеры заняты (вероятность отказа):

$$P_n = \frac{3,2^4}{4!} \cdot 0,068 = 0,3,$$

т. е. клиент не сможет дозвониться с первого раза в 30 случаях из 100.

3. Среднее число занятых диспетчеров:

$$N_з = 3,2 \cdot (1 - 0,3) = 2,24.$$

4. Коэффициент загрузки каналов:

$$K_з = 2,24/4 = 0,56.$$

Следовательно, каждый диспетчер будет занят в среднем 0,62 рабочего дня.

Задание 1. Определить оптимальное число аппаратов автоматического контроля качества деталей. Если очередная деталь, двигающаяся по конвейеру, застает все контролирующие аппараты занятыми, то она проходит на отгрузку без контроля. Цена аппарата 10 000 руб., эксплуатационные расходы на содержание работающего аппарата 200 руб./сутки, а простаивающего — 100 руб./сутки. Потери потребителя от возможного получения бракованной детали — 20 руб. Время контроля одной штуки проката распределено по экспоненциальному закону с параметром $\mu = 0,2\ ^1/_{мин}$. Поток деталей является простейшим с параметром $\lambda = 0,8\ ^1/_{мин}$.

Задание 2. Для повышения качества проката после стана установлены две машины зачистки поверхности металла. Если очередная штука проката застает зачистные машины занятыми, то она проходит на отгрузку без зачистки. Это позволяет не останавливать предшествующий технологический поток и давать максимальное количество проката. Однако зачистка поверхности дает возможность повысить цену на 5 руб./шт.

Требуется оценить работу системы, если цена зачистной машины 10 ООО руб., затраты на зачистку 0,5 руб./ч, затраты на один час простоя машины 0,2 руб., годовой фонд работы машины 6000 ч, время зачистки одной штуки проката распределено по экспоненциальному закону с параметром 0,1 $^1/_ч$, поток проката простейший с параметром 0,05 $^1/_ч$.

Рассмотреть возможность установки третьей зачистной машины.

Задание 3. Определить оптимальное число ячеек в нагревательном отделении обжимного цеха. Будем считать, что слитки поступают по одному и емкость ячейки один слиток. Если очередной слиток застает все ячейки заняты-ми, то он отправляется на склад холодных слитков. В последующем нагрев этого слитка потребует дополнительных затрат 40 руб. Цена одной ячейки 100 руб., затраты на обслуживание ячейки при работе 2 руб./ч и при простое — 1 руб./ч, годовой фонд работы ячейки 6000 ч.

Сделать анализ влияния числа ячеек на экономическую оценку работы нагревательного отделения, если поток слитков является простейшим с параметром 30 шт./ч, а время нахождения слитка в ячейке распределено по экспоненциальному закону с параметром 1 шт./ч.

10.3. СИСТЕМА С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ДЛИНОЙ ОЧЕРЕДИ

Системы массового обслуживания с неограниченной длиной очереди предполагают ограниченное число каналов обслуживания в системе и неограниченную возможность для образования очереди требований, поступающих на обслуживание. Каждый канал может выполнять только одну работу. Если в момент поступления очередного требования все каналы заняты, то оно становится в очередь и ожидает начала обслуживания.

В систему поступает простейший (пуассоновский) поток требований с параметром ***X***. Время обслуживания каждого требования является случайной величиной, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром р.

Состояние такой системы описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)P_k(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), & 1 \le k < n, \\ P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + n\mu)P_k(t) + n\mu P_{k+1}(t), & k \ge n, \end{cases}$$

где n — число каналов обслуживания в системе; $P_k(t)$ — вероятность того, что в системе в момент времени t занято k каналов обслуживания.

1. Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны:

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!(1-\alpha/n)}}.$$

2. Вероятность того, что в системе находится k требований, в случае, когда их число не превосходит числа обслуживающих аппаратов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot P_0 \text{ при } 1 \le k \le n.$$

3. Вероятность того, что в системе находится k требований, в случае, когда их число больше числа обслуживающих каналов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n!\,n^{k-n}} \cdot P_0 \text{ при } k \ge n.$$

4. Вероятность того, что все обслуживающие каналы заняты:

$$P_n = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \frac{\alpha^n}{n!(1-\alpha/n)} \cdot P_0;\ \alpha/n < 1.$$

5. Среднее число требований в системе:

$$L_s = \frac{\lambda \cdot \mu \cdot \alpha^n}{(n-1)!(1-\alpha/n)^2} \cdot P_0 + \alpha.$$

6. Среднее время пребывания в системе:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}.$$

7. Средняя длина очереди:

$$L_q = \frac{\alpha}{n(1-\alpha/n)} \cdot P_n = L_s - \alpha.$$

8. Среднее время пребывания в очереди:

$$W_q = \frac{P_n}{\mu(n-\alpha)} = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda}.$$

9. Среднее число свободных от обслуживания каналов:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)P_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \cdot \alpha^k \cdot P_0.$$

Для данного класса систем массового обслуживания решаются задачи выбора оптимального числа аппаратов, определения размеров очереди и соответствующих складских площадей, расчета пропускной способности системы и др.

Экономическая оценка вариантов системы имеет вид:

$$J = a \cdot c_1 \cdot n + c_2 \cdot N_0 + c_3 \cdot (n - L) + c_4 \cdot T,$$

где a — норма амортизации; c_1 — цена канала обслуживания; c_2 и c_3 — текущие затраты на обслуживание работающего и простаивающего канала; c_4 — затраты на содержание ожидающих требований в единицу времени; T — годовой фонд рабочего времени системы.

Пример 2. Пусть фирма по ремонту аппаратуры имеет $n = 5$ опытных мастеров. В среднем в течение рабочего дня от населения поступает в ремонт $\lambda = 10$ аппаратов. Общее число аппаратов, находящихся в эксплуатации у населения, очень велико, и они независимо друг от друга в различное время выходят из строя. Поэтому есть все основания полагать, что поток заявок на ремонт аппаратуры является случайным, пуассоновским. В свою очередь, каждый аппарат в зависимости от характера неисправности также требует случайного времени на ремонт. Время на проведение ремонта зависит во многом от серьезности полученного повреждения, квалификации мастера и множества других причин. Статистика показала, что в среднем в течение рабочего дня каждый из мастеров успевает отремонтировать $\mu = 2{,}5$ аппарата.

Требуется оценить характеристики работы фирмы по ремонту аппаратуры.

Решение. Определим параметр системы

$$\alpha = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = 10 \cdot \frac{1}{2{,}5} = 4,$$

так как $4 < 5$, то очередь не может расти безгранично, следовательно, фирма справляется с входящим потоком требований на ремонт аппаратуры.

1. Вероятность того, что все мастера свободны от ремонта:

$$P_0 = \frac{1}{1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!(1-4/5)}} = 0{,}013.$$

3. Вероятность того, что все мастера заняты ремонтом:

$$P_n = \frac{4^5}{5!(1-5)} \cdot 0{,}013 = 0{,}554,$$

т. е. 55,4% времени мастера полностью загружены работой.

4. Среднее время обслуживания каждым мастером одного аппарата при восьмичасовом рабочем дне:

$$T_{обс} = \frac{1}{\mu} = \frac{8}{2{,}5} = 3{,}2 \text{ ч}.$$

5. Среднее время ожидания каждым неисправным аппаратом начала ремонта:

$$T_{\text{ож}} = \frac{0,554 \cdot 3,2}{5-4} = 1,77 \text{ ч.}$$

6. Средняя длина очереди:

$$L_q = \frac{4}{5(1-4/5)} \cdot 0,554 = 2,2 \text{ аппарата.}$$

7. Среднее число мастеров, свободных от работы:

$$N_0 = 0,013 \cdot \left(\frac{5-0}{1} \cdot 1 + \frac{5-1}{1!} \cdot 4 + \frac{5-2}{2!} \cdot 4^2 + \frac{5-3}{3!} \cdot 4^3 + \frac{5-4}{4!} \cdot 4^4 \right) = 0,95.$$

Пример 3. Механик из мастерской может обслужить 3 автомобиля за 1 час. Клиенты появляются по 2 человека в час. Требуется оценить параметры одноканальной системы массового обслуживания с ожиданием и неограниченной длиной очереди.

Как изменятся параметры системы, если в мастерской будет два механика, зарплата каждого из них 7 руб./ч, а затраты клиента 10 руб./ч?

Решение. Определим параметр системы

$$\alpha = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = 2 \cdot \frac{1}{3} = 0,67,$$

т. е. механик занят 67% времени.

1. Вероятность отсутствия требований в системе

$$P_0 = 1 - \alpha = 1 - 0,67 = 0,33.$$

2. Вероятность того, что в системе находится более $k = 3$ требований:

$$P_{n>k} = \alpha^{k+1} = 0,67^{3+1} = 0,132,$$

то есть в 13,2% случаев в мастерской — более трех автомобилей.

3. Среднее число требований в системе:

$$L_s = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)} = \frac{2}{3-2} = 2 \text{ автомобиля.}$$

7. Среднее время пребывания в системе:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3-2} = 1 \text{ ч.}$$

8. Средняя длина очереди:

$$L_q = L_s - \alpha = 2 - 0,67 = 1,33 \text{ автомобиля.}$$

9. Среднее время пребывания в очереди:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,33}{2} = 0,67 \text{ ч, или 40 мин.}$$

Результаты расчетов приведены в таблице 62.

При наличии двух мастеров время пребывания в очереди существенно сокращается и суммарные затраты меньше. Следовательно, целесообразнее иметь двухканальную систему, чем одноканальную.

Задание 4. Определить оптимальное число причалов промышленного речного порта, принимающего сыпучие материалы. Поток поступления барж простейший с параметром 0,5 шт./сутки. Время разгрузки одной баржи подчинено экспоненциальному закону распределения с параметром 0,5 шт./сутки. Цена оборудования одного причала 100 000 руб., текущие затраты на содержание работающего причала 400 руб./сутки, а простаивающего — 200 руб./сутки, приведенные затраты на содержание груженой баржи 1000 руб./сутки. Если груз с момента прибытия ожидает более двух суток, то условия его разгрузки усложняются и связаны с дополнительными затратами в 600 руб.

. Задание 5. Определить оптимальное число станков в мастерской, если цена одного станка 20 000 руб., среднее время обработки одного комплекта деталей 4 ч, текущие затраты на обслуживание работающего станка 5 руб./ч, а неработающего — 3 руб./ч, содержание запаса деталей 0,2 руб./ч на один комплект, среднее число деталей, поступающих в обработку 2 комплекта/ч.

Статистический анализ показал, что поток комплектов деталей является простейшим, а время обработки распределено по экспоненциальному закону.

Таблица 62

Параметры	Одноканальная	Многоканальная
P_0	0,33	0,5
L_s	2 автомобиля	0,75 автомобиля
W_s	60 мин	22,5 мин
L_q	1,33 автомобиля	0,083 автомобиля
W_q	40 мин	2,5 мин
Затраты клиента	10 руб./ч · 0,67 ч · 8 ч/день × × 2 авто/ч = 107 руб./день	10 · 0,0415 · 8 · 2 = 7
Затраты мастерской	8 ч/день · 7 руб./ч = 56 руб./день	8 · 7 · 2 = 112
Суммарные затраты	107 + 56 = 163 руб.	112 + 7 = 119

Задание 6. На заводе имеется 5 испытательных стендо# готовых изделий. Статистическим обследованием установлено, что поток готовых изделий — пуассоновский с параметром 5 шт./ч, а время испытания — случайное и распределено по показательному закону с параметром 4 шт./ч. Если все стенды заняты, то изделия ожидают испытаний в порядке очереди. Ограничений на длину очереди нет.

Требуется оценить работу системы, если цена одного стенда 2000 руб., текущие расходы на обслуживание работающего стенда 30, а стоящего 20 руб./сутки, приведенные затраты на содержание ожидающих изделий 10 руб./сутки.

Рассмотреть целесообразность сокращения числа стендов.

10.4. СИСТЕМА С ПОСТОЯННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Пример 4. Грузовики ожидают разгрузки на складе 15 мин. Простой грузовика в очереди обходится в 60 руб./ч. Покупка нового автопогрузчика позволит сократить процесс разгрузки до 5 мин (и = 12 автомобилей в час). В среднем на складе пребывает X = 8 автомобилей в час. Затраты на амортизацию нового погрузчика составляют 3 руб. на разгрузку. Оценить параметры системы.

Решение.

1. Средняя длина очереди:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)} = \frac{8^2}{2\cdot 12\cdot(12-8)} = 0{,}667 \text{ автомобиля.}$$

2. Среднее время пребывания в очереди:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0{,}667}{2} = 0{,}083 \text{ ч или 5 мин.}$$

3. Среднее число требований в системе:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}667 + \frac{8}{12} = 1{,}33 \text{ автомобиля.}$$

4. Среднее время пребывания в системе:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0{,}083 + \frac{1}{12} = 0{,}167 \text{ ч или 10 мин.}$$

Без автопогрузчика затраты ожидания 0,25 ч · 60 руб./ч = = 15 руб./рейс. С автопогрузчиком суммарные затраты (затраты ожидания и амортизация) 0,083 ч · 60 руб./ч + + 3 руб./рейс = 8 руб./рейс. Следовательно, выгоднее поставить автопогрузчик.

10.5. СИСТЕМА С ОГРАНИЧЕННОЙ ДЛИНОЙ ОЧЕРЕДИ

Система состоит из n обслуживающих каналов. Каждый из них может одновременно обслуживать только одно требование. В систему поступает простейший (пуассоновский) поток требований с параметром λ. Если в момент поступления очередного требования все n каналов заняты, то это требование ставится на очередь, при условии, что в ней стоит меньше m требований, иначе — покидает систему. Другими словами, требование получает отказ, если в системе находится $s = n + m$ требований. Время обслуживания каждого требования является случайной величиной, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ.

Состояние такой системы описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), & \\ P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)P_k(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), & 1 \le k < n, \\ P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + n\mu)P_k(t) + n\mu P_{k+1}(t), & k \ge n, \\ P_s'(t) = \lambda P_{s-1}(t) - n\mu P_s(t), & s = n + m, \end{cases}$$

где n — число каналов обслуживания в системе; $P_k(t)$ — вероятность того, что в системе в момент времени t находится k требований.

1. Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны:

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n\cdot\left(1-(\alpha/n)^{m+1}\right)}{n!(1-\alpha/n)}}.$$

2. Вероятность того, что в системе находится k требований, в случае, когда их число не превосходит числа обслуживающих аппаратов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!}\cdot P_0 \text{ при } 1 \le k \le n.$$

3. Вероятность того, что в системе находится k требований, в случае, когда их число больше числа обслуживающих каналов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n!\,n^{k-n}}\cdot P_0 \text{ при } n \le k \le s.$$

4. Вероятность того, что все обслуживающие каналы заняты:

$$P_n = \frac{\left(1-(\alpha/n)^{m+1}\right)\alpha^n}{(1-\alpha/n)\,n!}P_0.$$

5. Вероятность отказа:

$$P_s = \frac{\alpha^s}{n!\,n^{s-n}} P_0.$$

6. Средняя длина очереди:

$$L = \frac{\alpha^n \left(\alpha/n - (m+1)(\alpha/n)^{m+1} - (m+2)(\alpha/n)^{m+2}\right)}{n!(1-\alpha/n)^2} P_0.$$

7. Среднее число свободных от обслуживания каналов:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)P_k = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{k!}\alpha^k P_0.$$

Экономическая оценка вариантов системы имеет вид:

$$J = a \cdot c_1 \cdot n + c_2 \cdot (n - N_0) + c_3 \cdot N_0 + c_4 \cdot T \cdot \lambda \cdot P_s + c_5 \cdot L \cdot T,$$

где a — норма амортизации; c_1 — цена канала обслуживания; c_2 и c_3 — текущие затраты на обслуживание работающего и простаивающего канала; c_4 — потери производства от невыполнения одной работы (потери одного заказа); c_4 — затраты на содержание ожидающих требований в единицу времени; T — годовой фонд рабочего времени системы.

Пример 5. Фирма занимается срочной доставкой грузов и имеет $n = 5$ машин, работающих круглосуточно. В среднем в час поступает $\lambda = 1$ заявка. Среднее время перевозки грузов $T_{обс} = 1$ ч. Если количество заказов, ожидающих обслуживания, становится равным $m = 10$, то фирма прекращает прием заявок до тех пор, пока очередь не уменьшится.

Требуется оценить характеристики работы фирмы.

Решение. Определим параметр системы $\alpha = 1 \cdot 1 = 1$.

1. Вероятность того, что все машины свободны от перевозки грузов:

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5 \cdot \left(1-(1/5)^{10+1}\right)}{5!(1-1/5)}} = 0,3678.$$

2. Вероятность того, что все машины заняты:

$$P_n = \frac{\left(1-(1/5)^{10+1}\right)\cdot 1^5}{(1-1/5)\cdot 5!}\cdot 0,3678 = 0,0038,$$

т. е. вероятность полной загрузки очень мала.

3. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_s = \frac{1^{15}}{5!\ 5^{15-5}}\cdot 0,3678 \approx 0.$$

4. Средняя длина очереди:

$$L = \frac{1^5 \cdot \left(1/5 - (10+1)\cdot(1/5)^{10+1} - (10+2)\cdot(1/5)^{10+2}\right)}{5!(1-1/5)^2} \times 0,3678 = 0,0010.$$

Заказчик практически никогда не получит отказа в обслуживании, но и загрузка машин будет очень мала.

Задание 7. В отделении нагрева металла в цехе крупной ковки часть нагревательных печей работают в режиме копильников. Если очередной поступивший слиток застает занятыми все нагревательные печи, то он помещается в копильники, где обеспечивается поддержание температуры металла. Если занятыми окажутся и копильники, то слиток отправляется на склад. В последующем его нагрев потребует дополнительных затрат в размере 100 руб. Поступающий поток слитков — пуассоновский с параметром 10 шт./сутки. Время нагрева слитка перед ковкой распределено по показательному закону с параметром 1 шт./сутки. В цехе имеется 10 нагревательных печей.

Требуется определить оптимальное число копильников, если цена нагревательной печи 100 000 руб., текущие затраты на обслуживание работающей печи — 50 руб./сутки, а стоящей — 30 руб./сутки, приведенные затраты на содержание слитков в копильниках — 60 руб./сутки, годовой фонд времени работы отделения нагрева — 6000 ч.

10.6. СИСТЕМА С ОГРАНИЧЕННЫМ ПОТОКОМ ТРЕБОВАНИЙ

Система состоит из л обслуживающих каналов. Каждый из них может одновременно обслуживать только одно требование. В систему поступает простейший (пуассоновский) поток требований с параметром ***X***. Если в момент поступления очередного требования в системе на обслуживании уже находится не меньше л требований (все каналы заняты), то это требование ставится на очередь и ждет начала обслуживания. Требования на обслуживание поступают от m обслуживаемых объектов, т. е. поток поступающих требований ограничен. Время обслуживания каждого требования является случайной величиной, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром ц.

Состояние такой системы описывается системой дифференциальных уравнений:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$P_k'(t) = (m-k+1)\lambda P_{k-1}(t) - ((m-k)\lambda + k\mu)P_k(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t),$$
$$0 \le k < n,$$

$$P_k'(t) = (m-k+1)\lambda P_{k-1}(t) - ((m-k)\lambda + k\mu)P_k(t) + n\mu P_{k+1}(t),$$
$$n \le k < m,$$

$$P_m'(t) = \lambda P_{m-1}(t) - n\mu P_m(t),$$

где n — число каналов обслуживания в системе; $P_k(t)$ — вероятность того, что в системе в момент времени t находится k требований.

1. Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны:

$$P_0 = 1 - \sum_{k=1}^{m} P_k = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k m!}{k!(m-k)!} + \sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{\alpha^k m!}{n!(m-k)!\,n^{k-n}}}.$$

2. Вероятность того, что в системе находится k требований, в случае, когда их число не превосходит числа обслуживающих аппаратов:

$$P_k = \frac{m!}{k!(m-k)!}\alpha^k P_0 \text{ при } 1 \le k \le n.$$

3. Вероятность того, что в системе находится k требований, в случае, когда их число больше числа обслуживающих каналов:

$$P_k = \frac{m!}{n!(m-k)!\,n^{k-n}}\alpha^k P_0 \text{ при } n \le k \le m.$$

4. Вероятность того, что все обслуживающие каналы заняты:

$$P_n = \frac{m!}{n!(m-n)!}\alpha^n P_0 \text{ при } 1 \le k \le n.$$

5. Средняя длина очереди:

$$L = \sum_{k=n+1}^{m} (k-n) P_k.$$

6. Среднее число требований, находящихся в системе:

$$L_1 = \sum_{k=1}^{m} k P_k.$$

7. Среднее число свободных от обслуживания каналов:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)m!}{k!(m-k)!}\alpha^k P_0.$$

Экономическая оценка вариантов системы имеет вид:

$$J = ac_1 n + c_2(n - N_0) + c_3 N_0 + c_4 L_1 T,$$

где a — норма амортизации; c_1 — цена канала обслуживания; c_2 и c_3 — текущие затраты на обслуживание работающего и простаивающего канала; c_4 — затраты на содержание требований, находящихся в системе, в единицу времени; T — годовой фонд рабочего времени системы.

Пример 6. Модель таможенного брокера. Требуется выбрать рациональный вариант организации деятельности таможенной брокерской фирмы. Предлагается два варианта: первый — увеличить численность бригады специалистов таможенного обслуживания (СТО) на одного человека, второй — действующий вариант с установленной штатной численностью два специалиста.

Пусть бригада (СТО) из $n = 3$ человек ежедневно досматривает и оформляет в среднем $m = 20$ контейнеров, прибывающих в третий район Морского торгового порта Санкт-Петербурга или отправляемых из этого района порта. Каждый СТО может одновременно выполнить только одно требование на досмотр и оформление ($\lambda = 1$). Если в момент поступления очередного требования имеются свободные СТО, то один из них приступает к досмотру и оформлению. Если занята вся бригада, то требование на досмотр и оформление ставится в очередь. Количество контейнеров с грузами, которое требуется досмотреть и оформить в течение какого-то периода, подчиняется закону Пуассона. В среднем на досмотр и оформление одного контейнера с грузом затрачивается $T_{обс} = 30$ мин.

Требуется определить среднее количество контейнеров с грузом, подлежащих досмотру и оформлению, степень занятости СТО и время пролеживания контейнеров с грузами в ожидании досмотра и оформления.

Р е ш е н и е. Определим параметр системы

$$\alpha = 1 \cdot \frac{30}{60} = 0{,}5.$$

С использованием промежуточных результатов расчетов (см. табл. 63) определяются следующие параметры системы.

1. Вероятность того, что пролеживают один, два или три контейнера (когда их количество не превышает числа СТО):

$$P_1 = \frac{5!}{1!(5-1)!}0{,}5^1 P_0 = 2{,}5P_0,$$

$$P_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!}0{,}5^2 P_0 = 2{,}5P_0,$$

$$P_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!}0{,}5^3 P_0 = 1{,}25P_0.$$

Таблица 63

k	Количество контейнеров		Число свободных СТО	P_k/P_0	P_k	$\lvert k-n \rvert \cdot P_k$	$k \cdot P_k$
	в досмотре и оформлении	в пролеживании					
0	0	0	3	1	0,13	0,39	0
1	1	0	2	2,5	0,33	0,66	0,33
2	2	0	1	2,5	0,33	0,33	0,66
3	3	0	0	1,25	0,16	0	0,48
4	3	1	0	0,42	0,05	0,05	0,20
5	3	2	0	0,07	0,01	0,02	0,05

2. Вероятность того, что на досмотр и оформление поступили четыре или пять контейнеров с грузами (когда их количество больше числа СТО), соответственно составит:

$$P_4 = \frac{5!}{3!\ 3^{4-3}(5-4)!} 0,5^4 P_0 = 0,42 P_0,$$

$$P_5 = \frac{5!}{3!\ 3^{5-3}(5-5)!} 0,5^5 P_0 = 0,07 P_0.$$

3. Вероятность того, что все поступившие контейнеры с грузами досмотрены и оформлены, а СТО свободны от выполнения своих посреднических операций:

$$P_0 = 1 - \sum_{k=1}^{m} P_k =$$

$$= 1 - (2,5 + 2,5 + 1,25 + 0,42 + 0,07) \cdot P_0 = 1 - 6,74 \cdot P_0.$$

Отсюда:

$$P_0 = 0,13;$$
$$P_1 = P_2 = 2,5 \cdot 0,13 = 0,33;$$
$$P_3 = 1,25 \cdot 0,13 = 0,16;$$
$$P_4 = 0,42 \cdot 0,13 = 0,05;$$
$$P_5 = 0,07 \cdot 0,13 = 0,01;$$

4. Средняя длина очереди:

$$L = (4-3) \cdot 0,05 + (5-3) \cdot 0,01 = 0,07,$$

т. е. из каждых пяти контейнеров в среднем 0,07 контейнера будет задерживаться в очереди.

5. Среднее количество контейнеров, находящихся в очереди и в досмотре:

$$L_1 = 1 \cdot 0,33 + 2 \cdot 0,33 + 3 \cdot 0,16 +$$
$$+ 4 \cdot 0,05 + 5 \cdot 0,01 = 1,72 \text{ контейнера.}$$

6. Коэффициент пролеживания контейнера:

$$k_{пк} = 1,72/5 = 0,34,$$

т. е. 34% рабочего времени каждый контейнер лежит в ожидании досмотра или в досмотре и оформлении.

7. Среднее число свободных СТО:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot P_k =$$

$$= (3-0) \cdot 0,13 + (3-1) \cdot 0,33 + (3-2) \cdot 0,33 = 1,38.$$

8. Среднее число занятых СТО:

$$N_з = 3 - 1,38 = 1,62 \text{ чел.}$$

9. Степень загрузки СТО:

$$k_з = 1,62/3 = 0,54.$$

Казалось бы, весьма низкая средняя степень загрузки каждого СТО (54%) обусловливает целесообразность ранее принятой в действующем варианте штатной численности бригады из двух человек. Для действующего варианта результаты моделирования оказываются следующими:

$$n = 2;\ m = 20;\ \lambda = 1;\ T_{обс} = 30 \text{ мин};\ \alpha = 0,5.$$

При $m \le n$:

$$P_1 = \frac{5!}{1!(5-1)!} 0,5^1 P_0 = 2,5 P_0;$$

$$P_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} 0,5^2 P_0.$$

При $m > n$:

1) $P_3 = \frac{5!}{2!(5-3)!\,2^{3-2}} 0,5^3 P_0 = 1,88 P_0;$

$P_4 = \frac{5!}{2!(5-4)!\,2^{4-2}} 0,5^4 P_0 = 0,94 P_0;$

$P_5 = \frac{5!}{2!(5-5)!\,2^{5-2}} 0,5^5 P_0 = 0,23 P_0;$

$P_0 = 1 - \sum_{k=1}^{m} P_k = 1 - (2,5 + 2,5 + 1,88 + 0,94 + 0,23) P_0 =$

$= 1 - 8,05 P_0;$

2) $P_0 = 1/9,05 = 0,11;\ P_1 = P_2 = 2,5 \cdot 0,11 = 0,275;$

$P_4 = 0,94 \cdot 0,11 = 0,1;\ P_5 = 0,23 \cdot 0,11 = 0,03;$

3) $L = \sum_{k=3}^{5} (k-n) P_k = (3-2) P_3 + (4-2) P_4 + (5-2) P_5 =$

$= 0,21 + 2 \cdot 01 + 3 \cdot 0,03 = 0,5;$

т. е. из каждых пяти контейнеров в среднем 0,5 контейнера будут пролеживать на складе временного хранения;

4) $L_1 = 1 \cdot 0,275 + 2 \cdot 0,275 + 3 \cdot 0,21 + 4 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,03 = 2$;

5) $k_{пк} = 2/5 = 0,4$, т. е. порядка 40% рабочего времени каждый контейнер пролеживает в ожидании досмотра, в досмотре и в оформлении;

6) $N_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)P_k = (2-0)P_0 + (2-1)P_1 = 2 \cdot 0,11 + 1 \cdot 0,275 = 0,495$;

7) $N_з = 2 - 0,495 = 1,505$;

8) $k_з = 1,505 / 2 = 0,75$.

Сравнительный анализ полученных результатов моделирования возможных вариантов организации деятельности таможенной брокерской фирмы (табл. 64) позволяет сделать весьма важные выводы в обосновании выбора наиболее рационального из них.

При установленной численности бригады СТО из двух человек (второй вариант) время пролеживания контейнеров в ожидании досмотра и оформления больше, чем при предлагаемой численности (из трех человек). Т. е. при реализации предлагаемого варианта хотя и увеличиваются расходы на выплату заработной платы, но в то же время сокращаются издержки хранения товаров и транспортных средств. И если величина сокращаемых издержек превысит дополнительные издержки по заработной плате, то это будет означать вполне вероятный рост прибыли и рентабельности деятельности таможенного брокера. Экономическая оценка вариантов организации деятельности таможенного брокера потребует предварительного методического обоснования расчетов составляющих величин суммы его издержек.

Таблица 64

Варианты численности СТО	Расчетные параметры					
	средняя длина очереди (L)	среднее количество контейнеров, пролеживающих в очереди и на досмотре (Li)	коэффициент пролеживания контейнера (Јпк)	среднее число свободных СТО (No)	среднее число занятых СТО ($N_з$)	степень загрузки СТО ($k_з$)
n = 3 (предлагаемый)	0,07	1,72	0,34	1,38	1,62	0,54
n = 2 (действующий)	0,5	2	0,4	0,495	1,505	0,75

10.7. ДВУХФАЗНАЯ СИСТЕМА

Двухфазная система массового обслуживания с неограниченным потоком требований состоит из двух аппаратов разной производительности. В этой системе возможно образование очереди требований перед первой и второй фазами. Поступившее в систему требование сначала обслуживается на первом аппарате. Если он занят, то требование ставится в очередь. После первого аппарата требование переходит на второй аппарат, перед которым также может образовываться очередь.

Простейшие системы данного класса имеют показательный закон распределения времени обслуживания на аппаратах с параметрами μ_1 и μ_2 и пуассоновский поток поступающих требований с параметром λ.

Вероятностные оценки состояния системы следующие.

1. Вероятность того, что оба канала обслуживания свободны:

$$P_0 = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2);\ \alpha_1 = \lambda/\mu_1;\ \alpha_2 = \lambda/\mu_2.$$

2. Вероятность того, что на первой фазе системы находится n требований, а вторая фаза свободна:

$$P_{n,0} = \alpha_1^n(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2).$$

3. Вероятность того, что на второй фазе системы находится n требований, а первая фаза свободна:

$$P_{0,n} = \alpha_2^n(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2).$$

4. Вероятность того, что на первой фазе системы находится n требований, а на второй — m требований:

$$P_{n,m} = \alpha_1^n\alpha_2^m(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2).$$

5. Среднее число требований, находящихся в системе:

$$L_1 = \alpha_1^n / (1 - \alpha_1) + \alpha_2^m / (1 - \alpha_2) = L_1^{(1)} + L_1^{(2)}.$$

Для данного класса систем массового обслуживания решаются задачи выбора оптимального числа аппаратов в фазах определения размеров очередей и соответствующих размеров складов, расчета пропускной способности системы и др.

Экономическая оценка вариантов системы имеет вид:

$$J = a(c_1^{(1)} + c_1^{(2)}) + (c_2^{(1)}T + c_2^{(2)}T)P_0 + $$
$$+ (c_3^{(1)} + c_3^{(2)})TP_0 + (c_4^{(1)}L_1^{(1)} + c_4^{(2)}L_1^{(2)})T$$

где a — норма амортизации; $c_1^{(i)}$ — цена i-го канала обслуживания; $c_2^{(i)}$ и $c_3^{(i)}$ — текущие затраты на обслуживание работающего и простаивающего i-го канала; $c_4^{(i)}$ — затраты на содержание ожидающих требований перед i-м каналом в единицу времени; T — годовой фонд рабочего времени системы.

Задание 8. Участок технологического процесса включает прокатный стан и агрегат резки. На стан поступает поток заготовок, который можно считать пуассоновским с параметром 60 шт./ч; перед станом и перед агрегатом резки допускается образование очереди заготовок, ожидающих обработки. Длина заготовок меняется, что приводит к изменению времени их обработки на агрегатах. Статистический анализ показал, что время занятости стана и агрегата резки характеризуется экспоненциальным законом распределения с параметрами 120 шт./ч и 75 шт./ч соответственно.

Требуется оценить работу участка, если цена стана 1 млн руб., агрегата резки — 200 000 руб., текущие затраты на обслуживание работающего и стоящего агрегата на стане 200 руб./ч и 120 руб./ч, а на агрегате резки — 25 руб./ч и 5 руб./ч соответственно. Затраты на содержание запаса металла 0,5 руб./шт. х ч.

Рассмотреть влияние производительности агрегата резки на экономическую оценку работы участка.

10.8. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 9. Определить оптимальное число контролеров, проверяющих продукцию на конечном этапе сборочного конвейера. Если подошедшее по конвейеру изделие застает всех контролеров занятыми, то оно проходит без контроля. Статистическое обследование показало, что поток изделий на конвейере — простейший с параметром 0,5 шт./мин. Время контроля одного изделия случайное и распределено по экспоненциальному закону с параметром 0,25 шт./мин. Затраты на оснащение рабочего места контролера — 500 руб.; текущие затраты на работу одного контролера — 30 руб./сутки; потери у потребителя изделий от возможного получения брака 50 руб. Годовой фонд времени работы контролеров — 6000 ч.

Задание 10. На конвейере возле операции с нестандартным временем выполнения установлено бункерное устройство. Если изделие, подошедшее на конвейере, застает рабочего занятым обработкой предшествующего изделия, то оно встает в очередь (попадает в бункер). Поток изделий — пуассоновский с параметром 0,5 шт./мин. Время обработки изделия распределено по экспоненциальному закону с параметром 0,5 шт./мин.

Оценить работу на указанной операции и выбрать оптимальный параметр для закон! распределения времени обработки. Ценой оборудования на рабочем месте можно пренебречь. Текущие затраты на рабочем месте равняются 20 руб./ч. Приведенные затраты на содержание изделий в бункере — 5 руб./ч на одно изделие. Изменение средней пропускной способности операции на 0,05 шт./мин сопровождается изменением текущих затрат на 1 руб./ч и затрат на содержание изделий в бункере на 0,5 руб./ч на одно изделие.

Задание 11. Рабочий обслуживает 20 станков. Сам устраняет мелкие неисправности и производит наладку станков. Статистическим обследованием установлено, что моменты выхода станков из строя образуют поток, близкий к простейшему, с параметром 2 шт./ч, а время устранения неисправностей — случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону с параметром 3 шт./ч. Если рабочий занят ремонтом станка, то очередной станок, вышедший из строя, ожидает ремонта в порядке очереди.

Требуется оценить работу станков, приняв цену станка — 1000 руб., текущие затраты на работающий станок — 10 руб./сутки, а на стоящий — 5 руб./сутки, оплата труда рабочего составляет 5 руб./сутки.

Задание 12. Рассмотреть работу участка технологического процесса, включающего операции осмотра и упаковки. Поступает поток изделий, который можно считать пуассоновским с параметром 200 шт./сутки. Длительность осмотра и упаковки изменяется в зависимости от габариттов и массы изделий. Закон распределения длительности имеет экспоненциальный вид с параметрами 300 и 200 шт./сутки соответственно перед первой и второй операциями.

Требуется оценить работу системы, если ценой оборудования можно пренебречь, текущие затраты на операциях при работе 15 руб./ч, а при простое 10 руб./ч, затраты на содержание изделий в очереди перед первой и второй операциями 40 руб./шт. х ч, фонд времени работы системы 6000 ч.

Рассмотреть влияние интенсивности входного потока на экономическую оценку работы системы.

ГЛАВА 11

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТОВ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ В ПРОЦЕССЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Приступайте к делу, и силы появятся.

Эмерсон

Летели скворцы и встретились им деревья. Когда сели они по одному ид дерево, то одному скворцу не ХВАТИЛО деревл, д когдд нд кджлое дерево сели по ДВА скворцд, то одно дерево ОСТАЛОСЬ не ЗАНЯТЫМ. Сколько выло скворцов и сколько БЫЛО деревьев?

СТАРИННАЯ ЗАДАЧА

11.1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В QSB

11.1.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О QSB

QSB — это набор программ (русифицированный авторами пособия), с помощью которого можно «проигрывать» различные варианты решения экономических и производственных задач, выявлять оптимальные из них и анализировать полученные результаты, используя различные методы.

Запуск *QSB* осуществляется вводом команды: *progl* и, после появления функционального меню, нажатием цифры 9. Далее на экране появится главное меню системы (экран 1).

Линейное программирование решает задачи линейного программирования, включающие до 40 переменных (без учета дополнительных и искусственных) и 40 ограничений (без учета граничных условий), используя симплекс-метод.

Экран 1

QSB - Количественные Системы для бизнеса!
Вы можете выбрать следующие системы поддержки принятия решений:

Код	Программа	Код	Программа
1	Линейное программирование	9	Управление запасами
2	Целочисленное программирование	A	Теория очередей (расписаний)
3	Транспортная задача	B	Имитационное моделирование
4	Задача о назначениях	C	Вероятностные модели
5	Сетевое моделирование (NET)	D	Марковские модели
6	Сетевое моделирование (CPM)	E	Экстраполяция тенденций
7	Сетевое моделирование (PERT)	F	Определение типа принтера
8	Динамическое программирование	G	Выход из QSB

Целочисленное программирование реализует алгоритм метода ветвей и границ для решения смешанных задач целочисленного программирования размерностью до 20 переменных и 20 ограничений.

Транспортная задача решает транспортные задачи, содержащие до 50 пунктов отправления и до 50 пунктов назначения, используя для получения начального допустимого решения метод северо-западного угла и метод аппроксимации Фогеля, а для оптимального плана — метод потенциалов.

Задача о назначениях предназначена для решения венгерским методом задач о назначении, включающих до 60 работ и 60 кандидатов.

Сетевое моделирование ***(NET)*** содержит три алгоритма для анализа сетей размерностью до 150 ветвей и до 75 узлов: алгоритм кратчайшего пути (определяет кратчайший путь от начального узла сети до любого другого), алгоритм максимального потока (находит максимальный поток от начального узла до конечного) и алгоритм минимального размаха дерева (устанавливает минимальную длину полного пути).

Сетевое моделирование *(CPM)* определяет раннее и позднее время начала и окончания работ методом критического пути для сетей, включающих до 200 работ.

Сетевое моделирование ***(PERT)*** анализирует сети объемом до 200 работ методом *PERT*.

Динамическое программирование решает три задачи динамического программирования размерностью до 20 этапов с 50 пунктами в каждом: задачу о дилижансе, задачу о рюкзаке, задачу управления запасами.

Управление запасами определяет оптимальный размер запасов и решает задачу о разносчике газет.

Теория очередей (расписаний) анализирует работу одноканальных и многоканальных систем массового обслуживания с ограниченной и неограниченной длиной очереди и различными законами распределения времени обслуживания.

Имитационное моделирование использует метод Монте-Карло для анализа систем очередей с 20 каналами обслуживания, 20 очередями, 100 заявками в очереди максимум.

Вероятностные модели обеспечивают проведение дисперсионного и байесовского анализа, анализа платежной матрицы и дерева решений. При дисперсионном анализе по заданным исходам и вероятностям вычисляется среднее и дисперсия. При байесовском анализе по априорным вероятностям состояний природы и условным вероятностям исходов определяются совместные, безусловные и апостериорные вероятности. При анализе платежной матрицы размерностью до 40 состояний природы и до 40 альтернатив рассчитываются различные критерии. Программа анализирует деревья решений, включающие до 80 ветвей с заданной вероятностью.

Марковские модели позволяют найти вероятность нахождения системы в заданном состоянии в заданное время с помощью марковских моделей (общее число состояний — не более 50).

Экстраполяция тенденций вычисляет простое и скользящее среднее, производит простое и двойное экспоненциальное сглаживание, а также линейную регрессию.

Определение типа принтера. В начале каждого сеанса работы необходимо задать тип принтера (если планируется его использование), для чего и предусмотрена эта опция.

Выход из *QSB* служит для окончания работы пользователя с системой.

Для выбора пункта меню нужно выделить его курсором с помощью клавиш Т, 4-, ->, <- и нажать *Enter;* или нажать «горячую» клавишу, соответствующую коду программы.

При работе с пунктами 1-Е на экране появляется функциональное меню (экран 2).

Функция 1 — выводит краткое описание используемой программы (в данном случае помощь по линейному программированию); 2 — служит для ввода исходных данных новой задачи непосредственно с клавиатуры; 3 — предназначена для ввода исходных данных задачи из файла; 4 — осуществляет вывод исходных данных на экран и/или принтер; 5 — обеспечивает решение задачи и просмотр этого процесса по шагам; 6 — сохраняет исходные данные задачи в файле; 7 — производит корректировку исходных данных путем изменения количества переменных, ограничений или значений коэффициентов задачи; 8 — выводит на экран и/или принтер итоговое решение; 9 — обеспечивает выход в главное меню системы; 0 — позволяет окончить работу с системой.

Экран 2

Добро пожаловать в линейное программирование!
Варианты работы с LP:
Если вы работаете с системой впервые, то выберите опцию 1.

Опция	Функция
1	Помощь по LP
2	Ввод новой задачи
3	Чтение задачи с диска
4	Просмотр/Печать исходных данных
5	Решение задачи
6	Запись задачи на диск
7	Изменение задачи
8	Просмотр/Печать итогового решения
9	Возврат в главное меню
0	Выход из QSB

Процедура принятия решения с использованием *QSB* сводится к четырем этапам: постановке задачи, подготовке исходных данных, решению задачи и анализу полученных результатов. Рассмотрение этих этапов для различных видов задач будет изложено далее.

11.1.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Порядок решения задач линейного программирования с помощью *QSB* рассмотрим на примере 1 главы 2.

Подготовьте экономико-математическую модель задачи для решения на компьютере:

$$\max L_1 = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 40; \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110; \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 12x_4 \le 100; \\ x_1 \ge 1; \\ x_2 \le 12; \\ x_3 \ge 2; \\ x_4 = 3. \end{cases}$$

В нашей задаче: целевая функция на максимум, 4 переменных и 7 ограничений. Условия неотрицательности переменных ($x_2 \ge 2$) заданы по умолчанию.

Выберите опцию **Линейное программирование** в главном меню системы. На экране появится функциональное меню (см. экран 3).

В функциональном меню выберите опцию **2 — Ввод новой задачи.** В верхней строке экрана появится запрос о названии задачи (см. экран 4).

Наберите имя задачи, длиной не более 6 символов, например *prim1*, и нажмите *Enter*. При нажатии *Enter* без ввода имени автоматически происходит возврат в функциональное меню.

Добро пожаловать в линейное программирование! Варианты работы с LP: Если вы работаете с системой впервые, то выберите опцию 1.	
Опция	**Функция**
1	Помощь по LP
2	Ввод новой задачи
3	Чтение задачи с диска
4	Просмотр/Печать исходных данных
5	Решение задачи
6	Запись задачи на диск
7	Изменение задачи
8	Просмотр/Печать итогового решения
9	Возврат в главное меню
0	Выход из QSB

Экран 4

Введите название задачи (до 6 символов)? priml

Вверху экрана появятся требования, которые необходимо соблюдать при вводе исходных данных (способы представления чисел, знаки отношения в неравенствах, клавиши перемещения курсора и др.); а внизу — вопросы о задаче (экран 5).

Экран 5

Критерий на максимум (1) или минимум (2)? (Введите 1 или 2) <1 >

Сколько переменных в вашей задаче? (введите число < = 40) < 4 >

Сколько ограничений в вашей задаче? (введите число < = 40) < 7 >

Хотите использовать заданные имена переменных (X1, X 2 , X n) (Y/N)? < y >

Ответьте на вопросы. Варианты ответов показаны выше (целевая функция на максимум, 4 переменных и 7 ограничений, будем использовать заданные имена переменных — X_1, X_2, X_n). Переход от предыдущей строки к последующей осуществляется нажатием *Enter,* обратный переход — клавишей *Backspace.*

Если при вводе не было ошибок, то по окончании нажмите клавишу *Spacebar* (пробел); для корректировки введенной информации — любую другую клавишу.

На экране появится шаблон ЭММ (целевая функция и ограничения) со свободными позициями для ввода коэффициентов. Заполните шаблон, при необходимости поменяйте знаки (< = ,> = , =) (экран 6).

После нажатия пробела на экране появится функциональное меню. В функциональном меню выберите оп-

Экран 6

МахбО	X1 70	X2 120	X3130	X4
Ограничен.				
(1)1	X1 2	X23	X3 4	X4 40
(2)6	X1 5	X2 4	X33	X4 110
(3)4	X16	X2 8	X312	X4 100
(4)1	X1	X2	X3	X4> = 1
(5)1	X1	X2	X3	* X4 12
(6)	X1	X21	X3	X4> = 2
(7)	X1	X2	X31	X4 = 3

цию 6 — Запись задачи на диск. В верхней части экрана появится запрос об имени файла, в котором будут храниться исходные данные задачи.

Наберите имя файла (например, такое же, как и имя задачи, т. е. *priml)* и нажмите *Enter.* Для просмотра существующих файлов введите имя диска и нажмите *Enter.* При нажатии *Enter* без ввода имени файла осуществляется автоматический возврат в функциональное меню.

Если файла нет на диске, то выводится сообщение: «Задача записана. Для продолжения любая клавиша». Если файл с таким именем существует, то требуется подтверждение о замене его содержимого (У) или об отмене записи задачи *(N):* «Этот файл уже существует. Заменить его (Y/N)?» Введите У или *N* и нажмите *Enter.* На экране появится функциональное меню.

В функциональном меню выберите опцию 3 — Чтение задачи с диска. В верхней части экрана появится запрос об имени файла, в котором хранятся исходные данные задачи.

Наберите имя файла *priml* и нажмите *Enter.* Для просмотра существующих файлов введите имя диска и нажмите *Enter.* При нажатии *Enter* без ввода имени файла осуществляется автоматический возврат в функциональное меню.

Если файла нет на диске, то выводится сообщение: «Нет такого файла. Повторите ввод». Если файл с таким именем существует, но в нем хранятся данные не задачи линейного программирования, то выводится сообщение: «В этом файле нет задачи линейного программирования». И в том, и в другом случае необходимо повторить ввод имени файла. Если задача прочитана успешно, то выводится сообщение: «Задача прочитана. Для продолжения любая клавиша». После нажатия любой клавиши на экране появится функциональное меню.

В функциональном меню выберите опцию 4 — Просмотр/Печать исходных данных. Если задача не была введена или прочитана с диска, то будет выдано сообщение: «Задача не введена. Для продолжения любая клавиша», и после нажатия любой клавиши на экране появится функциональное меню; в противном случае — в верхней строке экрана появится запрос о необходимости вывода данных на принтер.

Убедитесь, что принтер готов к работе, введите символ *Y* (если распечатка не требуется, то — символ /У) и нажмите *Enter*. На экран (и принтер, если задано) будет выведено описание исходных данных задачи.

В задачах большой размерности исходные данные могут занимать несколько экранных страниц. Перемещение к следующей странице осуществляется нажатием клавиши /, к предыдущей странице — *Esc*. Для выхода в функциональное меню нажмите клавишу *Spacebar* после окончания просмотра.

В функциональном меню выберите опцию **5** — Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение> (экран 7).

Выбор опции **6** обеспечивает возврат в функциональное меню без решения задачи. При выборе остальных опций задача будет решена. При этом для задач небольшой размерности доступны все режимы, а для больших задач — только опции **4-5**. С целью усвоения алгоритма симплекс-метода начинающему пользователю рекомендуется выбирать опцию **4**, обеспечивающую просмотр процесса решения по шагам.

Выберите опцию **4** — Решение и просмотр всех таблиц. На экране появится информация по каждой итерации, причем для больших задач (наш пример) выдается только номер итерации, текущее значение целевой функции, вводимые и выводимые из базиса вектора (экран 8).

Экран 7

Меню опции <Решение>	
1	Решение и просмотр начальной таблицы
2	Решение и просмотр итоговой таблицы
3	Решение и просмотр начальной и итоговой таблиц
4	Решение и просмотр всех таблиц
5	Решение без просмотра таблиц
6	Возврат в функциональное меню

Экран 8

Итерация : 1 Новая цф (Max.) = 390 +'(-3 Big M)

Вводим: X4 значение = 3 Выводим: A7 Стр 7

Экран 9

Базис	C(j)	X1	X2	S1	A1	S2	B(i)	B(i)
		2 000	3.000	0	-м	0		A(i,j)
A1	-м	2.000	1.000	-1.00	1.000	0	5.000	2.500
S2	0	1.000	5.000	0	0	1.000	20.00	20.00
CfIKO)		2.000	3.000	0	0	0	0	
"Big M		2.000	1.000	-1.00	0	0	-5.00	
Текущее значение целевой функции (Max.) = 0 + (-5 Big M)								
< подсвеченные переменные вводим или выводим из базиса >								
Вводим: X1 Выводим: A1								

Для небольших задач информация оформлена в виде симплекс-таблицы (экран 9).

В первой колонке указываются имена базисных переменных (естественные переменные обозначаются X_1, X_2, или как вы их обозначили; дополнительные — S_1, S_2, искусственные — A_1, A_2, ...).

Во второй колонке находятся коэффициенты целевой функции, соответствующие базисным переменным.

В заголовках следующих пяти колонок указаны имена переменных и коэффициенты целевой функции (строкой ниже). В колонках 2 и 3 находятся коэффициенты матрицы ограничений модели, а в колонках 5—7 — базисные векторы, образованные путем введения в систему дополнительных и искусственных переменных.

В колонке 8 — столбец свободных членов.

В колонку 9 (кроме начальной таблицы, в которой в колонке 9 помещены нули) заносятся отношения правых частей ограничений к соответствующим координатам вектора, вводимого в базис. Эти отношения необходимы для определения вектора, выводимого из базиса. Из базиса выводится вектор, имеющий наименьшее отношение. Деление на ноль в последней колонке обозначается символом *Inf*.

В двух последних строках таблицы рассчитываются относительные оценки (колонки 3-7) и в колонке 8 помещается значение целевой функции при данном базисном плане, причем в последней строке считаются оценки и значение целевой функции исходной задачи, а в последней строке — расширенной задачи, полученной путем введения искусственных переменных.

Целевая функция расширенной задачи определяется следующим образом:

$$\max L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{j=n+1}^{n+m} x_j,$$

где M (*Big M*) — достаточно большое положительное число.

Оценки считаются по формуле:

$$C(j) - Z(j) = C(j) - \sum_{i \in \sigma} C(i) \cdot x(i, j),$$

где σ — множество индексов базисных векторов, $\sigma = \{1, 2, \ldots, m\}$; $C(j)$ — коэффициенты целевой функции; $x(i, j)$ — коэффициенты разложения векторов матрицы ограничений по единичному базису ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n + m$). Признаком оптимальности базисного допустимого плана служит наличие неположительных двойственных оценок.

По последней строке определяется вектор, подлежащий включению в базис. Этот вектор имеет наибольшую относительную оценку. Итерационный процесс на основе анализа оценок последней строки проводится с целью исключения из базиса всех искусственных векторов, затем, если существует хотя бы одно допустимое решение, процесс отыскания оптимального плана исходной задачи продолжается с использованием предпоследней строки.

Ниже таблицы выдается текущее значение целевой функции для данной итерации и указываются имена вводимой в базис и выводимой из базиса переменных. В таблице эти переменные выделены цветом. Под последней симплекс-таблицей показано значение целевой функции, вычисленное на оптимальном плане.

Переход от одной итерации к другой осуществляется нажатием любой клавиши, кроме *G*, при нажатии которой вычислительный процесс пойдет без остановки до конца.

В результате решения задачи возможна выдача таких сообщений: «Нет допустимого решения», «Целевая функция не ограничена». В этих случаях осуществляется выход в функциональное меню.

Если найден оптимальный план, то после просмотра процесса решения, согласно выбранному режиму (**1–4**) или без просмотра итераций (**5**), система выдаст сообщение «Найдено оптимальное решение. Для продолжения любая клавиша» и после нажатия любой клавиши выведет меню способов представления полученного решения задачи (экран 10).

Опция **5** позволяет вернуться в функциональное меню без просмотра результатов. Опции **1–4** обеспечивают вывод на экран (а **3–4** — и на принтер) итогового решения и результатов анализа чувствительности коэффициентов целевой функции и коэффициентов правой части ограничений.

Экран 10

Меню опции <Просмотр/Печать итогового решения> priml	
Варианты работы для просмотра/печати итогового решения	
Для печати итогового решения подготовьте принтер	
пункт	
1	Просмотр итогового решения
2	Просмотр решения и анализ чувствительности
3	Просмотр/печать решения
4	Просмотр/печать решения и анализ чувствительности
5	Возврат в функциональное меню

Экран 11

Итоговые результаты priml Стр.: 1					
Перемен.	Решение	Дв. оц.	Перемен.	Решение	Дв. оц.
No. имена			No. имена		
1 X1	1.0000	0.0000	9A4	0.0000	0.0000
2X2	0.0000	0.0000	10 S5	11.0000	0.0000
3X3	7.5000	0.0000	11 S6	0.0000	20.0000
4X4	3.0000	0.0000	12 A6	0.0000	-20.0000
5S1	4.5000	0.0000	13 S7	5.5000	0.0000
6S2	65.0000	0.0000	14 A7	0.0000	0.0000
7 S3	0.0000	15.0000	15 A8	0.0000	-50.0000
8S4	0.0000	0.0000			
Maximum значение ц.ф. = 1350 (из множ-ва реш) итерац. = 5					

Аналогичное функции предлагаются в пункте 8 функционального меню.

Выберите опцию 2 — Просмотр решения и анализ чувствительности. На экране появится таблица с результатами решения задачи (экран 11).

После 5 итераций получен оптимальный план задачи $X^* = (1;\ 0;\ 7{,}5;\ 3)$. Прибыль от реализации продукции составит 1350 д. е. Пользуясь этой таблицей, можно начать послеоптимизационный анализ задачи, основанный на двойственных оценках (колонки 3 и 6), а именно — определить степень дефицитности ресурсов, установить, как изменится значение целевой функции при изменении запасов ресурсов на единицу. Финансы оказались лимитирующим ресурсом (S3 = 0, двойственная оценка положительна), остальные ресурсы — избыточные. Увеличение финансов приведет к увеличению прибыли, а рост материальных и трудовых ресурсов — нет. Более подробный анализ решения производится автоматически в двух последующих таблицах.

После нажатия любой клавиши на экране появится таблица, содержащая анализ чувствительности коэффициентов целевой функции к изменению исходных данных (экран 12).

Здесь для каждого коэффициента целевой функции указано его исходное значение, а также нижняя и верхняя границы возможного его изменения с сохранением оптимального плана (т. е., цена $П_2$ может изменяться в интервале [со; 90] без изменения оптимального плана).

После нажатия любой клавиши на экране появится таблица, содержащая анализ чувствительности для ресурсов (правой части ограничений) к изменению исходных данных (экран 13).

Экран 12

Анализ чувствительности коэффициентов цф Стр.: 1

C0)	MinCQ)	исходное	MaxCQ)	C(j)	MinC0)	исходное	MaxCO)
C(1)	- бесконеч.	60.0000	60.0000	C(3)	120.0000	120.0000	+ бесконеч.
C(2)	- бесконеч.	70.0000	90.0000	C(4)	- бесконеч.	130.0000	+ бесконеч.

Экран 13

Анализ чувствительности правой части Стр.: 1

B(i)	MinB(i)	исходное	MaxB(i)	B0)	MinB(i)	исходное	MaxB(i)
B0)	35.5000	40.0000	+ бесконеч.	B(5)	1.0000	12.0000	+ бесконеч.
B(2)	45.0000	110.0000	+ бесконеч.	B(6)	0.0000	0.0000	7.3333
B(3)	56.0000	100.0000	112.0000	B(7)	- бесконеч.	2.0000	7.5000
B(4)	0.0000	1.0000	12.0000	B(8)	0.0000	3.0000	6.6667

Здесь для каждого вида ресурса указано его исходное значение, а также нижняя и верхняя границы возможного изменения запасов ресурсов с сохранением структуры оптимального плана (т. е. при изменении запаса третьего ресурса в пределах [56; 112] набор базисных переменных останется неизменным). Проверим данное утверждение, максимально изменив величину запаса третьего ресурса от 100 до 112.

Нажмите любую клавишу. На экране появится функциональное меню. Выберите опцию 7 — Изменение задачи. На экране появится меню для корректировки исходных данных задачи (экран 14).

Работа с опциями 1—2 аналогична вводу данных новой задачи. В первом случае предоставляется возможность корректировки коэффициентов задачи, начиная с первого ог-

Экран 14

Меню опции <Изменение> priml	
Пункт	
1	Изменение коэффициентов задачи
2	Изменение ограничения
3	Плюс 1 ограничение
4	Минус 1 ограничение
5	Плюс переменная
6	Минус переменная
7	Просмотр/Печать исходных данных
8	Возврат в функциональное меню

раничения, а во втором — с заданного пользователем. Опции 3 и 4 предназначены для добавления и удаления одного ограничения. Опции 5 и 6 — для добавления и удаления одной переменной. Добавление переменной предполагает ввод ее имени и значений коэффициентов целевой функции и ограничений.

Выберите опцию 2 — изменение ограничения. На экране появится запрос (который выдается каждый раз при выборе опций 1-6) на ввод названия задачи.

Нажмите *Enter,* таким образом все изменения будут производиться в текущей задаче. Далее появится запрос на ввод номера ограничения.

Наберите на клавиатуре номер ограничения (3) и нажмите *Enter.* На экране появится ЭММ задачи (с третьего ограничения).

Переместите курсор к цифре 100 и введите 112. Для быстрого окончания корректировки нажмите дважды клавишу /.

В появившемся меню выберите опцию 8 — Возврат в функциональное меню.

Решите задачу. Ответ: $X^* = (1; 0; 9; 3)$, $L = 1530$. Структура оптимального плана не изменилась.

Для окончания работы в функциональном меню выберите опцию 0 — Выход из *QSB.*

11.1.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Порядок решения задач целочисленного программирования с помощью *QSB* рассмотрим на примере 3 из главы 3.

Подготовьте ЭММ задачи для решения на ЭВМ, исключив условия неотрицательности переменных:

$$\max L = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3,$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 206, \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 \le 100, \\ x_1 \le 10, \\ x_2 \le 8, \\ x_3 \le 12, \\ x_2 - 2\delta_{21} - 4\delta_{22} - 6\delta_{23} - 8\delta_{24} = 0, \\ x_3 - 4\delta_{31} - 8\delta_{32} - 12\delta_{33} = 0, \\ \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{24} = 1, \\ \delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33} = 1. \end{cases}$$

В нашей задаче: целевая функция на максимум, 10 переменных и 9 ограничений.

Выберите опцию 2 — Целочисленное программирование в главном меню системы. На экране появится функциональное меню, идентичное рассмотренному ранее.

В функциональном меню выберите опцию 2 — Ввод новой задачи, введите название задачи (например, *prim2*), ответьте на вопросы о задаче. Варианты ответов: целевая функция на максимум, 10 переменных и 9 ограничений, будем переименовывать переменные, т. е. при ответе на последний вопрос введите символ *N*. По окончании нажмите клавишу *Spacebar*. На экране появится шаблон для ввода новых имен переменных (вместо заданных $X_1, X_2, \dots, X_n$).

Переименуйте переменные, как показано на экране 15.

Экран 15

```
1 : <x1 > 2 : <x2 > 3 : <x3 > 4 : <d21 > 5 : <d22 >
6 : <d23 > 7 : <d24 > 8 : <d31 > 9 : <d32 > 10 :<d33 >
```

Экран 16

Все переменные целые (Y/N)? y

Значения всех переменных 0-1 (Y/N)? n

Вы будете задавать граничные условия (Y/N)? y

Переход к следующей позиции осуществляется нажатием *Enter*, обратный переход — клавишей *Backspace*. Если при вводе не было ошибок, то по окончании нажмите клавишу *Spacebar;* для корректировки введенной информации — любую другую клавишу.

На экране 16 появится ряд дополнительных вопросов о задаче, на которые нужно ответить (*У* — да, или *N* — нет).

Заполните появившийся шаблон для ввода целочисленности переменных и границ их изменения (экран 17).

Экран 17

Номер	Имя	Целочислен	(I/C)	Нижн. гран.	Верх. гран.
1	x1	<I>		<0>	<10>
2	x2	<I>	<0>	<8>	
3	x3	<I>	<0>	<12>	
4	d21	<I>	<0>	<32000 >	
5	d22	<I>	<0>	<32000 >	
6	d23	<I>	<0>	<32000 >	
7	d24		<I>	<0>	<32000 >
8	d31	<I>	<0>	<32000 >	
9	d32	<I>	<0>	<32000 >	
10	d33	<I>	<0>	<32000 >	

По умолчанию нижняя граница принимается равной 0, а верхняя — 32 000. В колонке 3 показан статус переменной: *I* — целочисленная; С — нецелочисленная, который можно изменять. После ввода верхней границы переменной X_3 (т. е. *12)* можно нажать клавишу / для быстрого окончания корректировки. После нажатия клавиши *Spacebar* на экране появится шаблон ЭММ (целевая функция и ограничения) со свободными позициями для ввода коэффициентов.

Введите коэффициенты модели, при необходимости поменяйте знаки (< = , > = , =). Заполненный шаблон выглядит следующим образом (экран 18):

Экран 18

Max	20	x1	6	x2	8	x3		d21		d22	
		d23		d24		d31		d32		d33	
Ограничен.											
(1)	10	x1	5	x2	4	x3		d21		d22	
		d23		d24		d31		d32		d33	206
(2)	2	x1	7	x2	4	x3		d21		d22	
		d23		d24		d31		d32		d33	100
(3)		x1	1	x2		x3	-2	d21	-4	d22	
	-6	d23	-8	d24		d31		d32		d33	= 0
(4)		x1		x2	1	x3		d21		d22	
		d23		d24	-4	d31	-8	d32	-12	d33	= 0
(5)		x1		x2		x3	1	d21	1	d22	
	1	d23	1	d24		d31		d32		d33	= 1
(6)		x1		x2		x3		d21		d22	
		d23		d24	1	d31	1	d32	1	d33	= 1

После нажатия *Spacebar* на экране появится функциональное меню.

В функциональном меню выберите опцию 5 — Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение> (см. экран 19).

Экран 19

Меню опции <Решение> prim2	
Опции	
1	Решение и просмотр первой итерации
2	Решение и просмотр всех итераций
3	Решение без просмотра итераций
4	Изменение толеранса (по умолчанию — 001)
5	Возврат в функциональное меню

Экран 20

Текущее решение итерация : 1 Стр.. 1

Нижн.гран.	Перемен.	Верх.гр.	Перемен.	Решение	Коэфф
0<	x1	10	x1	10.000	20.000
0<	x2	<8	x2	4.571	6.000
0<	x3	<12	x3	12.000	8.000
0<	d21	< бесконеч.	d21	0.571	0.000
0<	d22	< бесконеч.	d22	0.000	0.000
0<	d23	< бесконеч.	d23	0.000	0.000
0<	d24	< бесконеч.	d24	0.429	0.000
0<	d31	< бесконеч.	d31	0.000	0.000
0<	d32	< бесконеч.	d32	0.000	0.000
0<	d33	< бесконеч.	d33	1.000	0.000

Нецелочисленное решение, цф (Max) = 323.4286 ZL = -1E + 20

Опция 1 обеспечивает вывод в виде таблицы результатов только первой итерации, а опция 2 — всех итераций. При выборе опции 3 задача будет решена без просмотра итераций. Опция 4 предназначена для изменения толеранса (допустимой погрешности целого при вычислениях, по умолчанию толеранс равен 0.001). Выбор опции 5 обеспечивает возврат в функциональное меню без решения задачи.

Выберите опцию 2 — Решение и просмотр всех итераций. Результаты решения на каждой итерации представлены одинаковыми по форме таблицами, причем решение на первой итерации совпадает с решением, получаемым при решении задачи программой «Линейное программирование» (экран 20).

В первой и третьей колонках указываются нижняя и верхняя граница изменения переменных, в пятой — полученные значения переменных, в шестой — коэффициенты целевой функции.

В последней строке выдается: либо текущее нецелочисленное значение целевой функции и нижняя граница целевой функции *(ZL),* либо сообщение «ветвь не имеет допустимого решения».

Переход от одной итерации к другой осуществляется нажатием любой клавиши, кроме *G,* при нажатии которой вычислительный процесс пойдет без остановки до конца.

В результате решения задачи возможна выдача таких сообщений: «Нет допустимого решения», «Целевая функция не ограничена». В этих случаях осуществляется выход в функциональное меню. Если найден оптимальный план, то система выдаст сообщение: «Найдено оптимальное решение. Для продолжения любая клавиша».

После нажатия любой клавиши выведет меню способов представления полученного решения задачи (экран 21).

Опция 2 отличается от опции 1 только тем, что одновременно с выводом окончательного решения на дисплей осуществляется его печать на принтер. Аналогичные функции предлагаются в пункте 8 функционального меню.

Экран 21

Меню опции <Просмотр/Печать итогового решения> prim2	
Опции	
1	Просмотр итогового решения
2	Просмотр и печать итогового решения
3	Возврат в функциональное меню

Экран 22

Итоговые результаты prim2 Стр.: 1

Перемен. No. имя	Решение	Коэффициент цел. функц.	Перемен. No. имя	Решение	Коэффициент цел. функц.
1 к1	10.000	0.0000	6d23	0.000	0.000
2x2	4.000	0.0000	7d24	0.000	0.000
3x3	12.000	0.0000	8d31	0.000	0.000
4d21	0.000	0.0000	9d32	0.000	0.000
5d22	1.000	0.0000	10d33	1.000	0.000

Maximum значение ц.ф. = 320 итоговая итерац. = 79

Выберите опцию 1 — Просмотр итогового решения. На экране появится таблица с результатами решения задачи (экран 22).

После 79 итераций получен оптимальный план задачи X^* = (10; 4; 12; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 1). Прибыль от реализации продукции составит 320 д. е.

11.1.4. РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Порядок решения транспортных задач с помощью *QSB* рассмотрим на следующем примере.

Пример 1. Требуется составить такой план прикрепления трех потребителей к трем поставщикам, при котором

Таблица 65

Поставщики	Тарифы перевозок			Предложение поставщиков
	1	2	3	
1	7	6	4	120
2	3	8	5	100
3	2	3	7	80
Спрос потребителей	90	90	120	

общая стоимость перевозок будет минимальной. Тарифы перевозки единицы продукции от поставщиков к потребителям, объемы предложения поставщиков и спроса потребителей заданы в таблице 65.

Обозначим через ***Хц*** — количество единиц груза, запланированных к перевозке от г-го поставщика к у'-му потребителю.

Тогда экономико-математическая модель:

$$\min L = 7x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 3*_{21} + $$
$$+ 8x_{22} + 5x_{23} + 2x_{31} + 3x_{32} + 7x_{33};$$
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 100; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 80; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 90; \\ x_{21} + x_{22} + x_{32} = 90; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 120. \end{cases}$$

Здесь предполагается, что суммарное предложение равно суммарному спросу. Такая задача называется закрытой, или замкнутой. Если это условие не выполняется, то задача называется открытой. Для сведения открытой задачи к закрытой вводится или фиктивный поставщик, или фиктивный потребитель.

Подготовьте экономико-математическую модель задачи для решения на компьютере, причем объемы предложения поставщиков и спроса потребителей должны быть целыми числами, а тарифы перевозок могут быть вещественными. Итак, в нашей задаче: целевая функция на минимум, 3 поставщика, 3 потребителя. Предложение поставщиков: 120, 100 и 80. Спрос потребителей: 90, 90 и 120.

Выберите опцию 3 — Транспортная задача в главном меню системы. На экране появится функциональное меню, идентичное рассмотренному ранее.

В функциональном меню выберите опцию 2 — Ввод новой задачи, введите название задачи (например, *primS),* ответьте на вопросы о задаче. Варианты ответов: целевая функция на минимум, 3 поставщика, 3 потребителя. Будем использовать заданные обозначения поставщиков (Si, S_2, S„) и потребителей (D ь *D_2*, *D_n).* По окончании нажмите клавишу *Spacebar.* На экране появится шаблон для ввода объемов предложения поставщиков и спроса потребителей.

Заполните шаблон следующим образом (экран 23).

После нажатия клавиши *Spacebar* на экране появится шаблон для ввода стоимости перевозок (или прибыли от перевозок).

Введите данные, как показано ниже (экран 24).

Экран 23

постав.:					
S1:	120	S2:	100	S3:	80
потребитель:					
D1:	90	D2:	90	D3:	120

Экран 24

от	к					
S1	D1:	7	D2:	6	D3:	4
S2	D1:	3	D2:	8	D3:	5
S3	D1:	2	D2:	3	D3:	7

После нажатия *Spacebar* на экране появится функциональное меню.

В функциональном меню выберите опцию 5 — Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение> (экран 25).

Экран 25

Меню опции <Решение> рп'тЗ	
Опции	
1	Решение и просмотр начальной таблицы
2	Решение и просмотр всех таблиц
3	Решение и просмотр итоговой таблицы
4	Решение без просмотра таблиц
5	Использовать метод Фогеля
6	Возврат в функциональное меню

Выбор опции **6** обеспечивает возврат в функциональное меню без решения задачи. При выборе остальных опций задача будет решена. При этом для задач небольшой размерности доступны все режимы, а для больших задач — только опции **4–6**.

Для построения начального допустимого плана по умолчанию используется метод северо-западного угла, который можно заменить на метод аппроксимации Фогеля с помощью опции **4**.

Для поиска оптимального плана применен метод потенциалов. При этом признаком оптимальности плана является существование таких чисел $U(i)$ и $V(j)$, для которых выполняются условия:

$$U(i) + V(j) = C(i, j) \text{ для } x_{ij} > 0;$$
$$U(i) + V(j) \quad C(i, j) \text{ для } x_{ij} = 0, \qquad (*)$$

где C(/, у) и x_{ij} — стоимость перевозки единицы груза и количество перевозимого груза от i-го поставщика *(i* = 1, *m)* у'-му потребителю (у = 1, *n).*

Выберите опцию 2 — Решение и просмотр всех таблиц. Результаты решения на каждой итерации представлены одинаковыми по форме таблицами.

В первой таблице показан начальный допустимый план прикрепления поставщиков к потребителям (потенциалы *U(i)* и *V(j)* полагаются равными нулю, значение целевой функции = 2050). Переход к следующей таблице осуществляется нажатием любой клавиши, кроме *G,* при нажатии которой вычислительный процесс пойдет без останова до конца.

В этой таблице вычислены потенциалы по формуле (*). Признак оптимальности плана не выполнен для клетки (S_3, D_1), а именно — Г_/(3) + *V(l)* = 4 + 7 = 11 превосходит стоимость перевозки от поставщика S_3 к потребителю D_1 на 9, что изображено в виде двух звездочек, поставленных в этой клетке (**). Это значит, что в данную клетку следует поместить перевозку, объем которой равен 60 (определяется из цикла (3,l)-(3,3)-(2,3)-(2,2)-(l,2)-(l,l)).

Экран 26

Начальн. решение NWC					
SN \ DN	D1	D2	D3	предлож.	U(i)
S1	| 7.000 90.00	| 6.000 30.00	| 4.000	120.0	0
S2	| 3.000	| 8.000 60.00	| 5.000 40.00	100.0	0
S3	| 2.000	| 3.000	[7.000 80.00	80.00	0
спрос	90.00	90.00	120.0		
V0)	0	0	0		
Минимум значение цф = 2050					

На следующей итерации фиксируется перемещение перевозок по циклу, вычисляется текущее значение целевой функции (= 1510), определяется клетка (Si, D_3), для которой не выполнен признак оптимальности (е(1,3)= -8) и т. д. Процесс поиска оптимального решения заканчивается на четвертой итерации. После нажатия любой клавиши на экране появляется меню способов представления полученного решения задачи.

Выберите опцию 1 — Просмотр итогового решения. На экране появится таблица с результатами решения задачи (экран 27).

Экран 27

Итоговый результат prim3 Стр.: 1							
от	к	ФУЗ	тариф	от	к	груз	тариф
S1	D1	0.0	7.000	S2	D3	10.0	5.000
S1	D2	10.0	6.000	S3	D1	0.0	2000
S1	D3	110.0	4.000	S3	D2	80.0	3.000
S2	D1	90.0	3.000	S3	D3	0.0	7.000
S2	D2	0.0	8.000				

миним. значение цф = 1060 итерация = 4

После 4 итераций получили оптимальный план, согласно которому от первого поставщика везется ко второму потребителю 10, к третьему — 110, к четвертому — 90; от второго поставщика к первому потребителю — 90; к третьему — 10; от третьего поставщика ко второму потребителю — 80.

11.1.5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Порядок решения задачи о назначениях с помощью *QSB* рассмотрим на примере 1 из главы 5. Подготовьте исходные данные задачи для решения на компьютере (табл. 66).

Таблица 66

Кандидаты	Затраты времени по работам			
	1	2	3	4
1	3	7	5	8
2	2	4	4	5
3	4	7	2	8
4	9	7	3	8

Итак, в нашей задаче: целевая функция на минимум, 4 кандидата и 4 работы.

Выберите опцию 4 — Задача о назначениях в главном меню системы. На экране появится функциональное меню, идентичное рассмотренному ранее.

В функциональном меню выберите опцию 2 — Ввод новой задачи, введите название задачи (например, *prim4),* ответьте на вопросы о задаче. Варианты ответов: целевая функция на минимум, 4 кандидата, 4 работы, будем использовать заданные обозначения кандидатов *(O_1,* 0_2, 0„ — от *objects)* и работ *(T_1, T_2,* T_n — от *tasks).* По окончании нажмите клавишу *Spacebar.* На экране появится шаблон для ввода затрат времени на монтажные работы.

Заполните шаблон следующим образом (экран 28).

Экран 28

Ввод коэффициентов затрат/прибыли Стр. 1				
Кандид.	Раб.			
01	TT.3	T2:7	T3:5	T4:8
02	T1:2	T2:4	T3:4	T4:5
03	T1:4	T2:7	T3:2	T4:8
04	T1:9	T2:7	T3:3	T4:8

После нажатия *Spacebar* на экране появится функциональное меню.

В функциональном меню выберите опцию 5 — Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение> (экран 29).

Экран 29

Меню опции <Решение> prim4	
Опции	
1	Решение и просмотр начальной таблицы
2	Решение и просмотр всех таблиц
3	Решение и просмотр итоговой таблицы
4	Решение без просмотра таблиц
5	Возврат в функциональное меню

Выбор опции 5 обеспечивает возврат в функциональное меню без решения задачи. При выборе остальных опций задача будет решена. При этом для задач небольшой размерности доступны все режимы, а для больших задач — только опции 4-5.

Выберите опцию 2 — Решение и просмотр всех таблиц. Результаты решения на каждой итерации представлены одинаковыми по форме таблицами (экран 30).

Экран 30

Итерация 1					
ЮР	T1	T2	T3	T4	Линия
01	0	2.000	2.000	2.000	←
02	0	0	2.000	0	←
03	2.000	3.000	0	3.000	
04	6.000	2.000	0	2.000	
Линия			A		

Итерация 1 представляет собой первый шаг алгоритма венгерского метода. В строке «линия» вычеркнутые столбцы помечены символом   В столбце «линия» вычеркнутые строки помечены символом <—. Переход к следующей итерации осуществляется нажатием любой клавиши, кроме *G*, при нажатии которой вычислительный процесс пойдет без остановки до конца.

Процесс поиска оптимального решения заканчивается на второй итерации. После нажатия любой клавиши на экране появляется меню способов представления полученного решения задачи.

Выберите опцию 1 — Просмотр итогового решения. На экране появится таблица с результатами решения задачи (экран 31).

Экран 31

Сводка назначений для prim4 Стр.: 1					
Канд.	Раб.	Затр./приб.	Канд.	Раб.	Затр./приб.
01	T1	3.000	03	T3	2.000
02	T2	4.000	04	T4	8.000
Мин. значение цф = 17 число итераций = 2					

Первый кран закрепляется за первой работой, второй — за второй, третий — за третьей, четвертый — за четвертой. При этом минимальное время на монтаж всех объектов равно 17.

11.1.6. РЕШЕНИЕ СЕТЕВЫХ ЗАДАЧ *(NET)*

Порядок решения сетевых задач с помощью *QSB* рассмотрим на следующем примере.

Пример 2. Пусть имеются пять пунктов, соединенных между собой дорогами так, что из любого пункта можно проехать в любой другой пункт (табл. 67). Известно расстояние от пункта ***i*** до пункта ***j***.

Таблица 67

Из пункта I	Расстояние до пункта./				
	1	2	8	4	5
1	0	10	25	25	10
2	1	0	10	15	2
3	8	9	0	20	10
4	14	10	24	0	15
5	10	8	25	27	0

Требуется найти кратчайший маршрут от пункта 1 до любого другого пункта.

Подготовьте исходные данные задачи для решения на ЭВМ: определите число ветвей и узлов в задаче (20 ветвей и 5 узлов).

Выберите опцию 5 — Сетевое моделирование ***(NET)*** в главном меню системы. На экране появится функциональное меню, идентичное рассмотренному ранее.

В функциональном меню выберите опцию 2 — Ввод новой задачи, введите название задачи (например, *prim5),* ответьте на вопросы о задаче. Варианты ответов: 20 ветвей, 5 узлов, будем использовать алгоритм кратчайшего пути. По окончании нажмите клавишу *Spacebar.* На экране появится шаблон для ввода расстояния между пунктами.

Заполните шаблон следующим образом (см. экран 32).

Экран 32

Ветвь Номер	Ветвь	Нач Код	Кон Узел	Расстоян. Узел	Ветвь Номер	Ветвь	Нач. Код	Кон. Узел	Расстоян. Узел
1	<B1>	<1>		<10>	11	<B11>	<3>	<4>	<20>
2	<B2>	<1>	<3>	<25>	12	<B12>	<3>	<5>	<10>
3	<вз>	<1>	<4>	<25>	13	<B13>	<4>	<1>	<14>
4	<B4>	<1>	<5>	<10>	14	<B14>	<4>	<2>	<10>
5	<B5>	<2>	<1>	<1>	15	<B15>	<4>	<3>	<24>
6	<B6>	<2>	<3>	<10>	16	<B16>	<4>	<5>	<15>
7	<B7>	<2>	<4>	<15>	17	<B17>	<5>	<1>	<10>
8	<B8>	<2>	<5>	<2>	18	<B18>	<5>	<2>	<8>
9	<B9>	<3>	<1>	<8>	19	<B19>	<5>	<3>	<25>
10	<B10>	<3>	<2>	<9>	20	<B20>	<5>	<4>	<27>

Можно дать произвольные названия ветвям длиной до 6 символов (заданные по умолчанию — $B_и$ B_n). Узлы нумеруются последовательно, с 1 до 5. Ветви вводятся в произвольной последовательности. После нажатия клавиши *Spacebar* на экране появится функциональное меню.

В функциональном меню выберите опцию 5 — Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение> (экран 33).

Выбор опции 3 обеспечивает возврат в функциональное меню без решения задачи. Опция 1 обеспечивает просмотр процесса решения задачи с помощью заданного вами алгоритма (алгоритма кратчайшего пути). Опция 2 дает решение без просмотра процесса по шагам.

Выберите опцию 2 — Решение без просмотра по шагам. Результат решения задачи показан на экране 34.

В графе «Расстоян.» показана длина кратчайшего пути от первого пункта до указанного пункта в графе «узел»; в последней графе — названия пунктов, через которые проходит кратчайший путь, а в скобках — названия ветвей.

Экран 33

Меню опции <Решение> prim5	
Опции	
1	Решение и просмотр по шагам
2	Решение без просмотра по шагам
5	Возврат в функциональное меню

Экран 34

Итоговый кратчайший путь для prim5 Стр.: 1		
Узел	Расстоян.	Кратчайший путь из узла 1
2	1	1-2 (B1)
3	8	1-3(B2)
4	11	1-2-4 (B1-B7)
5	9	1-2-5 (B1-B8)

После нажатия любой клавиши на экране появится меню <Решение>.

Выйдите в функциональное меню и выберите опцию 7 — Изменение задачи.

На экране появится меню опции <Изменение>, в котором выберите опцию 5 — выбор алгоритма. На экране появится меню выбора алгоритма модели, где показан текущий алгоритм и предложено 3 варианта выбора: алгоритм кратчайшего пути (1), алгоритм максимального потока (2) и алгоритм минимального размаха дерева (3).

Введите цифру 2 и нажмите *Enter*. Ранее введенные данные о расстоянии между пунктами теперь интерпретируются как величина потока (объем грузоперевозок) между этими пунктами. Найдем максимальную величину потока от начального узла до конечного, т. е. максимальный суммарный объем грузоперевозок. Для этого вернитесь в функциональное меню и решите задачу (экран 35).

экран 35

Итоговый поток для prim5 Стр.: 1	
Ветвь	Поток
1-2 (B1)	10
1-3 (B2)	25
1-4 (B3)	25
1-5 (B4)	10
2-3 (B6)	10
2-4 (B7)	15
2-5(B8)	2
3-4 (B11)	20
3-5 (B12)	10
4-5 (B16)	15
Макс.итоговый поток = 0	

Поскольку сеть замкнута в нашей задаче, то максимальный поток получился равным нулю.

11.1.7. РЕШЕНИЕ СЕТЕВЫХ ЗАДАЧ *(CPM)*

Порядок решения сетевых задач с помощью *QSB* рассмотрим на следующем примере.

Рассчитать параметры сети и оптимизировать сетевой график, если известны время выполнения (продолжительность) и стоимость работ в нормальных и экстремальных условиях (см. табл. 68).

Подготовьте исходные данные задачи для решения на ЭВМ: определите число работ в задаче (12 работ).

Выберите опцию 6 — Сетевое моделирование *(CPM)* в главном меню системы.

В функциональном меню выберите опцию 2 — Ввод новой задачи, введите название задачи (например, *prim.6),* ответьте на вопрос о количестве работ в задаче (12 работ). По окончании нажмите клавишу *Spacebar*. На экране появится шаблон для ввода продолжительности и стоимости работ в нормальных и критических условиях. Если критические характеристики неизвестны, то оставляются

Код работы	Время		Стоимость		|1 *а	Время		Стоимость	
	норм.	крит.	норм.	нsаX		норм.	нsаX	норм.	hXаи
1-2	5	3	2000	2500	4-5	б	5	3000	3000
1-3	4	4	3000	3000	4-7	4	3	3000	3700
1-4	8	7	4000	5000	5-6	9	6	700	1600
2-3	3	2	1200	1500	5-7	11	7	1500	2000
2-6	7	5	2000	3000	6-8	8	6	600	1500
3-5	3	3	8000	8000	7-8	10	9	1000	1050

пропуски. Продолжительность и стоимость работ задаются длиной не более 6 цифр, включая запятую.

Заполните шаблон следующим образом (экран 36).

Экран 36

Номер	Назв.	Нач. Узел	Кон. Узел	Норм. Продолж	Крит. Продолж.	Норм. стоим.	Крит. стоим.
1	<1-2>	<1>	<2>	<5>	<3>	<2000>	<2500>
2	<1-3>	<1>	<3>	<4>	<4>	<3000>	<3000>
3	<1-4>	<1>	<4>	<8>	<7>	<4000>	<5000>
4	<2-3>	<2>	<3>	<3>	<2>	<1200>	<1500>
5	<2-6>	<2>	<6>	<7>	<5>	<2000>	<3000>
6	<3-5>	<3>	<5>	<3>	<3>	<8000>	<8000>
7	<4-5>	<4>	<5>	<5>	<5>	<3000>	<3000>
8	<4-7>	<4>	<7>	<4>	<3>	<3000>	<3700>
9	<5-6>	<5>	<6>	<9>	<6>	<700>	<1600>
10	<5-7>	<5>	<7>	<11>	<7>	<1500>	<2000>
11	<6-8>	<6>	<8>	<8>	<6>	<600>	<1500>
12	<7-«>	<7>	<8>	<10>	<9>	<1000>	<1050>

Можно дать произвольные названия работам длиной до 6 символов. Работы вводятся в произвольной последовательности. После нажатия клавиши *Spacebar* на экране появится функциональное меню.

В функциональном меню выберите опцию 5 — Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение> (экран 37).

Экран 37

Меню опции <Решение> рптб	
Опции	
1	Решение с показом результатов
2	Решение без показа результатов
3	Печать итогового решения
4	Критический анализ
5	Возврат в функциональное меню

Выбор опции 5 обеспечивает возврат в функциональное меню без решения задачи. Опция 1 обеспечивает просмотр процесса решения задачи по шагам. Опция 2 дает решение без показа результатов. Опция 3 позволяет напечатать итоговые результаты. Опция 4 необходима для проведения критического анализа.

Выберите опцию 2 — Решение с показом результатов и нажмите *Enter*.

В первой графе таблицы дан порядковый номер работы, во второй — код работы, в третьей и четвертой — раннее и позднее время начала работы, в пятой и шестой — раннее и позднее время окончания работы, в седьмой — резерв времени по работам. Критические работы в последней графе помечены надписью «крит.». В последней строке показано суммарное время выполнения работ (34) и суммарная стоимость (30 000) (экран 38).

После нажатия любой клавиши на экране появится графическое изображение найденного решения (экран 39).

После нажатия любой клавиши осуществляется возврат в меню <Решение>. Выберите опцию 4 — критический анализ.

При выполнении критического анализа исходные данные будут уничтожены.

Экран 38

CPM анализ для prim6 Стр. 1						
N работы	Назв.	Раннее начало	Позднее начало	Раннее оконч.	Позднее оконч.	Резерв
1	1-2	0	2.0000	5.0000	7.0000	2.0000
2	1-3	0	6.0000	4.0000	10.000	6.0000
3	1-4	0	0	8.0000	8.0000	крит.
4	2-3	5.0000	7.0000	8.0000	10.000	2.0000
5	2-6	5.0000	19.000	12.000	26.000	14.000
6	3-5	8.0000	10.000	11.000	13.000	2.0000
7	4-5	8 0000	8.0000	13.000	13.000	крит.
8	4-7	8.0000	20.000	12.000	24.000	12.000
9	5-6	13.000	17.000	22.000	26.000	4.0000
10	5-7	13.000	13.000	24.000	24.000	крит.
11	6-8	22 000	26.000	30.000	34.000	4.0000
12	7-8	24 000	24 000	34.000	34.000	крит.
сум.время = 34 сум.стоим. = 30 000						

Экран 39

```
Критические пути prim6 сум. время = 34 сум. стоим. = 30000
кп # 1:
     1–4            4–5            5–7            7–8
 1 = = = = = = = = = > 4 = = = = = = = = = > 5 = = = = = = = = = > 7 = = = = = = = = > 8
```

Эвристический метод оптимизирует сеть по критерию «время—стоимость». Результаты критического анализа показываются по шагам. Перед выполнением каждого шага выдается запрос: «Сократить время, увеличив стоимость *(Y/N)?»*. Каждый раз отвечайте *Y*, пока не появится сообщение: «Анализ выполнен».

По шагам выводится информация о том, какая критическая работа сокращается, каково при этом увеличение ее стоимости, суммарное время выполнения и суммарная стоимость работ (экран 40).

Экран 40

```
Сокращается:
Крит, работа: I продолжит-ть: 7 увеличение ст-сти: 300
Критические пути рп'тбгсум. время = 28 сум. стоим. = 32150
кп#1  :
C              F              J              L
1=========>4=========>5=========>7========>8
```

В результате проведения критического анализа суммарное время выполнения работ уменьшилось с 34 до 28 единиц, а стоимость увеличилась с 30 ООО до 32 150 д. е.

Программа *Сетевое моделирование (PERT)* предусмотрена для расчета параметров сети, когда продолжительности работ оцениваются пессимистически, наиболее вероятно и оптимистически. Процесс взаимодействия пользователя с этой программой аналогичен рассмотренному выше.

11.1.8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Порядок решения сетевых задач с помощью *QSB* рассмотрим на примере 1 из главы 7.

Подготовьте исходные данные задачи для решения на ЭВМ: определите количество этапов в задаче (4 этапа), тип задачи (задача о дилижансе).

Выберите опцию **8** — Динамическое программирование в главном меню системы.

В функциональном меню выберите опцию 2 — Ввод новой задачи, введите название задачи (например, *prim7),* ответьте на вопрос о количестве этапов в задаче (4 этапа). Данные вводятся начиная с первого этапа. Нумерация узлов выполняется автоматически с 1 (для первого этапа) до последнего узла.

Длина несуществующего пути задается большим числом (например, в нашей задаче 999). Введите данные, как показано ниже (экран 41).

По окончании нажмите любую клавишу. В функциональном меню выберите опцию 5 — Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение> (экран 42).

Выберите опцию 2 — Решение с показом результатов. На экране появятся результаты решения задачи (экран 43).

Итоговый кратчайший путь проходит через пункты 1-3-7-9-10, суммарное расстояние равно 17.

Экран 41

этап 1:	Сколько конечных узлов в этом этапе?	3
	от начал, узла 1 к конечн. узлу 2: Расстояние/затр?	2
	от начал, узла 1 к конечн. узлу 3: Расстояние/затр?	5
	от начал, узла 1 к конечн. узлу 4: Расстояние/затр?	1
этап 2:	Сколько конечных узлов в этом этапе?	3
	от начал, узла 2 к конечн. узлу 5: Расстояние/затр?	10
	от начал, узла 2 к конечн. узлу 6: Расстояние/затр?	12
	от начал, узла 2 к конечн. узлу 7: Расстояние/затр?	999
	от начал, узла 3 к конечн. узлу 5: Расстояние/затр?	5
	от начал, узла 3 к конечн. узлу 6: Расстояние/затр?	10
	от начал, узла 3 к конечн. узлу 7: Расстояние/затр?	7
	от начал, узла 4 к конечн. узлу 5: Расстояние/затр?	999
	от начал, узла 4 к конечн. узлу 6: Расстояние/затр?	15
	от начал, узла 4 к конечн. узлу 7: Расстояние/затр?	13
этап 3:	Сколько конечных узлов в этом этапе?	2
	от начал, узла 5 к конечн. узлу 8: Расстояние/затр?	7
	от начал, узла 5 к конечн. узлу 9: Расстояние/затр?	5
	от начал, узла 6 к конечн. узлу 8: Расстояние/затр?	3
	от начал, узла 6 к конечн. узлу 9: Расстояние/затр?	4
	от начал, узла 7 к конечн. узлу 8: Расстояние/затр?	7
	от начал, узла 7 к конечн. узлу 9: Расстояние/затр?	1
этап 4:	Сколько конечных узлов в этом этапе?	1
	от начал, узла 8 к конечн. узлу 10: Расстояние/затр?	1
	от начал, узла 9 к конечн. узлу 10: Расстояние/затр?	4

Экран 42

Меню опции <Решение> prim7	
Опция	
1	Решение и просмотр по шагам
2	Решение без просмотра по шагам
3	Печать итогового решения
4	Возврат в функциональное меню Опции

Экран 43

Итоговый кратчайший путь prim7

Этап	Ветвь	Расстояние до п. назнач.
4	1-3	17
3	3-7	12
2	7-9	5
1	9-10	4

11.1.9. **РЕШЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ**

Порядок решения вероятностных моделей с помощью *QSB* рассмотрим на следующем примере.

Пример 3. Выполнить анализ платежной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 4 \\ 8 & 3 & 7 \\ & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Апостериорные вероятности (0,2; 0,3; 0,5).

Выберите опцию С — Вероятностные модели в главном меню системы.

В функциональном меню выберите опцию 2 — Ввод новой задачи, введите название задачи (например, *prim7),* ответьте на вопросы. Варианты ответов: тип анализа — анализ платежной матрицы (тип 3), количество состояний природы 3, количество альтернатив 3, платеж представлен прибылью (1).

Введите данные, как показано на экране 44.

По окончании нажмите любую клавишу. В функциональном меню выберите опцию **5** — Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение> (экран 45).

Последовательно выберите опции 1—6 и просмотрите результаты расчета критериев.

Получены следующие значения критериев: *Maximin* = 5 (решение *AI); Maximax* = 9 (AI); *Minimax* = 3 (A1); ожидаемое значение = 6.9 (A3); ожидаемое значение по принципу недостаточного основания = 7.3 (A1); ожидаемые потери = 1.3 (A3).

Экран 44

81:	0.2	S2:0.3	S3: 0.5
Сост.		Альт.	
S1	A1:9	A2:6	A3:4
S2	A1:8	A2:3	A3: 7
S3	A1:5	A2:5	A3: 8

Экран 45

Анализ платеж, матрицы	
Выберите один из CJ	гедующих критериев:
1 —	Maximin
2 —	Maximax
3 —	Minimax
4 —	Ожид. значение
5 —	Принцип недостаточного основания
6 —	Ожидаемые потери
9 —	Возврат в функциональное меню

11.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В EXCEL

11.2.1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В *Excel* имеется процедура *Поиск решения,* которая используется для решения задач линейного программирования. Рассмотрим поиск решения на примере составления плана по производству двух продуктов — печенья и бисквитов.

Для решения задачи сначала подготовим исходные данные на листе *Excel.* В ячейку первой строки введено название задачи, в ячейки столбца А — наименования строк таблицы, в ячейки второй строки — названия столбцов таблицы. В столбцах В и С (Печенье и Бисквиты) содержатся необходимые данные по этим двум продуктам. Ячейки B_3 и C_3 — компоненты будущего оптимального плана (в математической модели переменные x_1 и x_2). Пока они пустые. В столбцах приведены данные на единицу продукции. В ячейках B_4 и C_4 содержатся отпускные цены продуктов. Далее приведены данные по затратам ресурсов на единицу выпуска продукции (экран 46).

Экран 46

Вид исходных данных для процедуры *Поиск решения*

	A	B	с	» I	E	F
1	Расчет оптимального плана					
2		Печенье	Бисквиты	Необходимо	Доступно	Остаток
3	План					
4	Выручка	32	27	0		
5	Мука	0,5	0,3	0,0	825	825
6	Масло	0,3	0,06	0,0	480	480
7	Яйцо	0,18	0,6	0,0	720	720
8	Сахар	0,2	0,3	0,0	450	450
9	Труд	0,07	0,09	0,0	200	200
10	Оборуд. 1	0,015	0,006	0,0	40	40
11	Оборуд. 2	0,0075	0015	0,0	40	40

В столбце *Е* «Доступно» указаны доступные объемы ресурсов. В столбце *D* «Необходимо» введены формулы, позволяющие выделить выручку и затраты ресурсов при реализации данного производственного плана. Формульное содержание таблицы дано на экране 47. Формулы столбца *D* в точности соответствуют выражениям в целевой функции и левых частях ограничений математической модели. Присутствующие в столбце *D* знаки $ не обязательны, но позволяют упростить процесс ввода: достаточно ввести формулу

Экран 47

Формулы расчета исходных данных для процедуры *Поиск решения*

	A	B	C	D	E	F
1	Расчет оптимального плана					
2		Печенье	Бисквиты	Необходимо	Доступно	Остаток
3	План					
4	Выручка	32	27	= B4*$B$3 + C4*$C$3		
5	Мука	0,5	0,3	= B5*$B$3 + C5*$C$3	825	= E5 - D5
6	Масло	0,3	0,06	= B6*$B$3 + C6*$C$3	480	= E6 - D6
7	Яйца	0,18	0,6	= B7*$B$3 + C7*$C$3	720	= E7 - D7
8	Сахар	0,2	0,3	= B8*$B$3 + C8*$C$3	450	= E8 - D8
9	Труд	0,07	0,09	= B9*$B$3 + C9*$C$3	200	= E9 - D9
10	Оборуд. 1	0,015	0,006	= B10*$B$3 + C10*$C$3	40	= E10 - D10
11	Оборуд. 2	0,0075	0,015	= B11*$B$3 + C11*$C$3	40	= E11 - D11

в одну из ячеек столбца «Необходимо» и затем распространить ее по всему столбцу (экран 47).

Сначала затраты ресурсов и выручка автоматически оказываются равными нулю. Это соответствует отсутствию производства продукции.

В ячейках столбца «Остаток» введены формулы, вычисляющие разность между доступным и необходимым объемом ресурса. В начальной ситуации «Остаток» совпадает с «Доступно».

Такой таблицей можно пользоваться достаточно эффективно и без процедуры *Поиск решения.* Достаточно в ячейки «плана» B_3 и C_3 ввести какие-нибудь данные, чтобы сразу получить результат расчета выручки, необходимых затрат ресурсов и их остатков. Если остаток хотя бы по одному из ресурсов получился отрицательным («Необходимо» оказалось больше, чем «Доступно»), то план является недопустимым. Можно перебирать различные варианты допустимых планов, пока мы не получим план с удовлетворительным размером выручки.

Процедура *Поиск решения* позволяет автоматизировать такой перебор и сделать его направленным. Прежде чем обратиться к процедуре, полезно выделить ячейку D_4.

Для вызова процедуры следует в меню войти в *Сервис* и там кликнуть мышью *Поиск решения.* Если в *Сервисе* отсутствует *Поиск решения,* то необходимо войти в *Надстройки* и там пометить *Поиск решения.* После выхода из *Надстроек* в меню *Сервис* появится *Поиск решения.* Если же и в *Надстройках* нет *Поиска решения,* то следует переустановить *Excel,* пометив *Поиск решения* при выборе компонентов установки.

При входе в *Поиск решения* на экране появляется диалоговое окно. Верхнее поле *Установить целевую функцию* первоначально является активным (если нет, его следует активизировать). В нем должен быть указан адрес целевой ячейки (в нашей задаче это $Z)$4).

Мы хотим максимизировать выручку, поэтому переключатель *Равной* должен быть в положении *максимальному значению.*

Если бы в другой задаче потребовалось найти решение для заранее заданного значения целевой ячейки, то переключатель следовало бы установить в положение *значению* и в открывшемся поле указать требуемое число.

Далее следует щелкнуть в поле *Изменяя ячейки* (или свернуть окно) и выделить мышью диапазон с ячейками $B$3:$C$3, содержащими компоненты искомого плана. Если в другой задаче ячейки плана оказываются разделенными (несмежными), то их следует вводить при нажатой клавише *Ctrl.* В поле *Изменяя ячейки* адреса несмежных ячеек должны быть разделены точкой с запятой.

Для ввода данных в окно *Ограничения* следует нажать кнопку *Добавить.* На экране возникнет новое диалоговое окно *Добавление ограничения,* предназначенное для ввода ограничений.

В поле *Ссылка на ячейку* можно вводить адреса отдельных ячеек или же целого диапазона. В нашем случае выделим мышью диапазон $D$5:$£)$11.

В среднем окошке выберем из списка вид ограничения. В нашем случае это < = (этот знак стоит по умолчанию). В других задачах, возможно, потребуются другие виды ограничений. В частности, вид ограничения «цел» означает, что содержимое ячеек в левом поле должно быть целочисленным, а «двоич» означает, что допустимыми числовыми значениями данных ячеек являются только 1 и 0 (Да и Нет).

В поле *Ограничение* можно вводить адреса отдельных ячеек, целого диапазона или же число. В нашем случае выделим мышью диапазон $-E$5:$£7$11. Это означает, что содержимое каждой ячейки диапазона $Z)$5:$7J$11 не превосходит содержимого соответствующей ячейки диапазона $£$5:$£$11.

Далее можно нажать кнопку *ОК.* Если бы потребовались дополнительные ограничения, то следовало бы нажать кнопку *Добавить* и продолжить ввод ограничений.

В появившемся диалоговом окне *Поиск решения* можно увидеть результаты проведенных действий (см. рис. 35).

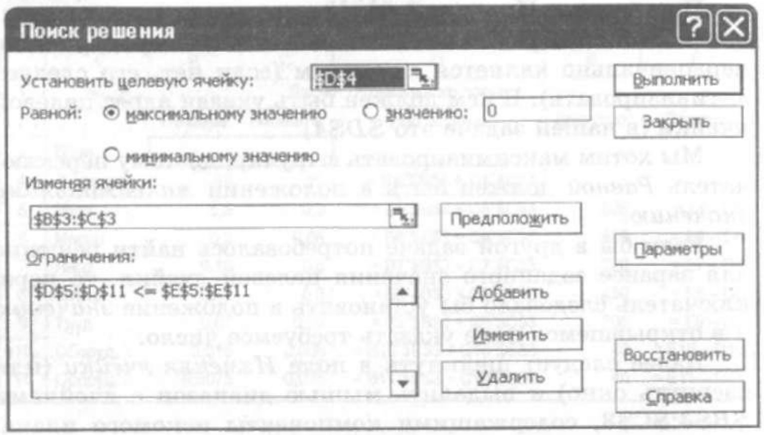


Рис. 35

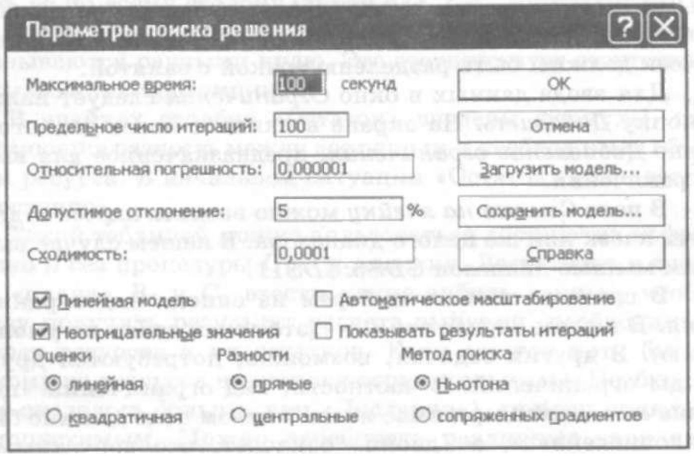


Рис. 36

Теперь следует нажать кнопку *Параметры* и в новом окне поставить два флажка (рис. 36).

Флажок *Неотрицательные значения* соответствует неотрицательности компонентов плана, т. е. объемов производства печенья и бисквитов. Флажок *Линейная модель* (наша модель не содержит нелинейных функций) ускорит процесс вычислений и позволит вывести *Отчеты* для более подробного постоптимизационного анализа.

Теперь можно нажать кнопку *ОК* и в вернувшемся окне нажать кнопку *Выполнить.*

В окне *Результаты поиска решения* можно прочесть итоговое сообщение.

Далее можно сразу нажать кнопку *ОК* и зафиксировать на листе Excel результаты оптимизации или же дополнительно к этому вывести *Отчеты* для постоптимизационного анализа. Для получения *Отчетов* необходимо пометить мышью в поле *Тип отчета* их требуемые типы.

Пометим в окне *Тип отчета* все три типа — *Результат, Устойчивость* и *Пределы* — и после этого нажмем кнопку *ОК.*

На листе *Excel,* содержащем модель, появляются результаты расчетов (экран 48). Оптимальный план предписывает изготовить 1250 кг печенья и 666,667 кг бисквитов. Выручка при этом будет равна 58 тыс. руб. В столбце «Необходимо» появляется новая информация о затратах ресурсов, необходимых для реализации плана. В столбце «Остатки» появляется дополнительная информация о неиспользованных объемах ресурсов.

Листы с *Отчетами* автоматически вставляются в книгу с соответствующими ярлычками.

Экран 48

Результаты расчета оптимального плана

	A	B	C	D	E	F
1	Расчет оптимального плана					
2		Печенье	Бисквиты	Необходимо	Доступно	Остаток
3	План	1250,0	666,7			
4	Выручка	32	27	58000		
5	Мука	0,5	0,3	825,0	825	825
6	Масло	0,3	0,06	415,0	480	65
7	Яйца	0,18	0,6	625,0	720	95
8	Сахар	0,2	0,3	450,0	450	52,5
9	Труд	0,07	0,09	147,5	200	200
10	Оборуд. 1	0,015	0,006	22,8	40	17,25
11	Оборуд. 2	0,0075	0,015	19,4	40	20,625

Отчет по результатам состоит из трех блоков данных. Первые два, «Целевая ячейка (Максимум)» и «Изменяемые ячейки», содержат данные по исходному и результирующему состоянию этих ячеек. Третий блок, «Ограничения», содержит информацию по ячейкам и формулам ограничений модели (см. экран 49). Здесь же указываются статус ограничения (связанное или несвязанное) и разница, соответствующая в нашей модели неиспользованному остатку ресурса.

В *Отчете по устойчивости* представлены два блока: «Изменяемые ячейки» и «Ограничения». Первый блок содержит информацию по допустимому увеличению и уменьшению коэффициентов целевой функции. Столбец «Нормир. стоимость» дает полезную информацию, когда хотя бы одна

Экран 49

Отчет по результатам

Целевая ячейка (Максимум)				
Ячейка			SSEZ	^ультат
$D$4	Выручка	Необходимо	0	58000
Изменяемые ячейки				
Ячейка			ESS	^ультат
$B$3	План	Печенье	0,0	1250,0
$C$3	План	Бисквиты	0,0	666,7

Ограничения						
Ячейка	Имя		Значение	Формула	Статус	Разница
$D$5	Мука	Необходимо	825,0	$D$5 < = $E$5	связанное	0
$D$6	Масло	Необходимо	415,0	$D$6< = $E$6	не связан.	65
$D$7	Яйца	Необходимо	625,0	$D$7 < = $E$7	не связан.	95
$D$8	Сахар	Необходимо	450,0	$D$8 < = SE$8	связанное	0
$D$9	Труд	Необходимо	147,5	$D$9 < = $E$9	не связан	52,5
$D$10	Оборуд. 1	Необходимо	22,8	$D$10< = $E$10	не связан.	17,25
$D$11	Оборуд.2	Необходимо	19,4	$D$11< = $E$11	не связан	20,625

Экран SO

Отчет по устойчивости

Изменяемые ячейки							
Ячей-ка	Имя		Результ. значе-ние	Нормир. стой-мость	Целевой коэф-фициент	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$B$3	План	Печенье	1250,0	0,0	32	13	14
$C$3	План	Бисквиты	666,7	0,0	27	21	7,8

Ограничения							
Ячей-ка	ИМЯ		рзХ-'	т^е в ая н я цена	правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$D$5	Мука	Необходимо	825,0	46,7	825	75	129,5454545
$D$6	Масло	Необходимо	415,0	0,0	480	1E + 30	65
$D$7	Яйца	Необходимо	625,0	0,0	720	1E + 30	95
SD$8	Сахар	Необходимо	450,0	43,3	450	34,75609756	97,5
SDS9	Труд	Необходимо	147,5	0,0	200	1E + 30	52,5
$D$10	Оборуд. 1	Необходимо	22,8	0,0	40	1E + 30	17.25
$D$11	Оборуд.2	Необходимо	19,4	0,0	40	1E + 30	20,625

компонента плана равна нулю (производство того или иного продукта невыгодно). В этой ситуации «Нормир. стоимость» показывает потери величины целевой функции, приходящиеся на каждую единицу производства такого невыгодного продукта (экран 50).

Во втором блоке представлены данные по теневой цене ресурсов и по допустимому увеличению и уменьшению их

Экран 51

Отчет по пределам

Целевое							
Ячейка	Имя		Значение				
SDS4	Выручка	Необходимо	58 000				
Изменяемое							
Ячейка	Имя		Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$B$3	План	Печенье	1250,0	0,0	18 000,0	1250,0	58 000,0
SCS3	План	Бисквиты	666,7	0,0	40 000,0	666,7	58 000,0

объемов. Теневая цена несвязанных ресурсов равна нулю, и в нашей модели допустимое увеличение таких избыточных ресурсов не ограничено. В компьютерной реализации бесконечность символизируется астрономическим числом *1E* + 30 (10 в 30-й степени).

В *Отчете по пределам* два блока: «Изменяемое» и «Целевое» (экран 51). Здесь новая информация содержится в ячейках столбца «Целевое результат». Числа в этих ячейках показывают, чему была бы равна выручка при отсутствии одного из продуктов.

11.2.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачи целочисленного программирования решаются аналогично задачам линейного программирования. Основное отличие заключается во вводе требования целочисленности.

Решим пример о производстве печенья и бисквитов с учетом требования целочисленности.

Для ввода требования целочисленности раскрыть лист «Расчет оптимального плана», выполнить команду *Сервис, Поиск решения, Добавить.* На экране возникнет диалоговое окно *Добавление ограничения.* В *Ссылке на ячейку* ввести адреса ячеек, рядом ввести *цел* (рис. 37).

Вызвать диалоговое окно *Поиск решения,* нажать кнопку *Параметры,* поставить флажок на *Показывать результаты итераций,* затем *Выполнить.*

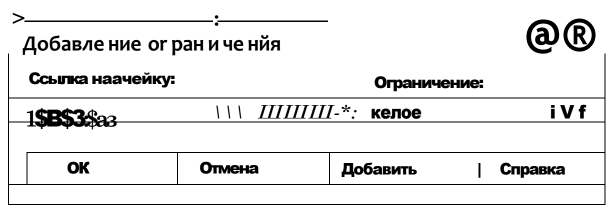


Рис. 37

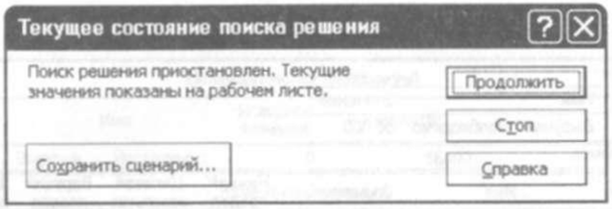


Рис. 38

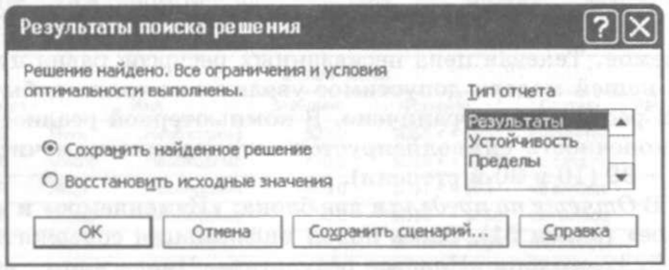


Рис. 39

Экран 52

	A	B	C	D	E	F	G
6	Целевая ячейка (Максимум)						
7	Ячейка		Имя	Исходное значение	Результат		
8	$D$4						
9							
10							
11	Изменяемые ячейки						
12	Ячейка		Имя	Исходное значение	Результат		
13	$B$3	План	Печенье	0,0	1251,0		
14	$C$3	План	Бисквиты	0,0	665,0		
15							
16							
17	Ограничения						
18	Ячейка		Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
19	SDS5	Мука	Необходимо	825,0	$D$5 < = $E$5	связанное	0
20	$D$6	Масло	Необходимо	415,2	$D$6 < = $E$6	не связан.	64,8
21	$D$7	Яйца	Необходимо	624,2	$D$7 < = $E$7	не связан.	95,82
22	$D$8	Сахар	Необходимо	449,7	$D$8 < = $E$8	не связан.	0,3
23	SDS9	Труд	Необходимо	147,4	$D$9 < = $E$9	не связан.	52,58
24	$D$10	Оборуд. 1	Необходимо	22,8	$D$10< = $E$10	не связан.	17,245
25	$D$11	Оборуд.2	Необходимо	19,4	D1K = $E$11	не связан.	20,6425
26	$B$3	План	Печенье	1251,0	$B$3 = целое	связанное	0,0
27	$C$3	План	Бисквиты	665,0	$C$3 = целое	связанное	0,0

На экране появится результат решения на первой итерации и диалоговое окно *Текущее состояние поиска решения* (рис. 38).

Щелкнуть *Сохранить сценарий,* затем *Продолжить,* ввести номер итерации как имя сценария, повторять до появления диалогового окна *Результат поиска решения* (рис. 39).

Для целочисленных задач возможен только *Отчет по результатам* (экран 52).

Получить сводный отчет по всем итерациям можно через команду *Сервис, Сценарии, Отчет.* В диалоговом окне *Отчет по сценарию* выбрать *Структура.* В книге появится новый лист *Структура сценария* с результатами решения на всех итерациях.

11.2.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Решение задач нелинейного программирования рассмотрим на примере 1 из главы 6:

$$\min f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 180, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для решения задачи подготовим исходные данные (экран 53). В ячейке, где будет представлен результат, назначить два знака после запятой. Назначим начальные значения искомых переменных, так чтобы целевая функция не была равна нулю, например $x_1 = 1$, ..., $x_2 = 1$.

Вызвать процедуру *Поиск решения* и задать целевую функцию на минимум, изменяемые ячейки $\$B\$3{:}\$C\$3$, ограничение $\$D\$5 = \$E\$5$. В диалоговом окне *Параметры* поиска решения не надо вводить *линейная модель.*

В качестве метода решения может быть выбран метод Ньютона или градиентные методы. В методе Ньютона используются вторые производные, что требует больших вычислений на каждой итерации, но оптимальное решение находится за меньшее число итераций, чем в градиентных методах, в которых используются первые производные.

Экран 53

	A	B	C	D	E
1				Расчет оптимального плана	
2		x1	x2	Необходимо	Доступно
3	План	1,0	1,0		
4	ЦФ			= 4*B3 + B3^2 + 8*C3 + C3^2	
5	Ограничение			= B5*B3 + C5*C3	180

После команды *Выполнить* на экране появятся результаты поиска решения. Получено решение $x_1 = 91$, $x_2 = 89$, целевая функция 17278.

Отчеты по результатам, устойчивости и пределам аналогичны таким же отчетам для задач линейного программирования.

11.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В MATLAB

11.3.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Пакет *MatLab (Matrix Laboratory)* применяют для решения задач, возникающих в различных прикладных областях: обработка сигналов и изображений, визуализация данных, статистический анализ, матричный анализ, оптимизация, нейронные сети, нечеткая логика, моделирование нелинейных динамических систем.

Арифметические выражения в *MatLab* состоят из чисел, знаков арифметических операций, знака ^ (возведение в степень), круглых скобок, переменных и встроенных функций. Десятичная часть числа отделяется точкой. Для вычисления простейшего выражения следует набрать его в командной строке и нажать *Enter*. Ответ записывается в переменную *ans* и результат выводится в командное окно (экран 54).

Вид результата зависит от установленного формата. После вычисления следующего выражения значение *ans* изменится, Для сохранения результатов промежуточных вычислений их следует записывать в переменные. Имя переменной может состоять из символов латинского алфавита, знака подчеркивания и цифр; начинается обязательно с символа алфавита; прописные и строчные буквы различаются; пробел не входит в имя переменной.

В качестве знака присваивания используется = (пример на экране 55).

Результат сразу же выводится в командное окно. Для подавления вывода следует завершить строку с оператором присваивания точкой с запятой. Символ е предназначен для записи чисел в экспоненциальной форме, числа 0.00152 и 1.52е-3 эквивалентны.

Экран 54

```
»1.6+ 2.9
ans =
  45000
```

Экран 55

```
»a = 5.Г(0.8-6.5/7.2) + 3.4^2
a =
  11.0358
```


Основные математические функции

Обозначения	Основные математические функции
sin, cos, tan	Синус, косинус, тангенс (аргумент задается в радианах)
exp	Экспоненциальная функция
log, log2, log10	Натуральный логарифм, логарифмы по основанию 2 и 10
sqrt	Квадратный корень
abs, sign	Модуль и знак числа

MatLab обладает большим набором встроенных математических функций (табл. 69). При вызове математических функции аргумент заключается в круглые скобки. Полный список всех встроенных элементарных математических функций можно получить, набрав в командной строке *help elfun.* Команда *help* отображает в командном окне список разделов справочной системы. Для получения содержимого раздела необходимо указать через пробел его название после *help,* а для вывода детальной информации о какой-либо функции следует ввести в строке с *help* имя функции.

Пусть, например, требуется найти значение выражения при $x = 0{,}2$ и $y = -3{,}9$:

$$c = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{4}{3}\pi x\right) + e^{0,1y}}{\cos\left(\frac{4}{3}\pi x\right) + e^{0,1y}}} + \sqrt[3]{\frac{\sin\left(\frac{4}{3}\pi x\right) + e^{0,1y}}{\cos\left(\frac{4}{3}\pi x\right) + e^{0,1y}}}.$$

Если набирать сразу все выражение, то получается достаточно длинная строка. Для переноса на следующую строку любой команды *MatLab* можно использовать три идущие подряд точки, после нажатия на *Enter* среда *MatLab* ждет продолжения ввода. Проще всего решить поставленную задачу, используя промежуточные переменные (экран 56).

Экран 56

```
>> x = 0.2;
>> y = -3.9;
>> a = sin(4/3 * pi * x) + exp(0.1 * y);
>> b = cos(4/3 * pi * x) + exp(0.1 * y);
>> c = sqrt(a/b) + (a/b)^(1/3)
c =
   2.0451
```

Все операторы присваивания, кроме последнего, завершены точкой с запятой для подавления вывода результата. Необязательно набирать выражение для *Ь,* похожее на только что введенное для *a*. После ввода третьей строки нажмите клавишу <Т>. В командной строке появится предыдущее выражение, внесите в него необходимые изменения, а именно, замените sin на cos, и нажмите *Enter.* Клавиши <Т>

и <4> служат для перехода по истории команд, т. е. для занесения ранее набранных команд в командную строку, а *«—>, <-», <Home>, <End>* — для перемещения в пределах командной строки. Передвижение по экрану (только для просмотра команд, а не для редактирования) осуществляется клавишами *<PageUp>, <PageDown>* или вертикальной полосой скроллинга. В среду *MatLab* включено окно *Command History* для быстрого перехода по истории команд. В любой момент можно вывести значение переменной в командное окно, для чего следует набрать имя переменной в командной строке и нажать *Enter,* либо вызвать функцию *disp* (экран 57).

Экран 57

```
> disp(c)
 2.0451
```

В *MatLab* допустимы операции деления на ноль, которые приводят к стандартным переменным *Inf* или *-Inf.* Результат деления нуля на ноль есть *NaN (Not a Number* — не число). Переполнение или потеря точности в *MatLab* при выполнении операций с числами с плавающей точкой не вызывают прекращения вычислений.

Просмотр текущих переменных рабочей среды производится при помощи команды *whos.* Вызовите команду *whos,* указав через пробелы имена переменных. В командное окно выводится таблица, приведенная ниже. В столбике *Class* указан тип переменной, в *Bytes* — число байт, выделенных под хранение значения, а *Size* содержит информацию о размере. После таблицы размещена строка с указанием суммарного объема памяти в байтах (экран 58). Числовые переменные в *MatLab* являются двумерными массивами размера один на один.

Экран 58

» whos a b

Name	Size	Bytes	Class
a	1x1	8	double array
b	1x1	8	double array

Grand total is 2 elements using 16 bytes

Пользователь имеет возможность управлять видом результата, устанавливая подходящие форматы вывода. Существует два способа задания форматов. Выбор пункта *Preferences* в меню *File* рабочей среды приводит к появлению диалогового окна с одноименным названием. В *MatLab* 6.5 на панели *Text display* расположены раскрывающиеся списки *Numeric Format* и *Numeric display* (при выбранном пункте *Command Window* в списке левой панели окна). Можно установить один из следующих форматов:

Ш *short (default)* — короткий формат с плавающей точкой с четырьмя цифрами после десятичной точки (используется по умолчанию);

^ *long* — длинный формат с плавающей точкой с четырнадцатью цифрами после десятичной точки;

Ш short e — экспоненциальный формат с четырьмя цифрами после десятичной точки;

Ш long e — экспоненциальный формат с пятнадцатью цифрами после десятичной точки;

Ш short g — наилучшее представление числа либо в формате *short,* либо в *short e* (аналогично *long g);*

Ш hex — шестнадцатеричное представление числа;

щ + — положительные и отрицательные числа отображаются знаками «+» и «-», а нулевые — пробелами;

Ш bank — формат для вывода денежных сумм с двумя знаками после десятичной точки;

Ш rational — вещественные числа приближенно представляются отношением двух небольших целых чисел.

Иногда возникает ситуация, когда *MatLab* не может уложиться в установленный формат при выводе результата. Пусть, например, установлен формат *short.* При вычислении 1/3333 результат отображается в формате *short e,* однако, автоматической смены формата для всех последующих вычислений не происходит.

MatLab предоставляет два способа вывода в командное окно:

Ш compact — строки с результатами выводятся подряд;

Ш loose — строки с результатами разделяются пустой строкой.

Команда *format* служит для установки формата из командной строки. К примеру, обращение, показанное на экране 59, аналогично выбору короткого экспоненциального формата в диалоговом окне *Preferences.* Вне зависимости от установленного формата все вычисления производятся с двойной точностью, следовательно, после смены формата с *short* на *long* не требуется повторно находить значения переменных. Достаточно снова вывести их значения в командном окне.

Экран 59

```
»format short e
```

11.3.2. ВЕКТОРЫ

В *MatLab* одномерный массив может быть вектор-строкой или вектор-столбцом. Для ввода вектора используются квадратные скобки, элементы вектора отделяются друг от друга:

Ш точкой с запятой, если требуется получить вектор-столбец;

Ш пробелом или запятой, если необходимо разместить элементы в вектор-строке.

Занесите вектор-столбец и вектор-строки

$$a = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -3.9 \\ 4.6 \end{bmatrix}, \quad b = [0.5 \quad -3.7 \quad 8.1], \quad c = [1.1 \quad 3.2 \quad 8.6]$$

в соответствующие массивы, набрав в командной строке данные экрана 60.

Точка с запятой в конце каждой строки поставлена для подавления вывода на экран. Выведите в командное окно значения переменных *a, b* и посмотрите, как *MatLab* отображает содержимое вектор-строк и вектор-столбцов. Получите информацию о переменных при помощи команды *whos.* Числа хранятся в двумерных массивах, каждый из размеров которых равен единице. Векторы также представляются двумерными массивами, один из размеров которых равен единице.

Экран 60

```
» a = [0.2;-3.9;4.6];
» b = [0.5 -3.7 8.1];
» c = [1.1 3.2 8.6];
```

Для получения длины вектора предназначена функция *length,* вектор оказывается в качестве ее входного аргумента (экран 61).

Экран 61

```
» L = length(a)
L =
   3
```

Вектор-столбцы с одинаковым числом элементов можно складывать и вычитать друг из друга при помощи знаков «+» и «-». Аналогично и для вектор-строк (экран 62).

Экран 62

```
» d = b + c
```

Сложение и вычитание вектор-строки и вектор-столбца или векторов разных размеров приводит к ошибке. Операция * предназначена для умножения векторов по правилу матричного умножения. Поскольку *MatLab* различает вектор-строки и вектор-столбцы, то допустимо либо умножение вектор-строки на такой же по длине вектор-столбец (скалярное произведение), либо умножение вектор-столбца на вектор-строку (внешнее произведение, в результате которого получается прямоугольная матрица). Векторное произведение определено только для векторов из трех элементов. Скалярное произведение двух векторов возвращает функция *dot,* а векторное — *cross* (экран 63).

Экран 63

```
» m = dot(b,c)
» n = cross(b,c)
```

Для операции транспонирования зарезервирован апостроф '. При вычислении скалярного и векторного произведений функциями *cross* и *dot* не обязательно следить за тем, чтобы оба вектора были либо столбцами, либо строками. Результат получается верный, например, при обращении *k* = cross (a', *b*), только *k* становится вектор-строкой.

MatLab поддерживает поэлементные операции с векторами. Наряду с умножением по правилу матричного умножения, существует операция поэлементного умножения .* (точка со звездочкой). Данная операция применяется к векторам одинаковой длины и приводит к вектору той же длины, что исходные, элементы которого равны произведениям соответствующих элементов исходных векторов. Например, для векторов *b* и *c*, введенных выше, поэлементное умножение дает следующий результат (экран 64).

Экран 64

```
» y = b.*c
y =
   0.5500  -11.8400   69.6600
```

Аналогичным образом работает поэлементное деление ./ (точка с косой чертой). Кроме того, операция .\ (точка с обратной косой чертой) осуществляет обратное поэлементное деление, т. е. выражения *b./c* и *c.\b* эквивалентны. Возведение элементов вектора *b* в степени, равные соответствующим элементам *c,* производится с использованием .^. Для транспонирования вектор-строк или вектор-столбцов предназначено сочетание .' (точка с апострофом). Операции ' и .' для вещественных векторов приводят к одинаковым результатам. Не обязательно применять поэлементные операции при умножении вектора на число и числа на вектор, делении вектора на число, сложении и вычитании вектора и числа. При выполнении, например, операции *a* * *2,* результат представляет собой вектор того же размера, что и a, с удвоенными элементами.

Экран 65

```
» d = [0.1 1.5 2.6 -3.1];
» q = sin(d * pi)
q =
   0.3090  -1.0000   0.9511   0.3090
```

Векторы могут быть аргументами встроенных математических функций, таких как sin, cos и т. д. В результате получается вектор с элементами, равными значению вызываемой функции от соответствующих элементов исходного вектора (пример на экране 65).

Однако для вычисления более сложной функции от вектора значений, скажем,

$$\frac{d \sin d + d^2}{d + 1}$$

выражение $f = (d * \sin(d) + d\hat{\ } 2)/(d + 1)$ вызовет ошибку уже при попытке умножения *d* на sin(d). Дело в том, что *d* является вектор-строкой длиной четыре, т. е. хранится в двумерном массиве размером один на четыре. Точно так же представлен и sin(d), следовательно, умножение при помощи звездочки (по правилу матричного умножения) лишено смысла. Аналогичная ситуация возникает и при возведении вектора *d* в квадрат, т. е., фактически, при вычислении *d* * *d*. Правильная запись выражения в *MatLab* требует использования поэлементных операций (экран 66).

Экран 66

```
»f=(d.·sin(d) + d.·2)./(d + 1)
f =
  0.0182   1.4985   2.2501   -4.6376
```

Часто требуется вычислить функцию от вектора значений аргумента, отличающихся друг от друга на постоянный шаг. Для создания таких вектор-строк предусмотрено двоеточие. Последовательность команд приводит к заполнению следующих векторов (экран 67).

Экран 67

```
»  x = -1.2:0.5:1.8;
»  f=(x.·sin(x) + x.'·2)./(x+1);
» x
X =
  -1.2000  -0.7000  -0.2000   0.3000   0.8000   1.3000   1.8000
» f
f =
  -12.7922   3.1365   0.0997   0.1374  0.6744   1.2794   1.7832
```

Шаг может быть отрицательным, в этом случае начальное значение должно быть больше либо равно конечному для получения непустого вектора. Если шаг равен единице, то его можно не указывать (пример на экране 68).

экран 68

```
» x = -3:4
x =
  - 3  - 2  - 1  0  1  2  3  4
```

Ясно, что для заполнения вектор-столбца элементами с постоянным шагом следует транспонировать вектор-строку. Создание векторов при помощи двоеточия и умение производить поэлементные операции необходимо для визуализации массивов данных.

MatLab обладает большим набором встроенных функций для обработки векторных данных (табл. 70). Полный список имеющихся функций выводится в командное окно при помощи *help datafun*. Для получения подробной информации о каждой функции требуется указать ее имя в качестве аргумента команды *help*. Ряд функций допускает обращение к ним как с одним, так и с двумя выходными аргументами. В случае нескольких выходных аргументов они заключаются в квадратные скобки и отделяются друг от друга запятой.

Очень часто требуется обработать только часть вектора или обратиться к некоторым его элементам. Разберем пра-

Таблица 70

Функции	Назначение
s = *sum(a)*	Сумма всех элементов вектора *a*
p = *prod(a)*	Произведение всех элементов вектора *a*
m = тах(а)	Нахождение максимального значения среди элементов вектора а
[m, k] = тах(а)	Второй выходной аргумент *k* содержит номер максимального элемента в векторе *a*
m = min(a)	Нахождение минимального значения среди элементов вектора а
[m, k] = min(a)	Второй выходной аргумент *k* содержит номер минимального элемента в векторе а
m = *mean(a)*	Вычисление среднего арифметического элемента вектора а
al = *sort(a)*	Упорядочение элементов вектора по возрастанию
[al, ind] = *sort(a)*	Второй выходной аргумент *ind* является вектором из целых чисел от 1 до *length(a),* который соответствует проделанным перестановкам

вила *MatLab,* по которым производится индексация векторных данных. Для доступа к элементу вектора необходимо указать его номер в круглых скобках сразу после имени переменной, в которой содержится вектор. Например, сумма первого и третьего элементов вектора *d* находится при помощи выражения, показанного на экране 69.

Обращение к последнему элементу вектора можно произвести с использованием *end,* т. е. *d(end)* и *d(length (d))* приводят к одинаковым результатам.

Указание номеров элементов вектора можно использовать и при вводе векторов, последовательно добавляя новые элементы (не обязательно в порядке возрастания их номеров). Следует набрать команды, которые мы видим на экране 70.

Экран 69

```
» s = d(1) + d(3)
s =
  -1.4000
```

Экран 70

```
» h = 10;
» h(2) = 20;
» h(4) = 40
h =
   10  20  0  40
```

Для ввода первого элемента *h* не обязательно указывать его индекс, так как при выполнении оператора *h* = 10 создается вектор (массив размера один на один). Следующие операторы присваивания приводят к автоматическому увеличению длины вектора *h,* а пропущенные элементы (в нашем случае Л(3)) получают значение ноль.

Экран 71

```
>> z = [0.2 -3.8 7.9 4.5 7.2 -8.1 3.4];
>> znew = z(3:6)
znew =
   7.9000   4.5000   7.2000  -8.1000
```

Экран 72

```
 = prod(z(2:6))
```

Экран 73

```
>> ind = [3 5 7];
>> znew = z(ind)
znew =
   7.9000   7.2000   3.4000
```

Экран 74

```
>> ind = 2:2:length(z);
>> s = sum(z(ind))
```

Индексация двоеточием позволяет выделить идущие подряд элементы в новый вектор. Начальный и конечный номера указываются в круглых скобках через двоеточие, (пример на экране 71).

Применение встроенных функций обработки данных к некоторым последовательно расположенным элементам вектора не представляет труда. Следующий вызов функции *prod* вычисляет произведение элементов вектора z со второго по шестой (экран 72).

Индексация вектором служит для выделения элементов с заданными индексами в новый вектор. Индексный вектор должен содержать номера требуемых элементов (пример на экране 73).

Сумму элементов произвольного вектора z с четными индексами можно найти, как показано на экране 74.

Экран 75

```
»znew = [z(1:4) z(6:end)]
znew =
   0.2000  -3.8000   7.9000   4.5000  -8.1000   3.4000
```

Конструирование новых векторов из элементов имеющихся векторов производится при помощи квадратных скобок. Следующий оператор приводит к образованию вектора, в котором пропущен пятый элемент вектора z (экран 75)

11.3.3. МАТРИЦЫ

Матрицы небольших размеров удобно вводить из командной строки. Существует три способа ввода матриц. Например, матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & -2.5 & 9.1 \\ 8.4 & 0.3 & 1.7 \\ -3.5 & 6.2 & 4.7 \end{bmatrix}$$

можно ввести следующим образом: набрать в командной строке (разделяя элементы строки матрицы пробелами) A = [0.7 −2.5 9.1 и нажать *Enter*. Курсор перемещается в следующую строку (символ приглашения командной строки ≫ отсутствует). Элементы каждой следующей строки

матрицы набираются через пробел, а ввод строки завершается нажатием на *Enter*. При вводе последней строки в конце ставится закрывающая квадратная скобка (экран 76).

Если после закрывающей квадратной скобки не ставить точку с запятой для подавления вывода в командное окно, то матрица выведется в виде таблицы.

Экран 76

```
»A = [0.7-2.5 9.1
8.4 0.3 1.7
-3.5 6.2 4.7]
```

Другой способ ввода матрицы основан на том, что матрицу можно рассматривать как вектор-столбец, каждый элемент которого является строкой матрицы. Поскольку точка с запятой используется для разделения элементов вектор-столбца, то ввод, к примеру, матрицы

$$B = \begin{matrix} 6.1 & 0.3 \\ -7.9 & 4.4 \\ 2.5 & -8.1 \end{matrix}$$

Экран 77

```
» B = [6.1 0.3; -7.9 4.4; 2.5 -8.1];
```

осуществляется оператором присваивания (экран 77).

Введите матрицу B и отобразите ее содержимое в командном окне, набрав в командной строке B и нажав *Enter*.

Очевидно, что допустима такая трактовка матрицы, при которой она считается вектор-строкой, каждый элемент которой является столбцом матрицы. Следовательно, для ввода матрицы

$$C = \begin{matrix} 0.4 & -7.2 & 5.3 \\ 0.1 & -2.1 & -9.5 \end{matrix}$$

Экран 78

```
» C = [[0.4; 0.1] [-7.2; -2.1] [5.3; -9.5Ц
```

достаточно воспользоваться командой, данной на экране 78.

Обратите внимание, что внутренние квадратные скобки действительно нужны. Оператор C = [0.4; 0.1 -7.2; -2.1 5.3; -9.5] является недопустимым и приводит к сообщению об ошибке, поскольку оказывается, что в первой строке матрицы содержится только один элемент, во второй и третьей — по два, а в четвертой — снова один. Воспользуйтесь командой *whos* для получения информации о переменных *A, B и C* рабочей среды. В командное окно выводится таблица с информацией о размерах массивов, памяти, необходимой для хранения каждого из массивов, и типе — *double array* (экран 79).

Экран 79

```
» whos A B C
Name    Size    Bytes    Class
 A      3x3      72      double array
 B      3x2      48      double array
 C      2x3      48      double array
```

Экран 80

```
» s = srze(B)
s =
  3  2
```

Функция *size* позволяет установить размеры массивов, она возвращает результат в виде вектора, первый элемент которого равен числу строк, а второй — столбцов (см. экран 80).

Сложение и вычитание матриц одинаковых размеров производится с использованием знаков + , - . Звездочка * служит для вычисления матричного произведения, причем соответствующие размеры матриц должны совпадать (пример на экране 81).

Экран 81

```
» p = A - 3
P =
  46.7700 -84.5000
  53.1200  -9.9300
 -58.5800 -11.8400
```

Допустимо умножение матрицы на число и числа на матрицу, при этом происходит умножение каждого элемента матрицы на число и результатом является матрица тех же размеров, что и исходная. Апостроф ' предназначен для транспонирования вещественной матрицы или нахождения сопряженной к комплексной матрице. Для возведения квадратной матрицы в степень применяется знак ^.

Вычислите для тренировки матричное выражение $R = (A - BC)^3 + ABC$, в котором A, B и C — определенные выше матрицы. Запись в *MatLab* этого выражения приведена на экране 82.

Обратите внимание на общий множитель 1.0e + 006, который относится ко всем элементам матрицы.

MatLab обладает многообразием различных функций и способов для работы с матричными данными. Для обращения к элементу двумерного массива следует указать его строчный и столбцевой индексы в круглых скобках после имени массива (пример на экране 83).

Экран 82

```
» R = (A - B " C)^3 + A 'B ' C
R =
  1.0e + 0006*
  -0.0454   0.1661  -0.6579
   0.0812  -0.2770   1.2906
  -0.426    0.1274  -0.7871
```

Экран 83

```
»  C(1,2)
ans =
  -7.2000
```

Экран 84

```
» c 1  =A(2:3,2)
c1 =
   0.3000
   6.2000
» П   =A(1,1:3)
r1 =
   0.7000  -2.5000   9.1000
```

Индексация двоеточием позволяет получить часть матрицы — строку, столбец или блок (экран 84).

Для обращения ко всей строке или всему столбцу не обязательно указывать через двоеточие начальный (первый) и конечный индексы, т. е. операторы rl = A(1,1:3) и rl = A(1,:) эквивалентны. Для доступа к элементам строки или столбца от заданного до последнего можно использовать *end*, так же как и для векторов: A(1,2:*end*). Выделение блока, состоящего из нескольких строк и столбцов, требует индексации двоеточием, как по первому измерению, так и по второму. Пусть в массиве T хранится матрица:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & -5 & -6 & 3 & -8 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ -6 & -4 & 7 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Для выделения ее элементов со второй строки по третью и со второго столбца по четвертый, достаточно использовать оператор (экран 85).

Индексация двоеточием также очень полезна при различных перестановках в массивах. В частности, для перестановки первой и последней строк в произвольной матрице, хранящейся в массиве A, подойдет последовательность команд, показанных на экране 86.

MatLab поддерживает такую операцию, как вычеркивание строк или столбцов из матрицы. Достаточно удаляемому блоку присвоить пустой массив, задаваемый квадратными скобками. Например, вычеркивание второй и третьей строк из массива А производится следующей командой (экран 87).

Индексация двоеточием упрощает заполнение матриц, имеющих определенную структуру. Предположим, что требуется создать матрицу

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Первый шаг состоит в определении нулевой матрицы размера пять на пять, затем заполняются первая и последняя строки и первый и последний столбцы (экран 88).

Проверьте, что в результате получается требуемая матрица. Ряд встроенных функций

Экран 85

```
» T 1  = T(2:3,2:4)
T1  =
   -5   -6   3
    4    5  -1
```

Экран 86

```
»s  =  A(1,:);
»  A(1,:)  =  A(end,:);
»  A(end,:)  =  s
A =
   -3.5000    6.2000    4.7000
    8.4000    0.3000    1.7000
    0.7000   -2.5000    9.1000
```

Экран 87

```
»A(2:3,:) = П
A =
   -3.5000    6.2000    4.7000
```

Экран 88

```
»W(1:5,1:5) = 0;
»W(1,:) = 1;
»W(end,:) = 1;
»W(:.1) = 1;
»W(:,end) = 1;
```

Функция	Результат и примеры вызовов
zeros	Нулевая матрица: *F = zeros*(4,5) *F = zeros*(3) *F = zeros*([3 4])
eye	Единичная прямоугольная матрица (единицы расположены на главной диагонали): *I = eye*(5,8) *I = eye*(5) *I = eye*([5 8])
ones	Матрица, целиком состоящая из единиц: *E = ones*(3,5) *E = ones*(6) *E = ones*([2 5])
rand	Матрица, элементы которой — случайные числа, равномерно распределенные на интервале (0,1): *R = rand*(5,7) *R = rand*(6) *R = rand*([3 5])
randn	Матрица, элементы которой — случайные числа, распределенные по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией, равной единице: *N = randn*(5,3) *N = randn*(9) *N = randn*([2 4])
diag	1) диагональная матрица, элементы которой задаются во входном аргументе — векторе: *D = diag* (*v*); 2) диагональная матрица со смещенной на *k* позиций диагональю (положительные *k* — смещение вверх, отрицательные — вниз), результатом является квадратная матрица размера *length* (*v*) + *abs*(*k*) *D = diag*(*v, k*); 3) выделение главной диагонали из матрицы в вектор *d = diag* (*A*); 4) выделение *k*-й диагонали из матрицы в вектор *d = diag* (*A, k*)

(табл. 71) позволяет ввести стандартные матрицы заданных размеров. Обратите внимание, что во всех функциях, кроме *diag,* допустимо указывать размеры матрицы следующими способами:

- числами через запятую (в двух входных аргументах);
- одним числом, результат — квадратная матрица;
- вектором из двух элементов, равных числу строк и столбцов.

Последний вариант очень удобен, когда требуется создать стандартную матрицу тех же размеров, что и некоторая имеющаяся матрица. Если, к примеру, А была определена ранее, то команда / = *eye(size(A))* приводит к появлению единичной матрицы, размеры которой совпадают с размерами *A,* так как функция *size* возвращает размеры матрицы в векторе.

Разберем, как получить трехдиагональную матрицу размера семь на семь, приведенную ниже, с использованием функций *MatLab.*

$$T = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Введите вектор *u* с целыми числами от одного до семи и используйте его для создания диагональной матрицы и матрицы со смещенной на единицу вверх диагональю. Вектор длины шесть, содержащий пятерки, заполняется, например, так: 5 * *ones* (1, 6). Этот вектор укажите в первом аргументе функции *diag,* а минус единицу — во втором и получите третью вспомогательную матрицу. Теперь достаточно вычесть из первой матрицы вторую и сложить с третьей (экран 89).

Экран 89

```
• T = diag(v) - diag(v(1:6),1) + diag(5' ones(1,6),-1)
```

Поэлементные вычисления с матрицами производятся практически аналогично работе с векторами; разумеется, необходимо следить за совпадением размеров матриц:

- *A* * В, *A/B* — поэлементные умножение и деление;
- *A."p* — поэлементное возведение в степень, *p* — число;
- *A."B* — возведение элементов матрицы А в степени, равные соответствующим элементам матрицы В;
- А.' — транспонирование матрицы (для вещественных матриц А' и А.' приводят к одинаковым результатам).

Иногда требуется не просто транспонировать матрицу, но и «развернуть» ее. Разворот матрицы на 90° против часовой стрелки осуществляет функция *rot90* (экран 90).

Допустимо записывать сумму и разность матрицы и числа, при этом сложение или вычитание соответственно применяется ко всем элементам матрицы. Вызов математической функции от матрицы приводит к матрице того же размера, на соответствующих позициях которой стоят значения функции от элементов исходной матрицы.

Экран 90

```
» Q = [1 2;3 4]
Q =
   1  2
   3  4
» R = rot90(Q)
R =
   2  4
   1  3
```

В *MatLab* определены и матричные функции, например, *sqrtm* предназначена для вычисления квадратного

```
» S = sqrtm(R)
S =
   1.2203   1.4296  .
   0.3574   1.5777
» S ' S
ans =
   2.0000   4.0000
   1.0000   3.0000
```

Экран 92

```
» M = [1 2 3;4 5 6;7 8 9]
M =
   1   2   3
   4   5   6
   7   8   9
» s = sum(M)
s =
   12  15  18
```

Экран 93

```
» s = sum(sum(M))
s =
   45
```

корня. Найдите квадратный корень из матрицы R и проверьте полученный результат, возведя его в квадрат (по правилу матричного умножения, а не поэлементно! Экран 91).

Матричная экспонента вычисляется с использованием *expm*. Все функции обработки данных, приведенные в таблицах, могут быть применены и к двумерным массивам. Основное отличие от обработки векторных данных состоит в том, что эти функции работают с двумерными массивами по столбцам, например, функция *sum* суммирует элементы каждого из столбцов и возвращает вектор-строку, длина которой равна числу столбцов исходной матрицы (экран 92).

Если в качестве второго входного аргумента *sum* указать 2, то суммирование произойдет по строкам. Для вычисления суммы всех элементов матрицы требуется дважды применить *sum* (экран 93)

Очень удобной возможностью *MatLab* является конструирование матрицы из матриц меньших размеров. Пусть заданы матрицы:

$$M1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad M2 = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -5 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix},$$

$$M3 = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -7 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Требуется составить из $M1$, $M2$, $M3$ и $M4$ блочную матрицу M:

$$M = \begin{bmatrix} M1 & M2 \\ M3 & M4 \end{bmatrix}$$

Можно считать, что M имеет размеры два на два, а каждый элемент является соответственно матрицей $M1$, $M2$, $M3$ или $M4$. Следовательно, для получения в рабочей среде *MatLab* массива M с матрицей M требуется использовать оператор: >> $M = [M1\ M2;\ M3\ M4]$.

11.3.4. ГРАФИКА И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДАННЫХ

MatLab обладает широким набором средств для построения графиков функций одной и двух переменных и отображения различных типов данных. Все графики выводятся в графические окна со своими меню и панелями инструментов. Вид графиков определяется аргументами графических команд и затем может быть изменен при помощи инструментов графического окна. Важно понимать, что для построения графиков функций на некоторой области изменения аргументов следует вычислить значения функции в точках области, часто для получения хороших графиков следует использовать достаточно много точек.

Разберем сначала, как получить график функции одной переменной, к примеру:

$$f(x) = e^x \sin \pi x + x^2$$

на отрезке $[-2, 2]$. Первый шаг состоит в задании координат точек по оси абсцисс. Заполнение вектора x элементами с постоянным шагом при помощи двоеточия позволяет просто решить эту задачу. Далее необходимо поэлементно вычислить значения $f(x)$ для каждого элемента вектора x и записать результат в вектор f. Для построения графика функции осталось использовать какую-либо из графических функций *MatLab*. Достаточно универсальной графической функцией является *plot*. В самом простом случае она вызывается с двумя входными аргументами — парой x и f (т. е. *plot* выводит зависимость элементов одного вектора от элементов другого). Последовательность команд, записанная ниже, приводит к появлению графического окна *Figure No.* 1 с графиком функции (экран 94, рис. 40).

Экран 94

```
» x = [-2:0.05:2];
»f = exp(x). * sin(pi' x) + x.^2;
> plot(x.f)
```

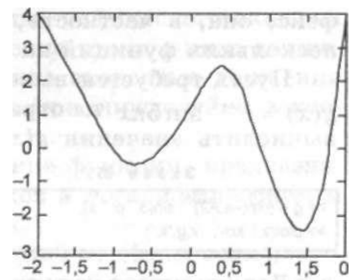


Рис. 40

Тип линии, цвет и маркеры определяются значением третьего дополнительного аргумента функции *plot*. Этот аргумент указывается в апострофах, например, вызов *plot*(*x*,*f*,'*ro:*') приводит к построению графика красной пунктирной линией, размеченной круглыми маркерами. Обратите внимание, что абсциссы маркеров определяются значениями элементов

Таблица 72

	Цвет		Тип маркера
у	Желтый		Точка
т	Розовый	°	Кружок
с	Голубой	X	Крестик
г	Красный	+	Знак плюс
g	Зеленый	*	Звездочка
Ь	Синий	S	Квадрат
w	Белый	*d*	Ромб
k	Черный	V	Треугольник вершиной вниз
	Тип линии	^	Треугольник вершиной вверх
-	Сплошная	<	Треугольник вершиной влево
	Пунктирная	>	Треугольник вершиной вправо
-.	Штрих-пунктирная	*р*	Пятиконечная звезда
-	Штриховая	*h*	Шестиконечная звезда

вектора ***х.*** Всего в дополнительном аргументе может быть заполнено три позиции, соответствующие цвету, типу маркеров и стилю линии. Обозначения для них приведены в таблице 72. Порядок позиций может быть произвольный, допустимо указывать только один или два параметра, например, цвет и тип маркеров.

Посмотрите на результат выполнения следующих команд: ***plot(x,f,'g'), plot(x,f,'ko'), plot(x,f,':').***

Функция ***plot*** имеет достаточно универсальный интерфейс, она, в частности, позволяет отображать графики нескольких функций на одних осях.

Пусть требуется вывести график не только ***f(x),*** но и ***g(x) = e~*²*** зшбтсх на отрезке [-2 , 2]. Сначала необходимо вычислить значения ***g(x),*** а затем вызвать ***plot,*** указав через запятую пары ***x, f*** и ***x, g*** и, при желании, свойства каждой из линий (экран 95).

экран **95**

```
» g = exp(-x.A2).' sin(5' pi' x);
» plot(x,f,'ko-',   x,g,'k:')
```

Допускается построение произвольного числа графиков функций, свойства всех линий могут быть различными. Кроме того, области построения каждой из функций не обязательно должны совпадать, но тогда следует использовать разные векторы для значений аргументов и вычислять значения функций от соответствующих векторов. Для получения графика кусочно-заданной функции:

$$y(x)=\begin{cases}\sin x & -4\pi \le x \le -\pi,\\ 3\cdot(x/\pi+1)^2 & -\pi < x \le 0,\\ 3e^{-x} & 0 < x \le 5,\end{cases}$$

достаточно выполнить последовательность команд, показанных на экране 96.

Экран 96

```
» x1 = [-4 * pi:pi/10:-pi] ;
» y1 = sin(x1);
» x2 = [-pi:pi/30:0];
» y2 = 3 * (x2/pi + 1). ^2;
» x3 = [0:0.02:5];
» y3 = 3 * exp(-x3)
» plot (x1, y1, x2, y2, x3, y3)
```

Заметьте, что графики ветвей функции отображаются различными цветами.

Экран 97

```
» x = [x1 x2 x3];
» y = [y1 y2 y3];
» plot (x, y)
```

Можно было поступить и по-другому, а именно: после заполнения $x1$, $y1$, $x2$, $y2$, $x3$ и $y3$ собрать вектор x для значений аргумента и вектор y для значений $y(x)$ и построить зависимость y от x (экран 97).

Экран 98

```
t = [0:pi/20:2 * pi];
» x = cos(t). ^3;
» y = sin(t). ^3;
» plot(x,y)
```

Несложно догадаться, как построить график параметрически заданной функции, используя то обстоятельство, что *plot* отображает зависимость одного вектора от другого. Пусть требуется получить график астроиды:

$$x(t)=\cos^3 t, y(t)=\sin^3 t, t\in[0,2\pi].$$

Следует задать вектор t, затем в векторы x, y занести значения $x(t)$, $y(t)$ и воспользоваться *plot* для отображения зависимости y от x (экран 98).

Функция *comet* позволяет проследить за движением точки по траектории параметрически заданной линии. Вызов *comet* (x, y) приводит к появлению графического окна, на осях которого рисуется перемещение точки в виде движения кометы с хвостом. Управление скоростью движения осуществляется изменением шага при определении вектора значений параметра.

В *MatLab* имеются графические функции, предназначенные для отображения графиков в логарифмическом и полулогарифмическом масштабах:

- *loglog* (логарифмический масштаб по обеим осям);
- *semilogx* (логарифмический масштаб только по оси абсцисс);
- *semilogy* (логарифмический масштаб только по оси ординат).

Входные аргументы этих функций задаются так же, как и при использовании *plot*. Для сравнения поведения двух функций со значениями разных порядков удобно применять *plotyy.* Функция *plotyy* вызывается от двух пар входных аргументов (векторов) и приводит к появлению двух линий графиков, каждой из которых отвечает своя ось ординат.

Графики оформляются в *MatLab* специальными командами и функциями. Сетка наносится на оси командой *grid on,* а убирается при помощи *grid off.* Заголовок размещается в графическом окне посредством функции *title,* входным аргументом которой является строка, заключенная в апострофы (экран 99).

Экран

```
» ИНеСРезультаты эксперимента')
```

При наличии нескольких графиков требуется расположить легенду, обратившись к *legend.* Надписи легенды, заключенные в апострофы, указываются во входных аргументах функции *legend,* их число должно совпадать с числом линий графиков. Кроме того, последний дополнительный входной аргумент определяет положение легенды:

- Ш -1 — вне графика в правом верхнем углу графического окна;
- 10 — выбирается лучшее положение в пределах графика так, чтобы как можно меньше перекрывать сами графики;
- i 1 — в верхнем правом углу графика (это положение используется по умолчанию);
- 1 2 — в верхнем левом углу графика;
- 13 — в нижнем левом углу графика;
- 14 — в нижнем правом углу графика.

Функции *xlabel* и *ylabel* предназначены для подписей к осям, их входные аргументы также заключаются в апострофы.

Обратимся теперь к визуализации векторных и матричных данных. Самый простой способ отображения векторных данных состоит в использовании функции *plot* с вектором в качестве входного аргумента. При этом получающийся в виде ломаной линии график символизирует зависимость значений элементов вектора от их индексов. Второй дополнительный аргумент может определять цвет, стиль линии и тип маркеров, например: *plot (x,* 'ко'). Вызов функции *plot* от матрицы приводит к нескольким графикам, их число совпадает с числом столбцов матрицы, а каждый из них является зависимостью элементов столбца от их строчных индексов. Цвет и стиль линий и тип маркеров сразу для всех линий также определяется вторым дополнительным аргументом.

Наглядным способом представления матричных и векторных данных являются разнообразные диаграммы. Простейшая столбцевая диаграмма строится при помощи функции *bar* (экран 100).


```
»x = [0.72.1 2.5 1.9 0.8 1.3];
» bar(x)
```

Дополнительный числовой аргумент *bar* указывает на ширину столбцов (по умолчанию он равен 0.8), а значения, большие единицы, например *bar (x,* 1.2), приводят к частичному перекрытию столбцов. Указание матрицы во входном аргументе *bar* приводит к построению групповой диаграммы, число групп совпадает с числом строк матрицы, а внутри каждой группы столбиками отображаются значения элементов строк.

Круговые диаграммы векторных данных получаются с помощью функции *pie,* которая имеет некоторые особенности по сравнению с *bar.* Различаются два случая:

1) если сумма элементов вектора больше или равна единице, то выводится полная круговая диаграмма, площадь каждого ее сектора пропорциональна величине элемента вектора;

2) если сумма элементов вектора меньше единицы, то результатом является неполная круговая диаграмма, в которой площадь каждого сектора пропорциональна величине элементов вектора, в предположении, что площадь всего круга равна единице.

Сравните, например, *pie* ([0.1 0.2 0.3]) и *pie* ([1 2 3]). Можно отделить некоторые секторы от всего круга диаграммы, для чего следует вызвать *pie* со вторым аргументом — вектором той же длины, что исходный. Ненулевые элементы второго вектора соответствуют отделяемым секторам.

Следующий пример показывает, как отделить от диаграммы сектор, соответствующий наибольшему элементу вектора *x* (экран 101).

Экран 101

```
»x = [0.3 21.4 0.5 0.9];
»[m,k] = max(x);
» v = zeros(size(x));
» v(k) = l;
» pie(x.v)
```

Подписи к секторам диаграммы указываются во втором дополнительном входном аргументе, который заключается в фигурные скобки (экран 102).

Экран 102

```
» pie([2400 3450 1800 5100],{'Март','Апрель','Май','Июнь'})
```

Функции *bar* и *pie* имеют аналоги:

- Ш *barh* — построение столбцевой диаграммы с горизонтальным расположением столбцов;
- Ш *ЬагЗ, pie3* — построение объемных диаграмм.

При обработке больших массивов векторных данных часто требуется получить информацию о том, какая часть данных находится в том или ином интервале. Функция *hist* предназначена для отображения гистограммы данных и нахождения числа данных в интервалах. Входным аргументом *hist* является вектор с данными, а выходным — вектор, содержащий количество элементов, попавших в каждый из интервалов. По умолчанию берется десять равных интервалов. Например, вызов *hist (randn* (1, 5000)) приводит к появлению на экране гистограммы данных, распределенных по нормальному закону, а *n* = *hist (randn* (1,5000)) — к заполнению вектора *n* длины десять (при этом гистограмма не строится). Число интервалов указывается во втором дополнительном аргументе *hist.* Можно задать интервалы, использовав в качестве второго аргумента не число, а вектор, содержащий центры интервалов. Более удобно задавать интервалы не центрами, а границами. В этом случае требуется сначала определить количество элементов в интервалах при помощи функции *histc,* а затем применить *bar* со специальным аргументом *'histc'* (пример на экране 103).

Зкран 103

```
»x = randn(1,10000);
»int = [-2:0.5:2];
» n = histc(x,int);
» bar(int,n, 'histc')
```

Визуализация функций двух переменных в *MatLab* может быть осуществлена несколькими способами, но все они предполагают однотипные предварительные действия. Рассмотрим здесь только построение графиков функций двух переменных на прямоугольной области определения. Предположим, что требуется получить поверхность функции

$$z(x, y) = e^{x} \sin(\text{тпу});\ x \text{ е } [-1,1];\ y \text{ е } [0,2].$$

Первый шаг состоит в задании сетки на прямоугольнике, т. е. точек, которые будут использоваться для вычисления значений функции. Для генерации сетки предусмотрена функция *meshgrid,* вызываемая от двух входных аргументов — векторов, задающих разбиения по осям *хну.* Функция *meshgrid* возвращает два выходных аргумента, являющиеся матрицами (экран 104).

Экран 104

```
»[X.Y] = meshgrid(-1:0.1:1.0:0.1:2);
```

Матрица *X* состоит из одинаковых строк, равных первому входному аргументу — вектору в *meshgrid,* а матрица У — из одинаковых столбцов, совпадающих со вторым вектором в *meshgrid.* Такие матрицы оказываются необходимыми на втором шаге при заполнении матрицы *Z,* каждый элемент которой является значением функции *z(x, y)* в точках сетки. Использование поэлементных операций при вычислении функции *z(x, y)* приводит к требуемой матрице (экран 105).

экран Ю5

```
» Z = exp(-X).' sin(pi Y);
```

Для построения графика *z(x, y)* осталось вызвать подходящую графическую функцию (экран 106). На экране появляется графическое окно, содержащее каркасную поверхность исследуемой функции. Цвет поверхности соответствует значению функции.

Экран 106

```
» mesh(X,Y,Z)
```

Команда *colorbar* приводит к отображению в графическом окне столбика, показывающего соотношение между цветом и значением *z(x, y).* Цветовые палитры графика можно изменять, пользуясь функцией *colormap,* например *colormap (gray)* отображает график в оттенках серого цвета. Некоторые цветовые палитры приведены ниже:

Ш *bone* — похожа на палитру *gray,* но с легким оттенком синего цвета;

m *colorcube* — каждый цвет изменяется от темного к яркому;

Ш *cool* — оттенки голубого и пурпурного цветов;

Ш *copper* — оттенки медного цвета;

Ш *hot* — плавное изменение: черный-красный-оранжевый-желтый-белый;

Ш *hsv* — плавное изменение (как цвета радуги);

Ш *jet* — плавное изменение: синий-голубой-зеленый-желтый-красный;

Ш *spring* — оттенки пурпурного и желтого;

Ш *summer* — оттенки зеленого и желтого;

Ш *winter* — оттенки синего и зеленого.

MatLab предоставляет целый набор графических функций для визуализации функций двух переменных, среди них:

ж *surf* — залитая цветом каркасная поверхность;

Ш *meshc, surfc* — поверхности с линиями уровня на плоскости *xy;*

Ш *contour* — плоский график с линиями уровня;

Ш *contourf* — залитый цветом плоский график с линиями уровня;

Ш *contours* — поверхность, составленная из линий уровня;

Ш *surfl* — освещенная поверхность.

Все перечисленные функции допускают то же самое обращение, что и *mesh* (экран 107).

экран Ю7

```
» sufr(X, Y, Z)
» contourf(X, Y, Z)
```

Остановимся подробнее на нескольких вопросах. Первый из них: как изменять установки, определенные по умолчанию, при отображении функций

Экран 108

```
» contourf(X, Y, Z, 10)
```

Экран 109

```
» contour(X,Y,Z, [-0.51 -0.25-0.01 0.89])
```

линиями уровня при помощи *contour, contourf* и *contours.* Число линий уровня задается в четвертом дополнительном аргументе (пример на экране 108).

Вместо числа линий уровня можно указать в векторе те значения *z(xy),* для которых требуется построить линии уровня (экран 109).

Несколько сложнее нанести подписи с соответствующим значением *z(x, y)* к каждой линии уровня. Для этого придется вызвать *contour* с двумя выходными аргументами, первый из них — матрица с информацией о положении линий уровня, а второй — вектор с указателями на линии. Полученные переменные следует использовать в качестве входных аргументов функции *clabel* (экран 110).

Экран 110

```
» [CMatr. h] = contour(X, Y, Z, [-0.51 -0.25-0.01 0.89]);
» clabel(CMatr, h)
```

Залитые цветом каркасные поверхности, построенные при помощи *surf* и *surfc,* имеют постоянный цвет в пределах каждой ячейки. Команда *shading interp,* вызываемая после *surf* и *surfc,* служит для плавного изменения цвета в пределах ячеек и скрытия линий сетки на поверхности. Если желательно убрать сетку и сохранить постоянный цвет ячеек, то достаточно использовать *shading flat, а shading faceted* придает графику прежний вид.

Графические функции по умолчанию располагают поверхность так, что наблюдатель видит ее часть под некоторым углом, а другая — скрыта от взора. Положение наблюдателя определяется двумя углами: азимутом *(AZ)* и углом возвышения *(EL).* Азимут отсчитывается от оси, противоположной *y,* а угол возвышения — от плоскости *xy.* Осмотреть поверхность со всех сторон позволяет функция *view.* Вызов функции *view* с двумя выходными аргументами и без входных дает возможность определить текущее положение наблюдателя (углы выводятся в градусах, экран 111). Эти значения *MatLab* использует по умолчанию при построении трехмерных графиков. Для задания положения наблюдателя следует указать азимут и угол возвышения (в градусах) в качестве входных аргументов *view,* например: *view* (0, 90) показывает вид на график сверху. Перед поворотом графика целесообразно расставить обозначения к осям, используя, как и для двумерных графиков *xlabel* и *ylabel,* и *zlabel* для подписи к вертикальной оси. Функция *view* допускает еще несколько вариантов вызова:

Экран 111

```
» [AZ, EL] = view
AZ =
  -37.5000
EL =
  30
```

- *view* (3) — возврат к стандартным установкам;
- *view ([x, y, z])* — помещение наблюдателя в точку с координатами *x, y, z.*

Освещенная поверхность строится при помощи функции *surfl,* которая позволяет получить наглядное представление о поведении исследуемой функции. Следует учесть, что лучше сочетать вызов *surfl* с командой *shading interp* и цветовой палитрой, содержащей большое количество оттенков *(gray, copper, bone, winter* и т. д.), поскольку поверхность обладает свойствами рассеивания, отражения и поглощения света, исходящего от некоторого источника. Положение источника можно задавать в четвертом дополнительном аргументе *surfl,* причем либо вектором из двух элементов (азимут и угол возвышения источника), либо вектором из трех элементов (положение источника света в системе координат осей), например: *surfl(X, Y, Z,* [20 80]) или *surfl(X, Y, Z,* [6 8 11]).

Разберем теперь работу с несколькими графиками. Первый вызов любой графической функции приводит к появлению на экране графического окна *Figure No.* 1, содержащего оси с графиком. Однако при дальнейших обращениях к графическим функциям прежний график пропадает, а новый выводится в то же самое окно. Команда *figure* предназначена для создания пустого графического окна. Если требуется получить несколько графиков в разных окнах, то перед вызовом графических функций следует прибегать к *figure.* Графические окна при этом нумеруются так: *Figure No.* 2, *Figure No.* 3 и т. д.

Каждое окно имеет свои оси, при наличии нескольких пар осей (в одном окне или в разных) вывод графиков производится в текущие оси. Последняя созданная пара осей является текущей. Для того чтобы выбрать текущие оси из нескольких имеющихся, достаточно щелкнуть по ним левой кнопкой мыши перед вызовом графической функции. Возможна и обратная ситуация, когда в процессе работы требуется добавлять графики к уже имеющимся на некоторых осях. В этой ситуации перед добавлением графика следует выполнить команду *hold on.* Для завершения такого режима достаточно воспользоваться командой *hold off.*

В одном графическом окне можно расположить несколько осей со своими графиками. Функция *subplot* предназначена для разбиения окна на части и определения текущей из них. Предположим, что требуется вывести графики на шесть пар осей в одно графическое окно (две по вертикали и три по горизонтали). Создайте графическое окно при помощи *figure* и выполните команду, показанную на экране 112.

Экран 112

```
» subplot(2, 3,1)
```

Экран 113

```
» subplot(2, 3, 3)
»bar([1.2 0.3 2.8 0.9])
» subplot(2, 3, 6)
» surf(X, Y, Z)
```

В левом верхнем углу окна появились оси. Первые два аргумента в *subplot* указывают на общее число пар осей по вертикали и горизонтали, а последний аргумент означает номер данной пары осей. Нумерация идет слева направо, сверху вниз. Используйте *subplot* (2, 3, 2), *subplot* (2, 3, 6) для создания остальных пар осей. Вывод любой из графических функций можно направить в нужные оси, указав их при помощи *subplot* (2, 3, *k)* (пример на экране 113).

11.3.5. ФАЙЛ-ФУНКЦИИ И ФАЙЛ-ПРОГРАММЫ

Встроенный язык программирования *MatLab* достаточно прост, он содержит необходимый минимум конструкций. Прежде чем программировать в *MatLab,* необходимо понять, что все программы могут быть либо файл-функциями, либо файл-программами. Файл-программа является текстовым файлом с расширением *m* (М-файлом), в котором записаны команды и операторы *MatLab.* Разберем, как создать простую файл-программу.

В *MatLab* имеется редактор М-файлов, для запуска которого следует нажать кнопку *New M-file* на панели инструментов рабочей среды либо выбрать в меню *File* в пункте *New* подпункт *M-file.* На экране появляется окно редактора. Наберите в нем какие-либо команды, например, простейшую файл-программу для построения графика (экран 114).

Экран 114

```
x = [-1:0.01:1];
У = exp(x);
plot(x, y)
grid on title ('Экспоненциальная функция')
```

Для запуска программы или ее части есть несколько способов. Первый — выделить операторы при помощи мыши, удерживая левую кнопку, или при помощи клавиши *<Shift>* со стрелками, *<PageUp>*, *<PageDown>* и выбрать в меню *Text* пункт *Evaluate Selection* (или нажать <F9>). Выделенные операторы выполняются последовательно, точно так же, как если бы они были набраны в командной строке. Очевидно, что работать в М-файле удобнее, чем из командной строки, поскольку можно сохранить программу, добавить операторы, выполнять отдельные команды, не пробегаясь по истории команд, как в случае командной строки.

После того как программа сохранена в М-файле, к примеру в *myprog.m,* для ее запуска можно использовать пункт *Run* меню *Debug* либо набрать в командной строке имя М-файла (без расширения) и нажать *Enter,* т. е. выполнить, как команду *MatLab.* При таких способах запуска программы следует учесть важное обстоятельство — путь к каталогу с М-файлом должен быть известен *MatLab.* Сделайте каталог с файлом *myprog* текущим.

Установка текущего каталога производится из окна *Current Directory* рабочей среды. Если это окно отсутствует, то следует выбрать пункт *Current Directory* меню *View* рабочей среды. Для выбора желаемого каталога на диске нажмите кнопку, расположенную справа от раскрывающегося списка.

Когда текущий каталог установлен, то все М-файлы, находящиеся в нем, могут быть запущены из командной строки либо из редактора М-файлов. Все переменные файл-программы после ее запуска доступны в рабочей среде, т. е. являются глобальными. Убедитесь в этом, выполнив команду *whos.* Более того, файл-программа может использовать переменные рабочей среды. Например, если была введена команда, показанная на экране 115, то файл-программа, содержащая строку *bar(a),* построит столбцовую диаграмму вектора *a* (разумеется, если он не был переопределен в самой файл-программе).

Экран 115

```
»a = [0.1 0.4 0.3 1.9 3.3];
```

Файл-функции отличаются от файл-программ тем, что они могут иметь входные и выходные аргументы, а все переменные, определенные внутри файл-функции, являются локальными и не видны в рабочей среде. М-файл, содержащий файл-функцию, должен начинаться с заголовка, после него записываются операторы *MatLab.* Заголовок состоит из слова *function,* списка выходных аргументов, имени файл-функции и списка входных аргументов. Аргументы в списках разделяются запятой. Простейшая файл-функция с двумя входными и одним выходным аргументами (экран 116).

```
function c = mysum(a, b);
c = a + b;
```

Наберите этот пример в новом файле в редакторе и сохраните его. *MatLab* предлагает в качестве имени М-файла название файл-функции, т. е. *mysum.m.* Убедитесь, что каталог с файлом *mysum.m* является текущим, и вызовите файл-функцию *mysum* из командной строки (экран 117).

Экран 117

```
» s = mysum(2, 3)
s =
  5
```

При вызове файл-функции *mysum* произошли следующие события: входной аргумент *a* получил значение 2; входной аргумент *Ъ* стал равен 3; сумма *a* и *Ь* записалась в выходной аргумент *c;* значение выходного аргумента *c* получила переменная *s* рабочей среды и результат вывелся в командное окно.

Заметьте, что оператор *c* = *a* + *b* в файл-функции *mysum* завершен точкой с запятой для подавления вывода локальной переменной *c* в командное окно. Очевидно, что для просмотра значений локальных переменных при отладке файл-функций не следует подавлять вывод на экран значений требуемых переменных. Практически все функции *MatLab* являются файл-функциями и хранятся в одноименных М-файлах. Функция *sin* допускает два варианта вызова: *sin(x)* и *y* = *sin(x),* в первом случае результат записывается в *ans,* а во втором — в переменную *y*. Наша функция *mysum* ведет себя точно так же. Более того, входными аргументами *mysum* могут быть массивы одинаковых размеров или массив и число.

Разберем теперь, как создать файл-функцию с несколькими выходными аргументами. Список выходных аргументов в заголовке файл-функции заключается в квадратные скобки, сами аргументы отделяются запятой. В качестве примера приведена файл-функция *quadeg,* которая по заданным коэффициентам квадратного уравнения находит его корни (экран 118).

При вызове *quadeg* из командной строки используйте квадратные скобки для указания переменных, в которые будут занесены значения корней (экран 119).

Экран 118

```
function [x1, x2] = quadeg(a, b,c);
• = ь·2-4·а"с;
x1 = (-b + sqrt(D)) / (2 ' a);
x2 = (-b-sqrt(D))/(2'a);
```

Экран 119

```
»[r1,r2] = quadeg(1,2, 3);
r1 =
  -1
r2] =
  -2
```

Заметьте, что файл-функцию *quadeg* можно вызвать без выходных аргументов, или только с одним выходным аргументом. В этом случае вернется только первый корень.

Файл-функция может и не иметь входных или выходных аргументов, заголовки таких файл-функций следующие: function noout(a, b), function [v, u] = noin, function noarg().

11.3.6. ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Язык программирования *MatLab* содержит основной набор конструкций: операторы ветвления и циклы. Простота языка программирования окупается огромным количеством встроенных функций, которые позволяют решать задачи из различных областей.

Цикл *for* используется для повторения операторов в случае, когда число повторений заранее известно. В цикле *for* используется счетчик цикла, его начальное значение, шаг и конечное значение указываются через двоеточие. Блок операторов, размещенный внутри цикла, должен заканчиваться словом *end* (экран 120).

Экран 120

```
x = [-2:0.01:2];
for beta = -0.5:0.1:0.5
y = exp(beta'x).'sin(x);
plotfx, y)
hold on
end
hold off
```

Файл-программа для вывода графиков функции:

$$= e^{\beta x} \sin x, x \in [-2,2], \beta \in [-0.5,0.5].$$

Если шаг равен единице, то его указывать не обязательно.

Цикл *for* подходит для повторения заданного числа определенных действий. В том случае, когда число повторов заранее неизвестно и определяется в ходе выполнения блока операторов, следует организовать цикл *while.* Цикл *while* работает, пока выполнено условие цикла. Файл-функция *negsum* находит сумму всех первых отрицательных элементов вектора (экран 121).

Экран 121

```
function s = negsum(x)
s = 0;
k=1;
while x(k) < 0
s = s + x(k);
k = k+ 1;
end
```

В качестве операторов отношения используются символы: >, < , > = , < = , = = (равно), - = (не равно). Файл-функция *negsum* имеет один недостаток: если все элементы массива — отрицательные числа, то *k* становится больше длины массива *x,* что приводит к ошибке (пример на экране 122).

Экран 122

```
» b = [-2 -7 -1 -9 -2 -5 -4];
» s = negsum(b)
??? Index exceeds matrix dimensions.
```

Кроме проверки значения *x(k)* следует позаботится о том, чтобы значение *k* не превосходило длины вектора *x*. Вход в цикл должен осуществляться только при одновременном выполнении условий *k* < = *length (x)* и *x(k)* < 0, т. е. необходимо применить логический оператор «и», обозначаемый в *MatLab* символом &. Замените условие цикла на составное: *k* < = *length {x)* & *x (k)* < 0. Если первое из условий не выполняется, то второе условие проверяться не будет, именно поэтому выбран такой порядок операторов. Теперь файл-функция *negsum* работает верно для любых векторов.

Логический оператор «или» обозначается символом вертикальной черты |, а отрицание — при помощи тильды ~.

Циклы могут быть вложены друг в друга. Например, для поиска суммы элементов матрицы, расположенных выше главной диагонали, следует использовать два цикла *for,* причем начальное значение счетчика внутреннего цикла зависит от текущего значения счетчика внешнего цикла (экран 123).

Экран 123

```
function s = upsum(A)
[n m] = size(A);
s = 0;
for i = 1:n
  for j = i + 1:m
    s = s + A(i, j);
  end
end
```

Ветвление в ходе работы программы осуществляется при помощи конструкции *if-elseif-else.* Каждая из ветвей *elseif* должна содержать условие выполнения блока операторов, размещенных после нее. Важно понимать, что условия проверяются подряд, первое выполненное условие приводит к работе соответствующего блока, выходу из конструкции *if-elseif-else* и переходу к оператору, следующему за *end.* У последней ветви *else* не должно быть никакого условия. Операторы, находящиеся между *else* и *end,* работают в том случае, если все условия оказались невыполненными. Предположим, что требуется написать файл-функцию для вычисления кусочно-заданной функции:

$$f(x)=\begin{cases}1-e^{-1-x}, & x<-1,\\ x^2-x-2, & -1<x<2,\\ 2-x, & x>2.\end{cases}$$

Первое условие $x < -1$ проверяется в ветви *if.* Условие $-1 <= x$ не требуется включать в следующую ветвь *elseif,* поскольку в эту ветвь программа заходит, если предыдущее условие $(x < -1)$ оказалось не выполнено. Условие $x > 2$ проверять не надо — если не выполнены два предыдущих условия, то x будет больше двух. Файл-функция для вычисления кусочно-заданной функции дана на экране 124.

```
function f = pwf(x)
if x < -1
  f = 1 - exp(-1 - x);
elseif x <= 2
  f = x^2 - x - 2;
else
  f = 2 - x;
end
```

Ход работы программы может определяться значением некоторой переменной (переключателя). Такой альтернативный способ ветвления программы основан на использовании оператора переключения *switch.* Переменная-переключатель помещается после *switch* через пробел. Оператор *switch* содержит блоки, начинающиеся со слова *case,* после каждого *case* записывается через пробел то значение переключателя, при котором выполняется данный блок. Последний блок начинается со слова *otherwise,* его операторы работают в том случае, когда ни один из блоков *case* не был выполнен. Если хотя бы один из блоков *case* выполнен, то происходит выход из оператора *switch* и переход к оператору, следующему за *end.*

Предположим, что требуется найти количество единиц и минус единиц в заданном массиве и, кроме того, найти сумму всех элементов, отличных от единицы и минус единицы. Следует перебрать все элементы массива в цикле, причем в роли переменной-переключателя будет выступает текущий элемент массива. Файл-функция по заданному массиву возвращает число минус единиц в первом выходном аргументе, число единиц — во втором, а сумму — в третьем (экран 125).

Экран 125

```
function [m, p, s] = mpsum(x)
m = 0;
p = 0;
s = 0;
for i = 1:length(x)
  switch x(i)
    case -1
      m = m + 1;
    case 1
      p = p + 1
    otherwise
      s = s + 1
  end
end
```

Блок *case* может быть выполнен не только при одном определенном значении переключателя, но и в том случае, когда переключатель принимает одно из нескольких допустимых значений. В этом случае значения указываются после слова *case* в фигурных скобках через запятую, например, case {1, 2, 3}.

Досрочное завершение цикла *while* или *for* осуществляется при помощи оператора *break.* Пусть, например, требуется по заданному массиву x образовать новый массив y по правилу $y(k) = x(k + 1)/x(k)$ до первого нулевого элемента $x(k)$, т. е. до тех пор, пока имеет смысл операция деления. Номер первого нулевого элемента в массиве x заранее неизвестен, более того, в массиве x может и не быть нулей. Решение задачи состоит в последовательном вычислении элементов массива y и прекращении вычислений при обнаружении нулевого элемента в x. Файл-функция, демонстрирующая использование оператора *break* для выхода из цикла, дана на экране 126.

Экран 126

```
function y = div(x)
for k = 1:lenth(x)-1
  if x(k) = = 0
    break
  end
y(k) = x(k + 1)/x(k);
end
```

11.3.7. НЕЙРОСЕТЕВОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НА РЫНКЕ ЦЕННЫХ БУМАГ

Нейросети находят свое применение в таких отраслях, как прогнозирование, классификация, аппроксимация и др.

Задача эта весьма популярна. Действительно, обладая хорошим инструментом на рынке, можно, «играя» своим портфелем ценных бумаг, весьма быстро и легко заработать большое количество денег. Инструмент поможет определить с известной вероятностью, когда нужно бумагу продать (цена будет падать), когда покупать (цена будет расти). Для демонстрации возможностей нейросетей используем встроенную библиотеку работы с нейросетями.

Пусть известен график динамики котировок ценной бумаги (рис. 41). Требуется проанализировать возможность прогнозирования дальнейшего поведения цены на бумагу, используя механизм нейронных сетей.

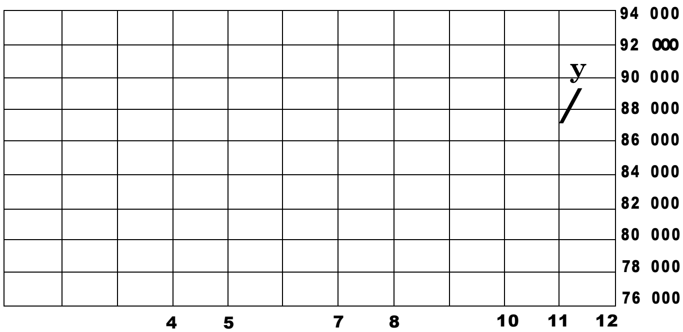


Рис. 41

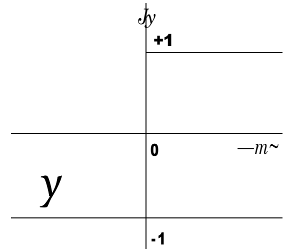
Преобразуем данный график в последовательность аргументов и значений функции цены.

Аргумент [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34].

Цена [76, 77, 77.5, 79.5, 81, 82, 81.5, 82, 81.5, 82, 82, 82.5, 82, 82.5, 84, 85.5, 86, 87, 87, 86.5, 86.5, 87.5, 88, 88.5, 88.5, 90, 90.5, 92, 92, 92, 92, 92, 93, 94].

В качестве нейронной сети выберем сеть типа *Feed Forward Neural Network* общего типа (например, MLP-сеть с двумя слоями). В первом слое располагалось 4 нейрона с переходной функцией *TANSIG* (рис. 42), а во втором слое располагается один нейрон с переходной функцией PURELIN (рис. 43).

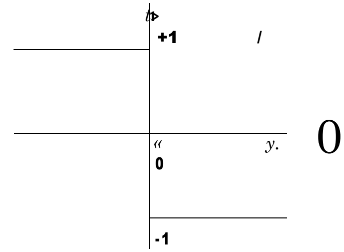
Чтобы иметь возможность проверить результаты, возьмем из исходной последовательности аргументов первые 28 (для обучения в дальнейшем можно опускать первые аргумен-



a = *tansig(n)*

Tan-Sigmoid Transfer Function

Рис. 42



a = *purelin(n)*

Linear Transfer Function

Рис. 43

ты), возьмем соответствующие им значения цены, представим их в качестве массивов (примеры — по 4 входа, исходя из количества входных нейронов):

pi = [1, 2, 3, 4], *p2* = [5, 6, 7, 8], рЗ = [9, 10, 11, 12],
p4 = [13, 14, 15, 16], *p5* = [17, 18, 19, 20],
рб = [21, 22, 23, 24], *p7* = [25, 26, 27, 28],
tl = [76, 77, 77.5, 79.5], *t2* = [81, 82, 81.5, 82],
гЗ = [81.5, 82, 82, 82.5], *t4* = [82, 82.5, 84, 85.5],
г5 = [86, 87, 87, 86.5], *t6* = [86.5, 87.5, 88, 88.5],
tl = [88.5, 90, 90.5, 92].

Далее сконструируем новую *FFNN-сеть* с четырьмя входами, одним выходом, с ограничениями на вход от 0 до 40: *net = newff([0* 40], [5 *l],{'tansig' 'purelin'}).*

Для наглядности построим график исходной последовательности: *plot(p, t, 'o')* (рис. 44)

Назначим параметр обучения сети с учителем (погрешность и проходы): *net.trainParam.epochs* = 50.

Дальше обучим сеть алгоритмом обратного распространения: *net = train(net, p\, tl).* И так далее, все 7 векторов.

Получим сеть с обновленными весами: *y = sim(net, p).*

Построим графики (исходный ценовой и график, который строится на основе выхода нейронной сети): *plot(p, t,p, y, 'o')* (рис. 45).

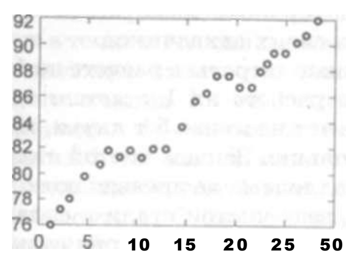


Рис. 44

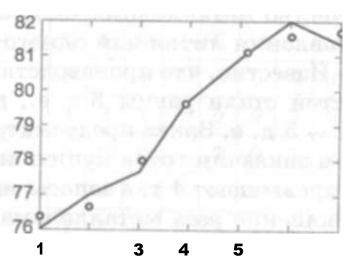


Рис. 45

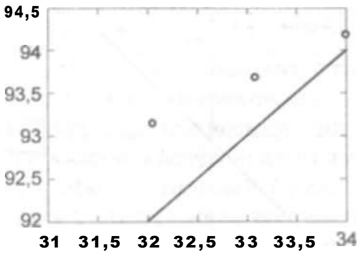


Рис. 46

Дальше зададим аргументы, для которых мы хотим получить прогноз от сети на значение цены: *p8* = [29, 30, 31, 32].

Для проверки сформируем массив правильных ответов: *t8* = [92, 92, 92, 92]. Подадим заданный массив аргументов на сеть: *y = sim(net, pi).*

Выведем график полученных ответов от сети и исходный, сравним результаты: *plotipl, tl, pi, y,* 'o') (рис. 46).

Для более точного расчета нужно много больше данных и очень четкий их отбор.

11.4. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Решить в *QSB* и *Excel:*

Задание 1. Товарный бетон производится на четырех заводах. В смену первый завод может выдать 120 м^3 бетона, второй — 60 м^3, третий — 180 м^3, четвертый — 100 м^3. Бетон потребляется на пяти строительных площадках. В смену на первой стройплощадке нужно 80 м^3 бетона, на второй — 110 м^3, на третьей — 130 м^3, на четвертой — 90 м^3, на пятой — 120 м^3. Матрица стоимости перевозок показана в таблице 73.

Заводы	Стройплощадки				
	1	2	3	4	5
1	11	6	5	3	8
2	2	4	9	6	7
3	4	8	7	10	12
4	8	3	5	2	6

Требуется определить: с какого завода на какую стройплощадку и в каком количестве следует возить бетон так, чтобы суммарные затраты на перевозки были бы минимальны.

Задание 2. Фирма должна решить, какое количество чистой стали — x_1 и какое количество металлолома — x_2 следует использовать для приготовления литья для одного из своих заказчиков.

Известно, что производственные затраты в расчете на 1 т чистой стали равны 3 д. е., а в расчете на 1 т металлолома — 5 д. е. Заказ предусматривает не менее 5 т литья, при этом заказчик готов купить и больше. Запасы чистой стали не превышают 4 т, а запасы металлолома не превышают 6 т. Отношение веса металлолома к весу чистой стали в сплаве не должно превышать 7/8. Производственные условия таковы, что на процессы плавки и литья не может быть израсходовано более 18 ч, при этом на 1 т стали уходит 3 ч, а на 1 т металлолома — 2 ч производственного времени.

Задание 3. В состав фирмы входят три предприятия, выпускающие разнородную продукцию. Следует решить, как распределить между ними в текущем плановом периоде имеющийся у фирмы ограниченный ресурс (например, денежные средства), чтобы суммарная величина прибыли от всех предприятий была бы максимальной. Прибыль, получаемая от каждого предприятия в зависимости от количества выделяемого ему ресурса, показана в таблице 74.

Задание 4. Найти кратчайший маршрут из пункта 1 в пункт 9 на циклической дорожной сети, матрица смежности которой приведена в таблице 75.

Задание 5. Решить задачу коммивояжера. Расстояния между пунктами заданы в таблице 76.

Задание 6. Авиакомпании предстоит решить, какое количество топлива следует закупить у нефтяных компаний при соблюдении следующих требований. Нефтяные компании могут в течение месяца поставить следующее количество топлива: компания 1 — 2,5 тыс. л; компания 2 — 5 тыс. л; компания 3 — 6 тыс. л. Авиакомпании требуется 1 тыс. л в аэропорту 1; 2 тыс. л в аэропорту 2; 3 тыс. л в аэропорту 3; 4 тыс. л в аэропорту 4.

Таблица 74

Количество ресурса	Предприятие		
	1	2	3
0	0	0	0
1	1	2	0
2	4	3	3
3	6	5	6
4	8	7	8
5	9	9	10
6	10	11	12

Таблица 75

Пункт	Пункт								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		5	3	2					
2	5		6		7				
3	3	6		4	2	4	8		
4	2		4				6	7	
5		2	2			6			5
6			4		6		2	3	4
7			8	6		2		5	
8				7		3	5		3
9				1	5	л		5	

Таблица 76

Пункт	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	7	12	3	г.	8	4	2
2	5	0	7	5	11	2	7	8
3	7	4	0	9	6	5	10	4
4	3	7	10	0	9	3	5	11
5	10	2	4	7	0	5	8	5
6	4	8	6	11	3	0	7	9
7	5	7	3	9	1	7	0	VI
8	11	9	5	7	3	9	6	0

Таблица 77

Аэропорт	Нефтяная компания		
	1	2	3
1	12	6	10
2	10	11	14
3	8	11	13
4	11	13	9

Таблица 78

Завод	Клиент				
	1	2	3	4	5
1	0,05	0,07	0,10	0,15	0,15
2	0,08	0,06	0,09	0,12	0,14
3	0,10	0,09	0,08	0,10	0,15

Стоимость 1 л топлива с учетом транспортных расходов приведена в таблице 77.

Задание 7. Фирма производит мелкие детали для промышленных изделий и продает их через своих посредников по фиксированной цене 2,5 руб./шт. Число посредников равно 5. Коммерческие прогнозы показывают, что в планируемом месяце объемы поставок клиентам соответственно составят: 3000, 3000, 10 000, 5000 и 4000 штук.

Фирма имеет три завода, производственные мощности которых соответственно равны 5000, 10 000 и 12 500 деталей в месяц. Себестоимость одной детали, изготовленной на заводе 1, равна 1 руб./шт., на заводе 2 — 0,9 руб./шт., на заводе 3 — 0,8 руб./шт.

Транспортные расходы, связанные с доставкой одной детали на склады клиентов, приведены в таблице 78.

Требуется определить оптимальную загрузку каждого из заводов на планируемый месяц.

Задание **8.** В аэропорту имеются три группы контейнеров с различными грузами. Масса контейнера 1 типа 14 т, стоимость груза в нем — 120 руб.; контейнер 2 типа: масса — 16 т, стоимость 180 руб.; контейнер 3 типа: масса — 20 т, стоимость 250 руб.

Требуется загрузить самолет грузоподъемностью 100 т так, чтобы суммарная стоимость груза на борту была бы максимальной, и при этом самолет не был бы перегружен.

Таблица 79

Время суток, часы	Номер периода	Минимальная потребность в работниках за период
2-6	1	20
6-10	2	40
10-14	3	70
14-18	4	90
18-22	5	60
22-2	6	30

Задание **9.** Организация имеет следующие минимальные потребности в количестве работников в различное время суток (табл. 79). При этом нужно иметь в виду, что период 1 следует сразу за периодом 6.

Каждый работник работает 8 ч без перерыва. Служба кадров пытается составить

расписание дежурств на каждые сутки таким образом, чтобы обойтись минимальным числом работников, не нарушая требований, указанных в таблице.

Сколько для этого потребуется работников?

Задание 10. В течение месяца завод должен выпустить 8 наименований изделий. Затраты на переналадку оборудования при переходе от выпуска i-го изделия на выпуск ;'-го изделия приведены в таблице 80.

Таблица 80

5 n делие	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	4	8	5	7	3	8	11
2	4	0	5	8	6	12	7	2
3	6	8	0	11	9	4	3	7
4	2	4	6	0	3	10	7	9
5	5	3	2	7	0	4	4	6
6	8	5	7	3	8	0	9	3
7	5	8	2	3	5	1	0	7
8	2	1	7	5	8	6	10	0

В какой последовательности следует выпускать изделия, чтобы суммарные затраты на переналадку оборудования были бы минимальны?

Задание 11. Разработать план выпуска изделий и хранения их на складе готовой продукции на шестимесячный плановый период с января по июнь при условии, что каждый месяц завод должен отпускать потребителю 3 единицы изделий. Стоимость производства 0 штук — 0 руб.; 1 штуки — 13 руб.; 2 штук — 16 руб.; 3 штук — 19 руб.; 4 штук — 22 руб.; 5 штук — 25 руб. Максимальная мощность завода — 5 изделий в месяц. Стоимость хранения одного изделия на складе — 2 руб./мес. Количество хранимых изделий определяется на конец текущего месяца. Максимальная емкость склада готовой продукции — 4 изделия. Запас изделий на конец июня должен быть равен нулю.

Необходимо составить план так, чтобы был обеспечен требуемый отпуск изделий потребителю и при этом суммарные затраты на производство и хранение изделий на складе были бы минимальны.

Задание 12. В условие примера о производстве печенья и бисквитов внесите необходимые изменения, определите новый оптимальный план и значение целевой функции.

А. Предположим, что спрос на печенье ограничен и составляет 1000 кг.

Б. Предположим, что по заключенным ранее договорам фирма обязалась произвести и продать 1000 кг бисквитов.

В. Предположим, что к имеющемуся запасу сахара можно докупить его по цене 14 руб./кг. Сколько сахара выгодно докупить, и какова ожидаемая величина выгоды?

9-2917

Г. Предположим, что ситуация изменилась, и из 825 кг муки 200 кг оказались не пригодными к употреблению. Определите связанные ресурсы, их допустимые границы изменения.

Д. Предположим, что часть работников не выйдет на работу и за плановый период будут доступны не 200, а всего 130 ч рабочего времени. Выгодны ли сверхурочные работы по тарифу 60 руб./ч? Если нет, то насколько невыгодны? Если да, то насколько выгодно и в каком объеме?

Решить в *MatLab*:

Задание 1. Построить графики функций одной переменной на указанных интервалах:

$$f(x) = \sin(x); g(x) = \sin^2 x; x \in [-2\pi, 3\pi],$$
$$u(x) = 0.01x^2; v(x) = e^{-|x|}; x \in [-0.2, 9.4].$$

Вывести графики различными способами: в отдельные графические окна, в одно окно на одну ось, в одно окно на отдельные оси. Дать заголовки, разместить подписи к осям, легенду, использовать различные цвета, стили линий и типы маркеров, нанести сетку.

Задание 2. Построить график кусочно-заданной функции, отобразить ветви разными цветами и маркерами:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \le x \le 1, \\ 1, & 1 < x \le 3, \\ (x-4)^2 & 3 < x \le 5. \end{cases}$$

Задание 3. Визуализировать функцию двух переменных

$$z(x, y) = \sin(x) \cdot e^{-3y}; \quad x \in [0, 2\pi]; \quad y \in [0, 1]$$

на прямоугольной области определения различными способами: каркасной поверхностью; залитой цветом каркасной поверхностью; промаркированными линиями уровня (самостоятельно выбрать значения функции, отображаемые линиями уровня); освещенной поверхностью. Расположить графики в отдельных графических окнах и в одном окне с соответствующим числом пар осей. Представить вид каркасной или освещенной поверхности с нескольких точек обзора.

Задание 4. Написать файл-функцию, которая по заданному вектору определяет номер его элемента с наибольшим отклонением от среднего арифметического всех элементов вектора.

Задание 5. Написать файл-функцию для определения количества положительных элементов вектора, расположенных между его максимальным и минимальным элементами.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТИПОВЫЕ МОДЕЛИ МЕНЕДЖМЕНТА

Ни один учебный предмет, описывающий конкретную отрасль знаний, не может удлинить человеку руку. Но он может расширить его возможности, подняв человека на плечи его предшественников.

П. Ф. Драккер

ГЛАВА 12

МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Доводы, до которых человек додумывается сам, обычно убеждают его больше, нежели те, которые пришли в голову другим.

Блез Паскаль

Один человек выпнвдет БОЧОНОК КВАСА ЗА 14 дней, А вместе с женой — зд 10 дней. ЗА сколько дней женд ОДНА выпнвдет ТАКОЙ же БОЧОНОК КВАСА?

СТАРИННАЯ ЗАДАЧА

12.1. МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ (МОДЕЛЬ ХАРРОДА)

Одна из первых упрощенных моделей развития экономики страны была предложена английским экономистом **Р. Харродом.** В модели учитывается один определяемый фактор — капитальные вложения, а состояние экономики оценивается через размер национального дохода.

Для математической постановки задачи введем следующие обозначения: Y_t — национальный доход в год t, K_t — производственные фонды в год t, C_t — объем потребления в год t, S_t — объем накопления в год t, V_t — капитальные вложения в год t.

Будем предполагать, что функционирование экономики происходит при выполнении следующих условий:

- условие баланса доходов и расходов за каждый год:

$$Y_t = C_t + S_t;$$

- условие исключения пролеживания капитала:

$$S_t = V_t;$$

- условие пропорционального деления национального годового дохода:

$$S_t = a \cdot Y_t.$$

Два условия принимаются для характеристики внутренних экономических процессов. Первое условие характеризует связь капитальных вложений и общей суммы производственных фондов, второе — связь национального годового дохода и производственных фондов.

Капитальные вложения в год t могут рассматриваться как прирост производственных фондов или производная от функции:

$$V_t = dK/dt.$$

Национальный доход в каждый год принимается как отдача производственных фондов с соответствующим нормативным коэффициентом фондоотдачи:

$$Y_t = K_t/b.$$

Соединяя условия задачи, можно получить следующее соотношение:

$$Y_t = \frac{V_t}{a} = \frac{dK}{a \cdot dt} = \frac{b}{a} \cdot \frac{dY}{dt}.$$

Отсюда следует итоговое **уравнение Харрода:**

$$b \cdot \frac{dY}{dt} = a \cdot Y.$$

Его решением является экспоненциальное изменение национального дохода по годовым интервалам:

$$Y_t = Y_0 \cdot e^{\frac{at}{b}}.$$

Несмотря на упрощенный вид математической модели, ее результат может быть использован для укрупненного анализа национальной экономики. Параметры a и b могут стать параметрами управления при выборе плановой стратегии развития с целью максимального приближения к предпочтительной траектории изменения национального дохода или для выбора минимального интервала времени достижения заданного уровня национального дохода.

12.2. СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Идея сбалансированности лежит в основе всякого рационального функционирования хозяйства. Суть ее в том, что все затраты должны компенсироваться доходами хозяйства. В основе создания балансовых моделей лежит **балансовый метод** — взаимное сопоставление имеющихся ресурсов и потребностей в них.

Межотраслевой баланс отражает производство и распределение валового национального продукта в отраслевом разрезе, межотраслевые производственные связи, использование материальных и трудовых ресурсов, создание и распределение национального дохода.

Пусть экономика страны имеет n отраслей материального производства. Каждая отрасль выпускает некоторый

Таблица 81

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечный продукт	Валовый продукт
	1	2	...	n		
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	Y_2	X_2
...	...	...	I	...	II	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизация	c_1	c_2	...	c_n		
Оплата труда	v_1	v_2	III	v_n	IV	
Чистый доход	m_1	m_2	...	m_n		
Валовый продукт	X_1	X_2	...	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i$

продукт, часть которого потребляется другими отраслями (*промежуточный продукт*), а другая часть идет на конечное потребление и накопление (*конечный продукт*).

Обозначим через $X_i (i = 1, \ldots, n)$ валовый продукт i-й отрасли; x_{ij} — стоимость продукта, произведенного в i-й отрасли и потребленного в j-й отрасли для изготовления продукции стоимостью X_j; Y_i — конечный продукт i-й отрасли.

Межотраслевой баланс состоит из четырех квадрантов (табл. 81). Первый квадрант отражает межотраслевые потоки продукции. Второй характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода. Третий представляет национальный доход как стоимость условно чистой продукции (Z_j), равной сумме амортизации (c_j), оплаты труда (v_j) и чистого дохода j-й отрасли (m_j). Четвертый квадрант показывает конечное распределение и использование национального дохода.

Рассмотрим основные соотношения межотраслевого баланса.

Валовая продукция j-й потребляющей отрасли (X_j) равна сумме ее материальных затрат и условно чистой продукции:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Валовая продукция i-й производящей отрасли (X_i) равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Валовый национальный продукт равен сумме валовых продуктов отраслей:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Z_j, \quad \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Следовательно, должно соблюдаться равенство между итогом третьего квадранта и итогом второго квадранта.

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Коэффициент прямых затрат (a_{ij}) показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, учитывая только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \; (j = 1, \ldots, n).$$

С учетом этой формулы систему уравнений баланса можно переписать в виде:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j + Y_i \; (i = 1, \ldots, n).$$

Если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов прямых затрат $A = (a_{ij})$, вектор-столбец валовой продукции $X = (X_i)$ и вектор-столбец конечной продукции $Y = (Y_i)$, то ЭММ межотраслевого баланса примет вид:

$$X = AX + Y.$$

С помощью этой модели, которую называют моделью В. Леонтьева или моделью затраты—выпуск, можно выполнять три варианта расчетов:

1) задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли, можно определить объем конечной продукции каждой отрасли:

$$Y = (E - A) \cdot X;$$

2) задав величины конечной продукции всех отраслей, можно определить величины валовой продукции каждой отрасли:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y;$$

3) задав для ряда отраслей величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей задав объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

Для того чтобы обеспечить положительный конечный выпуск по всем отраслям, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из перечисленных ниже условий:

определитель матрицы $(E - A)$ не равен нулю, т. е. матрица $(E - A)$ имеет обратную матрицу $(E - A)^{-1}$;
матричный ряд

$$E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

сходится, причем его сумма равна обратной матрице $(E - A)^{-1}$;

- наибольшее по модулю собственное значение матрицы A, т. е. решение уравнения $|\lambda E - A| = 0$, строго меньше единицы;
- все главные миноры матрицы $(E - A)$, т. е. определители матриц, образованных элементами первых строк и первых столбцов этой матрицы, порядка от 1 до n, положительны.

Обозначим обратную матрицу как $B = (E - A)^{-1} = (b_{ij})$. Тогда для любой i-й отрасли можно получить соотношение:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot Y_j \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Коэффициент полных затрат (b_{ij}) показывает, какое количество продукции i-й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j-й отрасли.

Полные затраты отражают использование ресурса на всех этапах изготовления и равны сумме прямых и косвенных затрат на всех предыдущих стадиях производства продукции.

Например, определим полные затраты руды на изготовление одной тонны проката, если на 1 т проката расходуется 1,12 т стали; на 1 т стали 0,6 т чугуна и 0,1 т руды; на 1 т чугуна — 1,7 т агломерата и 0,2 т руды; на 1 т агломерата — 0,9 т руды.

Прямые затраты руды на 1 т стали (норма расхода) равны 0,1 т/т. Косвенные затраты руды 1-го порядка (связанные с чугуном) $= 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12$ т/т. Косвенные затраты руды 2-го порядка (связанные с агломератом) $= 0{,}6 \cdot 1{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}918$ т/т. Полные затраты руды на 1 т стали $= 0{,}1 + 0{,}12 + 0{,}918 = 1{,}138$ т/т.

Прямые затраты руды на 1 т проката = 0 т/т. Косвенные (полные) затраты руды на 1 т проката $= 1{,}12 \cdot 1{,}138 = 1{,}275$ т/т.

Пример 1. Для трехотраслевой экономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат и вектор конечной продукции:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Найти коэффициенты полных материальных затрат и вектор валовой продукции; составить межотраслевой баланс.

Решение. Определим матрицу коэффициентов полных материальных затрат приближенно, учитывая косвенные затраты до 2-го порядка включительно:

а) матрица коэффициентов косвенных затрат 1-го порядка:

$$A^{(1)} = A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0{,}12 & 0{,}20 \\ 0{,}16 & 0{,}27 & 0{,}08 \\ 0{,}17 & 0{,}10 & 0{,}16 \end{pmatrix};$$

б) матрица коэффициентов косвенных затрат 2-го порядка:

$$A^{(2)} = A^3 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0{,}12 & 0{,}20 \\ 0{,}16 & 0{,}27 & 0{,}08 \\ 0{,}17 & 0{,}10 & 0{,}16 \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}153 & 0{,}103 & 0{,}132 \\ 0{,}126 & 0{,}159 & 0{,}80 \\ 0{,}119 & 0{,}083 & 0{,}100 \end{pmatrix};$$

в) матрица коэффициентов полных затрат приближенно:

$$B \approx E + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 1{,}683 & 0{,}323 & 0{,}732 \\ 0{,}486 & 1{,}929 & 0{,}160 \\ 0{,}589 & 0{,}283 & 1{,}460 \end{pmatrix}.$$

Определим матрицу коэффициентов полных затрат точно с помощью формул обращения невырожденных матриц:

а) находим матрицу $(E - A)$:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}1 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & -0{,}0 \\ -0{,}3 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix};$$

б) вычисляем определитель этой матрицы:

$$\Delta = 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 + (-0{,}4) \cdot (-0{,}1) \cdot (-0{,}2) - $$
$$- (-0{,}4) \cdot 0{,}5 \cdot (-0{,}3) - (-0{,}2) \cdot (-0{,}1) \cdot 0{,}8 = 0{,}196;$$

в) находим алгебраические дополнения для элементов матрицы:

$$d_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 \\ 0,0 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,40; \quad D = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,16 & 0,17 \\ 0,12 & 0,44 & 0,10 \\ 0,20 & 0,08 & 0,33 \end{pmatrix};$$

г) транспонируем D, умножаем D^T на величину $1/\Delta$ и получаем матрицу $B = (E - A)^{-1}$:

$$B = \frac{1}{0,196} \cdot \begin{pmatrix} 0,40 & 0,12 & 0,20 \\ 0,16 & 0,44 & 0,08 \\ 0,17 & 0,10 & 0,33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,041 & 0,612 & 1,020 \\ 0,816 & 2,245 & 0,408 \\ 0,867 & 0,510 & 1,684 \end{pmatrix}.$$

Найдем величины валовой продукции трех отраслей:

$$X = B \cdot Y = \begin{pmatrix} 2,041 & 0,612 & 1,020 \\ 0,816 & 2,245 & 0,408 \\ 0,867 & 0,510 & 1,684 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 775,3 \\ 510,1 \\ 729,6 \end{pmatrix}.$$

Для определения элементов первого квадранта материального межотраслевого баланса воспользуемся формулой $x_{ij} = a_{ij} \cdot X_j$, т. е.:

$$x_{11} = 0,3 \cdot 775,3 = 232,6;$$
$$x_{12} = 0,1 \cdot 510,1 = 51;$$
$$x_{13} = 0,4 \cdot 729,6 = 291,8 \text{ и т. д.}$$

Составляющие третьего квадранта (условно чистая продукция) находятся как разность между объемами валовой продукции и суммами элементов соответствующих столбцов найденного первого квадранта.

Результаты расчета представлены в таблице 82.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт	Валовый продукт
	1	2	3		
1	232,6	51	291,8	200	775,3
2	155,1	255	0	100	510,1
3	232,6	51	145,9	300	729,6
Условно чистая продукция	155,0	153,1	291,9	600	–
Валовый продукт	775,3	510,1	729,6	–	2015,0

Основной недостаток статической модели межотраслевого баланса состоит в том, что она не позволяет установить связи между планами производства отраслей и планами капитальных вложений, обеспечивающих развитие этих отраслей, т. е. модель не учитывает динамику самой экономики.

12.3. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Основное отличие динамической модели межотраслевого баланса от статистической состоит в том, что объемы капитальных вложений в каждый год здесь не предполагаются известными, а находятся из модели.

Пусть $x_i(t)$ — объем продукции i-й отрасли в t-м году планового периода; T — продолжительность планового периода (в годах); $b_{ij}(t)$ — капитальные затраты продукции i-й отрасли в t-м году, обеспечивающие увеличение продукции j-й отрасли на единицу; k_{ij}^r — доля капитальных вложений продукции i-й отрасли для увеличения продукции j-й отрасли за r лет до завершения строительства (от всего объема капитальных вложений продукции i-й отрасли в увеличение продукции j-й отрасли); τ — период от начала капитальных вложений до получения за их счет дополнительной продукции; $y_i'(t)$ — конечная продукция i-й отрасли в t-м году за вычетом затрат и капиталовложений, связанных с расширением производства; Δx_j — изменение продукции j-й отрасли.

Используя введенные обозначения, динамическую модель межотраслевого баланса можно описать следующей системой уравнений:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{\tau} b_{ij}(t)k_{ij}^2 \Delta x_j(t+r) + y_i(t),$$

где $x_i(t)$ — объем продукции 1-й отрасли,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) \text{ —}$$

затраты на производство,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{\tau} b_{ij}(t)k_{ij}^2 \Delta x_j(t+r) \text{ —}$$

затраты на капитальные вложения, $y_i(t)$ — конечная продукция без затрат и капиталовложений, ($i = 1, 2, \dots, n$; $t = 1, 2, \dots, T$). Из этой модели аналогично предыдущему находятся объемы продукции отраслей в каждый год планируемого периода, а также затраты на капитальные вложения в отраслевой и временной структуре.

12.4. МЕЖПРОДУКТОВЫЙ БАЛАНС

Межпродуктовый баланс используется для обеспечения полной взаимоувязки планов производства группы взаимосвязанных предприятий либо группы цехов одного предприятия.

Рассмотрим межпродуктовую балансовую модель на примере предприятия, у которого в каждом цехе производится только один вид продукции в объеме $X_i (i = 1, n)$. Отдельный вид продукции может быть использован как промежуточный продукт, идущий на внутреннее потребление (передаваемый другим цехам), и как конечный продукт, поступающий непосредственно потребителю.

Обозначим через xj — количество продукции t-ro вида, потребляемой для изготовления /*-й продукции в количестве Xj\ через Y_i — выпуск конечной продукции i-ro вида.

Потребность в производстве продукции i-ro вида (валовый выпуск) равна сумме промежуточного и конечного продукта:

У=1

Обозначим через а,ц — норму расхода продукции i-ro вида на производство продукции ;'-го вида (а = хц/Xj). Это так называемый коэффициент прямых затрат. Тогда

или в матричной форме:

$$X = A \cdot X + У.$$

Из этого балансового уравнения можно найти:

1) валовый выпуск продукции путем умножения матрицы коэффициентов полных затрат на вектор конечной продукции:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot У;$$

2) распределение продукции между цехами путем умножения коэффициентов прямых затрат на валовый выпуск:

Хц - ayXj.

Пример 2. Три цеха предприятия выпускают продукцию трех видов. Часть продукции идет на внутреннее потребление, остальная является конечным продуктом. Составить межпродуктовый баланс производства и распределения продукции, если известны коэффициенты прямых затрат и конечный продукт (табл. 83):

Таблица 83

Производящие цехи	Потребляющие цехи			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	232,6	51	291,8	200	775,3
2	155,1	255	0	100	510,1
3	232,6	51	145,9	300	729,6
Итого	620,3	357	437,7	600	2015

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Решение. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} X_1 = 0,3X_1 + 0,1X_2 + 0,4X_3 + 200, \\ X_2 = 0,2X_1 + 0,5X_2 + 0,0X_3 + 100, \\ X_3 = 0,3X_1 + 0,1X_2 + 0,2X_3 + 300. \end{cases}$$

Валовая продукция цехов: $X_1 = 775,3$; $X_2 = 510,1$; $X_3 = 729,6$.

Распределение продукции между цехами на внутреннее потребление:

$$x_{11} = 0,3 \cdot 775,3 = 232,6; \; x_{12} = 0,1 \cdot 510,1 = 51;$$
$$x_{13} = 0,4 \cdot 729,6 = 291,8 \text{ и т. д.}$$

12.5. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Производственные функции устанавливают соотношение между затратами ресурсов и выпуском продукции. Они широко применяются в различных экономических задачах: макромоделирование, модели «затраты–выпуск», производственное планирование и др.

Производственная функция может представляться в математическом, графическом, табличном виде или в словесном правиле вычисления. Общий вид математической производственной функции

$$Y = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

где Y — выпуск продукции; x_n — выделяемое количество производственного ресурса вида i. Функция f может быть представлена в алгоритмическом, табличном или аналитическом виде. Типовыми вариантами ее выражения являются зависимости вида

$$Y = \sum f_i(x_i); \quad Y = \prod_i f_i(x_i),$$

где каждая из составляющих вычисляется как функция одного вида ресурса. В качестве основных видов ресурсов в составе производственных функций используют численность работающих, стоимость основных фондов, вкладываемые материальные ресурсы, энергетические затраты и т. п.

В простейшем случае выпуск продукции связывают только с численностью работающих L или стоимостью основных фондов K соотношениями:

$$Y = aL; \; Y = bk,$$

где a — производительность труда; b — фондоотдача.

Однако подобные производственные функции не позволяют учесть взаимозаменяемость и взаимовлияние ресурсов, в то время как на практике недостаток одного вида ресурсов обычно восполняется повышением расхода других. Этот недостаток исключен в производственной функции вида

$$Y = Y_0 L^{\alpha} K^{\beta}; \quad Y = Y_0 (K / K_0)^{\beta} (L / L_0)^{\alpha}.$$

Эта функция называется **функцией Кобба–Дугласа.** Отношения Y/Y_0, K/K_0, L/L_0 называют **индексами** соответствующих величин.

Дальнейшее совершенствование производственных функций обеспечивают введением в них фактора времени для учета тенденции ухудшения показателей оборудования с повышением срока его службы и положительного воздействия мероприятий по совершенствованию технологии и организации производства.

В составе производственной функции фактор времени может быть в виде корректирующего множителя, например $e^{\lambda t}$ или $(1 - e^{-\lambda t})$, а также запаздывания между временным интервалом вложения ресурсов и получения отдачи в виде прироста выпуска продукции.

Оценка влияния научно-технического прогресса через время не вскрывает материальной основы мероприятий, поэтому один из вариантов производственной функции предусматривает расчет воздействия научно-технического прогресса через затраты на развитие науки и техники $Э$, повышение квалификации работающих P:

$$Y = Y_0 L^{\alpha} K^{\beta} Э^{\gamma} p^{\varepsilon}.$$

Стремление к более содержательному моделированию процессов производства, учитывающему специфические особенности их реализации в объектах различного уровня, обусловливает появление разнообразных типов производственных функций. Чаще всего они являются усовершенствованными модификациями функции Кобба-Дугласа. В условиях конкретного предприятия производственную функцию можно реализовать как набор организационно-технических мероприятий.

Использование производственной функции в составе модели хозяйственного расчета позволяет рассмотреть изменение показателей предприятия во времени (накопление необходимой суммы капитальных ресурсов, изменение фонда оплаты труда, влияние выделяемых ресурсов на изменение объема производства и т. п.). Распределение хозрасчетного дохода в t-м году выполняется через производственную функцию, что предопределяет выпуск продукции в $(t + 1)$-м году. Тем самым закладывается основа для получения хозрасчетного дохода на $(t + 1)$-й год и обеспечивается последующий рекуррентный расчет.

12.6. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ЭПИДЕМИИ

За многие годы существования человечества огромное число людей погибло от различных эпидемий. Чума, холера, грипп и некоторые другие болезни нередко поражали значительные массы людей. Для того чтобы иметь возможность бороться с эпидемиями, т. е. своевременно применять те или иные медицинские мероприятия (карантины, вакцинации и т. п.), необходимо уметь сравнивать эффективность этих мероприятий. Сравнить же их можно только в том случае, если есть возможность предсказать, как при том или ином мероприятии будет меняться ход эпидемии, т. е. как будет меняться число заболевших. Отсюда возникает необходимость в построении модели, которая могла бы служить целям прогноза.

Для простоты мы будем рассматривать последствия самого простого мероприятия — естественный ход эпидемии.

Модель эпидемии может включать влияние факторов различных уровней. Так, можно учесть законы, управляющие деятельностью бактериальных клеток, степень восприимчивости к инфекции отдельных людей, когда заболевший становится источником инфекции, вероятности встречи носителей инфекции со здоровыми людьми и многие другие факторы. Иными словами, полная модель эпидемии должна затронуть области, изучаемые по меньшей мере тремя науками: микробиологией, медициной и социальной психологией.

Так как нашей целью является лишь создание иллюстративной модели, то здесь мы абстрагируемся от многих факторов. Тем не менее даже в такой грубой модели удается воспроизвести обычно наблюдаемое в эпидемиях явление —

сначала число заболевших растет, а начиная с некоторого момента оно уменьшается.

Пусть имеется N здоровых людей, и в момент времени $t = 0$ в эту группу попадает один заболевший человек (источник инфекции). Будем предполагать, что никакого удаления заболевших из группы не происходит (нет ни выздоровления, ни гибели, ни изоляции). Считаем также, что человек становится источником инфекции сразу же после того, как он сам заразится.

Обозначим число источников инфекции в момент времени t через $x(t)$, а число могущих заболеть — через $y(t)$ (очевидно, что $x(t) + y(t) = N + 1$ в любой момент времени).

При $t = 0$ выполняется условие $x(0) = 1$.

Рассмотрим интервал времени от t до $t + \Delta t$, где Δt — малая величина. Сколько новых больных появится за этот промежуток времени? Можно предположить, что их численность будет пропорциональна величине Δt, а также числу встреч здоровых и заболевших людей, т. е. произведению величин $x(t)$, $y(t)$, т. е.

$$\Delta x \approx \alpha x(t) \cdot y(t) \cdot \Delta t \text{ или } \Delta x \approx \alpha x(t) \cdot [N + 1 - x(t)]\Delta t,$$

где α — коэффициент пропорциональности.

Устремляя Δt к нулю, получим в пределе

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x[W + 1 - x].$$

Полученное дифференциальное уравнение вместе с условием $x(0) = 1$ определяет функцию $x(t)$ — численность заболевших в момент времени t.

Решим это уравнение. Для этого введем новую неизвестную функцию $u(t)$, связанную с функцией $x(t)$ соотношением

$$\frac{1}{x(t)} = u(t).$$

Дифференцируя это тождество, получаем

$$-\frac{1}{x^2(t)}\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}.$$

Используя последние два соотношения, преобразуем дифференциальное уравнение к виду

$$\frac{du}{dt} = -\alpha(N+1)u(t) + \alpha.$$

Общее решение этого уравнения может быть представлено в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$u(t) = Ce^{-\alpha(N+1)t} + \frac{1}{1+N},$$

где C — произвольная постоянная.

Отсюда

$$x(t) = xt = \frac{N+1}{Ne^{-\alpha(N+1)t} + 1}.$$

Так как при $t = 0$ значение $x(t) = 1$, то для определения величины C имеем уравнение

$$1 = \frac{1}{C + \frac{1}{N+1}}, \text{ откуда } C = \frac{N}{N+1}.$$

Окончательно

$$x(t) = \frac{N+1}{Ne^{-\alpha(N+1)t} + 1}.$$

Проанализируем полученную формулу.

Полагая $t = 0$, как и следовало ожидать, получаем $x(0) = 1$. При возрастании t знаменатель дроби убывает, т. е. $x(t)$ увеличивается. Это соответствует нашим представлениям, так как, согласно им, число заболевших может только увеличиваться.

Интересно выяснить, как меняется скорость увеличения числа больных. Для решения этого вопроса нужно изучить величину

$$\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{(N+1)^3\alpha^2 N[Ne^{-2\alpha(N+1)t} - e^{-\alpha(N+1)t}]}{(Ne^{-\alpha(N+1)t} + 1)^3}.$$

Числитель дроби обращается в нуль при

$$t = \frac{\ln N}{\alpha(N+1)}.$$

Таким образом, когда

$$t \in \left[\frac{\ln N}{\alpha(N+1)}\right], \text{ величина } \frac{d^2x}{dt^2} > 0,$$

а когда

$$t \in \left[\frac{\ln N}{\alpha(N+1)}, \infty\right], \text{ величина } \frac{d^2x}{dt^2} < 0.$$

Следовательно, функция dx/dt — скорость возрастания числа заболевших — растет вплоть до момента

$$t = \frac{\ln N}{\alpha(N+1)},$$

а затем убывает.

Этот результат согласуется с экспериментальными данными, так как известно, что в начале эпидемии число заболевших резко возрастает, а впоследствии скорость распространения инфекции снижается.

ГЛАВА 13

МОДЕЛИ РЕГИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ

То, что широкая дорога для одного, для другого — катастрофа.

Джалалад-дин Руми

У **одного человека не выло ндручных** ЧАСОВ, НО ЗАТО ДОЛЛА **вниселн точные плетенные** ЧАСЫ, **которые он** ИНОГДА ЗАБЫВАЛ ЗАВОДИТЬ. ОДНАЖДЫ, ЗАБЫВ В **очередной рдз здвести** ЧАСЫ, **он отпрлвнлея в гости к своему другу, провел у того вечер,** А **вернувшись доллой, суллел прдвнльно** ПОСТАВИТЬ ЧАСЫ. КАКИ.И **оврдзолл ел\у** УДАЛОСЬ **это сделдть, если вре.ия в пути злрднее известно не выло?**

СТАРИННАЯ ЗАДАЧА

13.1. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ РЕГИОНА

На развитие предпринимательства в регионе и региональной экономики в целом оказывают влияние множество факторов: природные условия и природные ресурсы, демографический фактор, сложившаяся структура хозяйственного комплекса, развитость финансово-банковской системы, конъюнктура региональных, национальных и мировых рынков ресурсов и сбыта готовой продукции.

Для составления плана развития региона необходимо выявить влияние таких факторов на показатели экономики региона в будущем. Но определить точные количественные зависимости между показателями и влияющими на них факторами не представляется возможным, поэтому составляют прогнозы.

Научно обоснованные прогнозы дают возможность региональным органам управления формулировать сценарии развития отраслей, технического прогресса, размещения производительных сил, народонаселения, рабочей силы, расширения сырьевой базы, совершенствования инфраструктуры .

В разработке прогнозов используют данные за прошедшие периоды и некоторые гипотезы на будущее.

Пусть в простейшем случае значение y_t показателя y в t-м году (например, объемы промышленного или сельскохозяйственного производства) зависит только от значений этого показателя в предыдущие годы. Тогда можно записать зависимость

Ух = V-iVt-i + +••'«•+ ◦кУг-к>

где y_t — теоретическое значение показателя y в t-м году; $y_{t-1}, \dots, y_{t-k}$ — фактические значения показателя y за предыдущие годы $t-1, t-2, \dots, t-k$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — неизвестные коэффициенты, определяемые по методу наименьших квадратов на основании данных за прошлые годы.

Для определения коэффициентов составляют сумму квадратов отклонений за m лет $(m > 2k)$

$$L = \sum_{t=k+1}^{m} (\alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_k y_{t-k} - y_t)^2$$

и систему уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 2 \sum_{t=k+1}^{m} (\alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_k y_{t-k} - y_t) y_{t-i} \ (i = \overline{1, k}),$$

которая после элементарных преобразований превращается в систему нормальных уравнений

$$\alpha_1 \sum_{t=k+1}^{m} y_{t-1} y_{t-i} + \alpha_2 \sum_{t=k+1}^{m} y_{t-2} y_{t-i} + \dots +$$
$$+ \alpha_k \sum y_{t-k} y_{t-i} = \sum_{t=k+1}^{m} y_t y_{t-i} \ (i = \overline{1, k}),$$

решаемую относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ известными методами.

Если значения показателя y_t в t-м году зависят от значения показателя y_{t-1} в предыдущем году и факторов $x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}$ в t-м году, то эту зависимость можно записать в виде

$$y_t = y_{t-1} + f(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \tag{1}$$

где функцию f считают известной, а параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ вычисляют по методу наименьших квадратов.

Определим далее значение y_{t-1} через y_{t-2}, т. е.

$$y_{t-1} = y_{t-2} + f(x_{1,t-1}, x_{2,t-2}, \dots, x_{n,t-n}; \alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_k),$$

или

$$y_1(t) = y(t) = y(t-1) + f(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) =$$
$$= y(t-2) + f(x_{1,t-1}, x_{2,t-2}, \dots, x_{n,t-n}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) +$$
$$+ f(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) =$$
$$= y(t-2) + \sum_{j=t-1}^{t} f(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k).$$

Поступая аналогично r раз, получим рекуррентное соотношение

$$y_r(t) = y(t) = y(t-r-1) + \\ + \sum_{j=t-r}^{t} f(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k). \tag{2}$$

При $r = t - 1$ из последней формулы следует:

$$y(t) = y(0) + \sum_{j=1}^{t} f(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \tag{3}$$

где $y(0)$ — начальное значение $y(t)$ при $t = 0$.

Формулы (1)–(3) целесообразно использовать, когда наиболее важным является предплановое значение показателя y_{t-1}.

13.2. МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗМЕЩЕНИЯ РЕГИОНАЛЬНОГО ЗАКАЗА ПО ПРЕДПРИЯТИЯМ

Региональный заказ включает объемы производства определенных изделий по номенклатуре и в объемах, определяемых потребностями регионального развития. Исходя из потребностей социальной сферы и других непромышленных секторов региона, его центр размещает в плановом периоде на промышленных предприятиях производство каждого вида продукции регионального заказа в объеме $\alpha_i (i = \overline{1, n})$.

Выпуск каждого вида продукции характеризуется различной эффективностью и затратами ресурсов.

Пусть имеется R предприятий промышленности региона, пронумерованных в определенном порядке $r = \overline{1, R}$. Каждое r-е предприятие располагает определенными ресурсами s-го вида в размере b_{rs}. Ввиду специфических условий нормы затрат ресурсов и эффективность производства продукции на каждом предприятии могут быть различными.

Обозначим: $б_{irs}$ — норма затрат ресурса s-го вида ресурса на r-м предприятии на производство единицы продукции i-го вида; p_{ir} — прибыль r-го предприятия от производства и реализации единицы i-го вида продукции регионального заказа.

Будем также учитывать, что на каждом предприятии возможности выпуска продукции ограничены нижним $\underline{N_i}$ и верхним $\overline{N_i}$ пределами.

В интересах регионального центра таким образом распределить производство регионального заказа по предприятиям, чтобы было обеспечено получение максимальной суммарной прибыли всех предприятий, так как при этом будут обеспечены и максимальные налоговые поступления в региональный бюджет. Таким образом, требуются найти такие объемы x_{ir} выпуска продукции регионального заказа, при которых:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{R} p_{ir} x_{ir} \to \max; \tag{4}$$

$$\sum_{r=1}^{R} x_{ir} = \alpha_i \ (i = \overline{1, n}); \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{irs} x_{ir} \le b_{rs} \ (r = \overline{1, R}; s = \overline{1, S}); \tag{6}$$

$$\underline{N}_{ir} \le x_{ir} \le \overline{N}_{ir} \ (i = \overline{1, n}; r = \overline{1, R}). \tag{7}$$

Здесь целевая функция (4) предусматривает возможность получения максимальной прибыли от размещения производства и реализации регионального заказа. Ограничением (5) накладывается требование соответствия общего выпуска по всем предприятиям региональной потребности; ограничением (6) — по имеющимся в распоряжении регионального центра и предприятий ресурсам; ограничением (7) — по объемам производства продукции в соответствии с производственными и технологическими возможностями каждого предприятия.

Модель (4)–(7) является распределительной задачей линейного программирования.

Пример. Региональным центром установлена потребность в производстве трех видов продукции ($i = 1, 2, 3$) регионального заказа: $\alpha_1 = 100, \alpha_2 = 200, \alpha_3 = 150$ тыс. шт. Выпуск этих видов продукции следует распределить между двумя предприятиями $r = 1, 2$. Известны технико-экономические показатели и производственные возможности каждого из предприятий (табл. 84).

Таблица 84

Вид продукции	Нормы расхода ресурсов <Xi|«		Пределы производства продукции	Прибыль от реализации продукции, тыс. рубУед.		Нормы расхода ресурсов ап«		Пределы производства продукции		Прибыль от реализации продукции, тыс. рубУед.
	а,п	ааг	#п	*а	ра	0U21	а, 22	На		ра
1	2	0,5	20	80	35	1,5	0,8	0	50	30
2	4	5	0	50	50	4,5	4	20	200	55
3	3	2	20	160	40	3,2	2,5	0	50	36
Лимит ресурсов Ols, *bis*	570	330	–	–	–	960	840	–	–	–

В соответствии с исходными данными задача (4)–(7) перепишется в виде:

$$\max \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{R} p_{ir}x_{ir} = 35x_{11} + 50x_{21} + 40x_{31} + 30x_{12} + 55x_{22} + 36x_{32};$$

ограничения по выпуску продукции

$$x_{11} + x_{12} = 100;\ x_{21} + x_{22} = 200;\ x_{31} + x_{32} = 150;$$

ограничения по ресурсам для первого предприятия

$$2x_{11} + 4x_{21} + 3x_{31} \le 570;$$
$$0,5x_{11} + 5x_{21} + 2x_{31} \le 330;$$

ограничения по ресурсам для второго предприятия

$$1,5x_{12} + 4,5x_{22} + 3,2x_{32} \le 960;$$
$$0,8x_{12} + 4x_{22} + 2,5x_{32} \le 840;$$

ограничения по производственным и технологическим возможностям предприятий

$$20 \le x_{11} \le 80; \quad 0 \le x_{12} \le 50;$$
$$0 \le x_{21} \le 50; \quad 20 \le x_{22} \le 200;$$
$$20 \le x_{31} \le 160; \quad 0 \le x_{32} \le 50.$$

Оптимальное решение задачи: $x_{11}^0 = 60$; $x_{12}^0 = 40$; $x_{21}^0 = 0$; $x_{22}^0 = 200$; $x_{31}^0 = 150$; $x_{32}^0 = 0$; $P^0 = 20,3$ млн руб.

13.3. МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЗЕМЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ

Основными ресурсами сельскохозяйственного предприятия являются земельные участки. Урожайность и, следовательно, уровень рентабельности сельского хозяйства региона зависят от видов участков земли, выделяемых под сельскохозяйственные культуры. Поэтому в целях повышения эффективности землепользования необходимо наилучшим образом распределить земельные ресурсы региона под выращиваемые культуры.

Обозначим: i — номер земельного участка; m — количество всех участков земли региона; j — вид сельскохозяйственной культуры; n — количество всех видов сельскохозяйственных культур, на производстве которых специализируется сельское хозяйство региона; b_i — размер i-го участка земли $(i = \overline{1, m})$, га; α_j — площадь, отводимая под j-ю культуру, га; c_{ij} — себестоимость обработки единицы площади участка под j-ю культуру; x_{ij} — искомая площадь, отводимая на i-м участке под возделывание j-й культуры.

Тогда задача оптимизации использования земельных ресурсов, т. е. размещения и структуры сельскохозяйственных культур, в общем виде запишется

$$C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \alpha_j \ \left(j = \overline{1,n}\right), \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \sum_{i=1}^{m} b_i. \end{cases}$$

Данная модель относится к виду транспортных задач линейного программирования.

Если учесть в ней фактор урожайности культур, то она перепишется в виде

$$C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}x_{ij} \ge N_j \ (j = \overline{1,n}) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_i \ (i = \overline{1,m}); \\ x_{ij} \ge 0 \ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}). \end{cases}$$

Здесь α_{ij} — урожайность j-й культуры на i-м участке земли; N_j — потребность региона в j-й культуре.

В таком виде эта модель — распределительная задача линейного программирования.

13.4. НАЛОГОВАЯ ПОЛИТИКА

Налоговые поступления являются главной доходной частью бюджетов всех уровней — федерального, регионального и местного. На долю налоговых поступлений приходится свыше 80% всех поступлений в бюджет. Так как различные налоги формируют бюджеты разных уровней, а федеральные налоги распределяются между бюджетами в разных соотношениях, то и налоговые поступления в доходную часть бюджетов разных уровней будут по объему различными. При этом следует иметь в виду, что налоговая политика должна исходить из принципа стимулирующей функции налогообложения. Это значит, что должно быть найдено оптимальное соотношение между различными видами налогов (на прибыль, имущество, землю и др.), позволяющее максимизировать величину суммарных отчислений в бюджет. Такое соотношение может быть найдено, например, из реализации следующей экономико-математической модели:

$$\max F(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_j x_j Z_j;$$

$$\begin{cases} \alpha_j \le x_j \le \beta_j \left(j = \overline{1, n}\right); \\ \sum_{j=1}^{n} x_j Z_j \ge D, \end{cases}$$

где n — количество видов налогов, отчисляемых в региональный бюджет субъектами хозяйствования; λ_j — значимость (например, социально-экономическая значимость, приоритетность или ранг) j-го вида налога в налоговой и бюджетной политиках региона,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1;$$

x_j — независимая переменная, искомый размер ставки j-го вида налога; Z_j — налогооблагаемая база региона (всех субъектов хозяйствования) по j-му виду налога; α_j, β_j — соответственно нижний и верхний пределы ставки j-го вида налога, устанавливаемые региональным центром, исходя из компромисса разнонаправленных собственных экономических интересов и экономических интересов субъектов хозяйствования; D — величина доходной части регионального бюджета, формируемая за счет налоговых поступлений и планируемая (прогнозируемая) региональным центром, исходя из стратегии своего развития.

Определенную сложность в реализации этой модели представляет установление ранга каждого вида налога и допустимых пределов налоговых ставок. Здесь можно было бы руководствоваться следующими соображениями. Так, для регионов с развитыми промышленными, аграрными или агропромышленными отраслями наиболее значимым, по-видимому, представляется налог на прибыль, по которому обеспечивается наибольшая доля всех поступлений в региональные бюджеты. Для регионов, характеризующихся благоприятным экономико-географическим положением, отсутствием или ограниченностью свободных от жилой и промышленной застройки территорий, особую значимость будет иметь налог на землю. Для регионов с крупнейшими научными, промышленными, историческими и культурными

центрами — налог на имущество. Заметим, что в данной модели приведенная целевая функция не является единственно возможной. Действительно, применительно к регионам, доход бюджетов которых формируется за счет налоговых поступлений одинаковой значимости

$$\left(\lambda_j = 1 / n \left(j = \overline{1, n}\right)\right)$$

или по которым весьма сложно установить приоритетность тех или иных видов налогов, может использоваться целевая функция вида

$$\max F'(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j Z_j.$$

В то же время в других регионах особое значение придается собственным источникам экономического роста. Поэтому естественно их стремление к полноте собираемости налогов. В этом случае функционал модели можно представить квадратичной функцией, отображающей требование минимизации суммы неувязок величин налогов, собираемых по проектируемым ставкам, от прогнозируемого дохода бюджета

$$\min F''(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j Z_j - D_j)^2},$$

где D_j — планируемая (прогнозируемая) доходная часть бюджета региона, формируемая за счет поступлений налога j-го вида,

$$\sum_{j=1}^{n} D_j \ge D.$$

Данная концептуальная модель может быть расширена путем дифференцированного подхода к налогообложению каждой группы хозяйствующих субъектов, отличающихся социальной значимостью, эффективностью деятельности, приоритетностью в достижении целей стратегического развития. Что касается пределов налоговых ставок, то возможность их установления можно показать на примере налога на прибыль.

Влияние изменения ставки этого налога на величину дохода бюджета субъекта федерации и прибыли хозяйствующих субъектов весьма существенно: с увеличением ставки увеличиваются поступления в бюджет, но уменьшается прибыль хозяйствующих субъектов. Увеличение ставки налога на прибыль не может быть значительным. Начиная с какой-то ставки, доход бюджета будет снижаться, так как хозяйствующим субъектам становится экономически невыгодно производить продукцию или расширять производство при этой ставке. И, наоборот, с уменьшением ставки налога на прибыль растет прибыль хозяйствующих субъектов и уменьшается доход бюджета субъекта федерации. Однако при некоторой малой ставке налога на прибыль доход бюджета может увеличиться за счет вовлечения в производство других предприятий, роста объемов производства и расширения выпуска продукции на тех же самых предприятиях. В конечном счете выбор рационального уровня ставки налога на прибыль должен состоять в нахождении компромисса между требованиями по обеспечению регионального бюджета и условиями создания быстрого и устойчивого развития той или иной отрасли производства или сферы услуг. Это типичная задача «компромисса».

Здесь может быть применен следующий подход к установлению оптимальной ставки налога на прибыль. В этом подходе полагается, что в плановом периоде m хозяйствующих субъектов производят нужную для региона (области, района) продукцию или выполняют необходимые услуги. Пусть известны прогнозируемые или планируемые параметры: B_i — выручка от реализации продукции или услуг (без учета НДС) i-го хозяйствующего субъекта в плановом периоде; C_i — затраты на производство и реализацию продукции или услуг i-го хозяйствующего субъекта в плановом периоде; K_i — капитал и резервы i-го хозяйствующего субъекта в плановом периоде; α — норма прибыли на капитал (с учетом реальной нормы банковского процента, ожидаемого темпа инфляции и риска потери капитала), меньше которой хозяйствующий субъект не может получить собственную прибыль, чтобы экономически эффективно функционировать; x — искомая ставка налога на прибыль в плановом периоде. Тогда доход регионального бюджета от m хозяйствующих субъектов при линейной зависимости налога на прибыль от величины прибыли составит

$$\Pi_б = \sum_{i=1}^{m}(B_i - C_i)x,$$

а чистая прибыль каждого хозяйствующего субъекта

$$ЧП_i = (B_i - C_i)(1 - x).$$

Эффективной деятельности хозяйствующего субъекта соответствует условие

$$\frac{ЧП_i}{K_i} \geq \alpha.$$

Подставив это выражение в последнее неравенство, получим:

$$\frac{(B_i - C_i)(1 - x)}{K_i} \geq \alpha,$$

откуда

$$x \leq 1 - \frac{\alpha K_i}{B_i - C_i}.$$

Нетрудно заметить, что при

$$x = \min_i\left(1 - \frac{\alpha K_i}{B_i - C_i}\right)$$

любой хозяйствующий субъект будет иметь прибыль на капитал в объеме не меньшем, чем величина α. Общая прибыль, получаемая хозяйствующими субъектами, будет максимальная, а бюджет получит минимум доходов.

Если принять

$$x = \max_i\left(1 - \frac{\alpha K_i}{B_i - C_i}\right),$$

то любой из хозяйствующих субъектов будет иметь прибыль на капитал в объеме не большем, чем величина α. Размер прибыли, получаемой ими, будет минимальный, а поступления в доход бюджета — максимальны. Однако большинство или даже все хозяйствующие субъекты в дальнейшем не будут заинтересованы осуществлять свою деятельность с такой ставкой налога на прибыль.

Таким образом, допустимая ставка налога на прибыль находится в интервале ее значений

$$\min_i\left(1 - \frac{\alpha K_i}{B_i - C_i}\right) \leq x \leq \max_i\left(1 - \frac{\alpha K_i}{B_i - C_i}\right).$$

Значение ставки налога на прибыль может быть оптимизировано в два этапа:

- определяется интервал изменения ставки, в котором прибыль, поступающая в бюджет и остающаяся в распоряжении хозяйствующих субъектов, достигает максимума;
- в найденном интервале оптимальных ставок находится такое значение ставки, при котором достигается компромисс между регионами и хозяйствующими субъектами.

Данная налоговая ставка зависит и от допустимой нижней границы нормы прибыли на капитал с учетом риска хозяйствования. Она определяется банковской процентной ставкой. Если ставка налога на прибыль устанавливается на длительный период, то норма прибыли на капитал изменяется вместе с изменением банковской процентной ставки. Поэтому при обосновании ставки налога на прибыль необходимо, по крайней мере, учитывать вероятность реализации фактически достигнутой нормы прибыли на капитал в плановом периоде. Первый этап нахождения оптимального интервала ставки налога на прибыль может быть осуществлен на основе решения следующей задачи.

Найти такие значения неизвестных x, y, z, при которых

$$f(x,y,z) = \sum_{i=1}^{m}(B_i - C_i)(1-x)y_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}(B_i - C_i)xy_i = \sum_{i=1}^{m}(B_i - C_i)y_i \to \max;$$

$$\begin{cases} \dfrac{(B_i - C_i)(1-x)y_i}{K_i} + z_i \geq \alpha; \\ y_i = \begin{cases} 0, \text{ если } z_i > 0; \\ 1, \text{ если } z_i = 0; \end{cases} \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x}. \end{cases}$$

Здесь $\bar{x}$ — верхняя граница ставки налога на прибыль, установленная законодательством; z_i — недостающая (недополучение) до нижней границы x часть прироста чистой прибыли на капитал i-го хозяйствующего субъекта при искомой ставке налога на прибыль x; y_i — булева переменная, показывающая, что $y_i = 1$, если прибыль хозяйствующего субъекта на капитал достигает значения α, поэтому $z_i = 0$; $y_i = 0$ — не достигает значения α, следовательно $z_i > 0$.

Сформулированная задача относится к классу целочисленного нелинейного программирования. Так как число вариантов невелико (в нашей задаче, например, всего пять), то их перебор не представит особых трудностей. В результате реализации первого этапа формируется некоторое ограниченное множество оптимальных (с точки зрения выбранного критерия) значений ставок налога на прибыль. Из этого множества может быть выбрано такое значение ставки, при котором удовлетворяются интересы бюджета региона и хозяйствующих субъектов. Здесь возможны следующие подходы.

1. Устанавливается значение ставки налога на прибыль x^*, обеспечивающее справедливый компромисс

$$x^* = x_{\min} + 0{,}5(x_{\max} - x_{\min}),$$

где $x_{\min}$, $x_{\max}$ — соответственно нижняя и верхняя границы ставки налога на прибыль, при которой обеспечивается максимальная прибыль; 0,5 — доля прибыли, поступающей в бюджет региона, в прибыли, остающейся в распоряжении хозяйствующих субъектов.

2. Устанавливается значение ставки налога на прибыль, обеспечивающее компромисс в пользу бюджета региона

$$x^* = x_{\max}.$$

Компромисс решается в пользу региона, если выпуск продукции соответствующих хозяйствующих субъектов удовлетворяет потребности региона.

3. Устанавливается значение ставки налога на прибыль, обеспечивающее компромисс в пользу хозяйствующих субъектов

$$x^* = x_{\min}.$$

Компромисс решается в пользу предприятий, если выпуск их продукции не удовлетворяет потребности региона.

Так как вариация изменения размера налога на прибыль в рамках оптимальной политики незначительна, то, по-видимому, целесообразно устанавливать значение ставки налога на прибыль в рамках справедливого компромисса.

Аналогично может быть сформулирована задача компромиссного подхода к установлению пропорций между всеми составляющими поступлений в бюджет, регламентируемых налоговой политикой.

13.5. МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ НАБОРА СТРАТЕГИЧЕСКИХ ЗОН ХОЗЯЙСТВОВАНИЯ

Выбор стратегических зон хозяйствования (СЗХ) фирмы обусловливается следующими экономико-организационными предпосылками, формализованно представляемыми параметрами этого выбора (рис. 47).

Пусть известны: NPV_t — величина чистого дисконтированного дохода (ЧДД) фирмы, заявленного в качестве цели стратегического развития в каждом t-м периоде ($t \in T$, T — длительность периода стратегического развития); NPV_{ikt} — величина ЧДД, получаемая в результате выбора i-й СЗХ-фазы в k-м наборе $i = (\overline{1,N}; k = \overline{1,K}; t \in T)$; B_t — объем ресурсного потенциала фирмы, располагаемого в t-м периоде ($t \in T$); b_{ikt} — часть ресурсного потенциала фирмы, направляемая на экспансию i-й СЗХ-фазы k-го набора

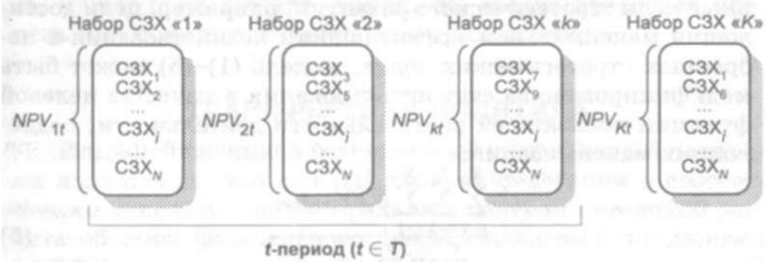


Рис. 47

в t-м периоде ($i = \overline{1, N}; k = \overline{1, K}; t \in T$); N — количество СЗХ-фаз фирмы, отождествляемых с ее миссией; K — количество допустимых вариантов набора СЗХ-фаз, отобранных при реализации имитационного алгоритма.

Тогда экономико-математическая модель выбора эффективных стратегических зон хозяйствования фирмы с распределением на период ее развития ресурсного потенциала может быть сформулирована:

$$NPV(x) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} NPV_{ikt}x_{ikt} \to \max; \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} NPV_{ikt}x_{ikt} \geq NPV_t \ (t \in T); & (2) \\ \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} b_{ikt}x_{ikt} \leq B_t \ (t \in T); & (3) \\ \sum_{k=1}^{K} x_{ikt} = 1 \ (i = \overline{1, N}; t \in T); & (4) \\ x_{ikt} = [1 \wedge 0] \ (i = \overline{1, N}; k = \overline{1, K}; t \in T), & (5) \end{cases}$$

где x_{ikt} — искомая булева переменная: $x_{ikt} = 1$, если в t-м периоде выбирается i-я СЗХ-фаза k-го набора и $x_{ikt} = 0$ — в противном случае.

Здесь целевая функция (1) отражает стремление фирмы к достижению максимального эффекта от реализации избранного набора ее СЗХ на протяжении всего периода стратегического развития; ограничение (2) отражает требование получения такой величины эффекта в течение каждого краткосрочного периода стратегического развития, которая была бы не меньше заявленной целями фирмы; ограничение (3) обусловлено ограниченностью ресурсного потенциала фирмы; ограничение (4) соответствует требованию выбора в каждом краткосрочном периоде только одного стратегического набора фирмы, в который входит i-я СЗХ-фаза.

В зависимости от предпочтений фирмы, преследующей иные цели стратегического развития, например, цели достижения максимальной эффективности хозяйствования в избранных стратегических зонах, модель (1)–(5) может быть модифицирована за счет использования в качестве целевой функции показателей рентабельности деятельности, подлежащих максимизации:

$$\frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} NPV_{ikt}x_{ikt}}{\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} J_{ikt}x_{ikt}}, \tag{6}$$

или $$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} \frac{NPV}{J_{ikt}}x_{ikt}, \tag{7}$$

или $$\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} \frac{NPV_{ikt}}{J_{ikt}}x_{ikt} \ (t \in T). \tag{8}$$

Выбор в качестве функционала любого из этих показателей приведет к необходимости решения дробно-линейной задачи дискретного программирования.

Модификация моделей (1)–(5) и (2)–(5) с функционалами (6), (7) или (8) может быть дополнена включением в них ограничений, отражающих требование достижения рентабельности деятельности на уровне не ниже внутренней нормы доходности $E_{\text{ВН}}$, например, ограничения вида

$$\frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} NPV_{ikt}x_{ikt}}{\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} J_{ikt}x_{ikt}} \geq E_{\text{ВН}}.$$

Здесь значение $E_{\text{ВН}}$ может быть установлено предприятием самостоятельно, например, на уровне среднеотраслевого индекса доходности или индекса доходности ближайшего конкурента. Значение $E_{\text{ВН}}$ может быть определено отдельно для каждой СЗХ либо для предприятия в целом как средневзвешенная величина.

Помимо показателя рентабельности деятельности, в зависимости от целей предприятия, в модели может быть использовано ограничение по показателю рентабельности продаж

$$\frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} NPF_{ikt}x_{ikt}}{\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} R_{ikt}x_{ikt}} \geq R_{\text{П}},$$

где R_{ikt} — величина приведенного дохода от хозяйственной деятельности в i-й СЗХ-фазе в k-м наборе ($i = \overline{1, N}$; $k = \overline{1, K}$; $t \in T$); в качестве нижнего предела рентабельности продаж $R_{\text{П}}$ может быть принят, например, среднеотраслевой уровень или показатель ближайшего конкурента.

13.6. ТРАНСФЕРТНАЯ ПОЛИТИКА

Исходной позицией региональной трансфертной политики является то, что каждый субъект федерации в соответствии с используемой федеральным центром методикой расчета объемов федерального фонда финансовой поддержки (ФФФП) получает свой объем трансферта на предстоящий период. Теперь перед субъектом федерации встает та же задача, что и перед федеральным центром — наилучшим образом распределить полученный им трансферт.

Региональный фонд трансфертных платежей должен распределяться по трем каналам: трансферт региональному центру, трансфертный фонд поддержки районов (муниципальных образований) и трансфертный фонд стимулирования районов. В обосновании объемов регионального фонда, направляемых на выравнивание бюджетов и стимулирование районов, может быть применен подход, основу которого составят следующие принципы.

1. Региональный трансферт делится на части, направляемые на цели выравнивания (1) и на стимулирование районов (2).

2. Стимулируются территории, у которых средний душевой доход не меньше среднего душевого расхода и не меньше среднего дохода региона, т. е. $D_i \geq P_i$ и $D_i \geq D$.

3. Стимулирующий трансферт распределяется между районами в соответствии с достигнутыми результатами их финансово-хозяйственной деятельности и деловой активности.

4. Выравнивающий трансферт распределяется между районами в соответствии с дефицитностью бюджетов этих территорий.

5. Региональный трансферт распределяется на две части, исходя из соотношения

$$x = \frac{(1-\beta)\mathrm{T_P}\sum_{i \in \mathrm{M_{CT}}} D_i'}{\beta \sum_i D_i'},$$

где x — искомый стимулирующий трансферт; $\mathrm{T_P}$ — региональный трансферт, подлежащий распределению между районами; $\mathrm{M_{CT}}$ — множество стимулируемых районов, у которых $D_i \geq P_i$ и $D_i \geq D$; β — оценка важности (полезности) 1 руб., направленного на выравнивание доходов бюджета районов ($0 \leq \beta \leq 1$); $(1-\beta)$ — оценка важности (полезности) 1 руб., направленного на стимулирование деятельности районов; $(1-\beta) / \beta$ — относительная оценка важности (полезности) 1 руб., направленного на стимулирование, по сравнению с 1 руб., вложенным в выравнивание.

Нетрудно заметить, что если $\beta = 1$, то $x = 0$, т. е. предпочтительно трансферт направлять только на выравнивание. Оценка β не может быть равной нулю, так как это означало бы, что весь трансферт направляется на стимулирование при отсутствии убыточных районов.

Если $\beta = 0{,}5$, то это означает, что региональный трансферт распределяется пропорционально доходам стимулируемых и выравниваемых районов.

Оценка β может быть определена экспертным путем.

Предположим, что стимулирующий трансферт $\mathrm{T_C} = x$ и необходимо распределить этот трансферт между районами, у которых $D_i \geq P_i$ и $D_i \geq D$. В этом случае будут возможны два подхода: первый — долевой, второй — оптимизационный.

При первом подходе стимулирующий трансферт можно распределять, например, пропорционально доходу, получаемому каждым районом:

$$\mathrm{T_{Ci}} = \mathrm{T_C} D_i' / \sum_i D_i'.$$

При оптимизационном подходе к распределению стимулирующего трансферта можно прийти к следующей задаче:

$$\frac{1}{P}\sum_i D_i x_i \to \max$$

или

$$\frac{\lambda}{A}\sum_i D_i x_i \to \max,$$

или

$$\left(\frac{1}{P}+\frac{\lambda}{A}\right)\sum_i D_i x_i \to \max,$$

$$\begin{cases} \sum_i x_i \leq \mathrm{T_C}; \\ \underline{b}_i \leq x_i \leq \overline{b}_i, \end{cases}$$

где $\underline{b}_i, \overline{b}_i$ — соответственно нижняя и верхняя границы допустимого значения стимулирующего трансферта, выделяемого i-му району; рассчитываются из региональных приоритетов или устанавливаются как

$$\underline{b}_i = \min\left(\mathrm{T_C} D_i / \sum_i D_i;\ \mathrm{T_C} D_i / \sum_i P_i;\ \frac{\mathrm{T_C} D_i / P_i}{\sum_i D_i / P_i}\right),$$

$$\overline{b}_i = \max\left(\mathrm{T_C} D_i / \sum_i D_i;\ \mathrm{T_C} D_i / \sum_i P_i;\ \frac{\mathrm{T_C} D_i / P_i}{\sum_i D_i / P_i}\right).$$

Реализация такой модели особых трудностей не представит. Сущность алгоритма моделирования будет состоять в следующем.

1. Упорядочиваются районы по убыванию доходов по бюджету, т. е. строится последовательность:

$$D_{i1} \geq D_{i2} \geq \ldots \geq D_{ik} \geq \ldots \geq D_{im}\ (i = \overline{1, m}).$$

2. Последовательно каждому району предоставляется стимулирующий трансферт в объеме

$$x_{ik} = \bar{b}_{ik}\ (k \le m)$$

до полного исчерпания допустимого значения регионального стимулирующего трансферта T_C. Последний в этой последовательности район получает трансферт в объеме

$$x_{ik} = T_C - \sum_{k=1}^{mk-1} x_{ik-1}.$$

Теперь рассмотрим особенности распределения регионального трансферта нуждающимся районам, т. е. тем территориям, у которых в отчетном периоде времени выполнялось условие $D_i \le P_i$ (D_i, P_i — средние душевые доходы и расходы в i-м районе).

Основная задача этого трансферта теперь состоит в выравнивании бюджетов территорий по средним душевым доходам. В дальнейшем этот вид трансферта назовем выравнивающим и обозначим через T_B.

Здесь наиболее предпочтителен (с точки зрения наличия информационной базы) критерий оптимальности

$$f(y) = \sqrt{\frac{1}{Pm}\sum_{i=1}^{m}(D_i + y_i - D)^2} \to \min, \qquad (8)$$

где m — число районов; D_i, D — соответственно средний душевой доход в i-м районе и регионе в целом; P — средний душевой расход в регионе; y_i — искомый выравнивающий трансферт на душу населения, направляемый i-му району.

Целевая функция — дисперсия (8) показывает, что суммарные отклонения (колеблемость) доходов, приходящихся на единицу расходов, от средней величины по всем районам должны быть минимальными. После преобразований целевая функция будет иметь вид:

$$f(y) = \sqrt{\frac{1}{Pm}[\sum_{i=1}^{m}(D_i - D)^2 + 2\sum_{i=1}^{m}(D_i - D)y_i + \sum_{i=1}^{m}y_i^2]} \to \min. \qquad (9)$$

Ограничение на допустимый объем выравнивающего трансферта региона достаточно очевидно:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \le \frac{T_B}{\sum_{i=1}^{m} Ч_i} = T'_B. \qquad (10)$$

Ограничения на объем выравнивающих трансфертов по районам устанавливаются обратно пропорционально доходам, расходам на 1 руб. доходов к расходам в виде:

$$\underline{b}_i \le y_i \le \bar{b}_i, \qquad (11)$$

где

$$\underline{b}_i = \min\left(\frac{T'_B / D_i}{\sum_i 1/D_i}; \frac{T'_B P_i / D_i}{\sum_i P_i / D_i}; \frac{T'_B / P_i}{\sum_i 1/P_i}\right);$$

$$\bar{b}_i = \max\left(\frac{T'_B / D_i}{\sum_i 1/D_i}; \frac{T'_B P_i / D_i}{\sum_i P_i / D_i}; \frac{T'_B / P_i}{\sum_i 1/P_i}\right).$$

Принципиально принятая обратно пропорциональная связь между параметрами позволяет отдавать приоритет в выравнивании бюджетам территорий с меньшими доходами, меньшими доходами на 1 руб. расходов и меньшими расходами.

Разумеется, выбранная приоритетность отнюдь не закрепляет порочный принцип «хуже работаешь — больше получишь», так как реализует принцип только выравнивающего трансферта.

Задача (9)–(11) относится к задачам квадратичного программирования с квадратичной целевой функцией и линейными ограничениями.

Пусть известны размеры трансферта и его распределение: $T = 60$; $T_C = 10$; $T_B = 50$ руб. (на одного человека). Известны также среднедушевые расходы и доходы по бюджету районов. По первой группе районов ($D_i \ge P_i$) эти величины соответственно составляют (руб.): $D_1 = 100$, $P_1 = 95$; $D_2 = 120$, $P_2 = 110$; $D_3 = 250$, $P_3 = 230$; $D_4 = 400$, $P_4 = 385$. По второй группе районов ($D_i < P_i$): $D_5 = 100$, $P_5 = 120$; $D_6 = 110$, $P_6 = 125$; $D_7 = 125$, $P_7 = 140$; $D_8 = 130$, $P_8 = 140$; $D_9 = 150$, $P_9 = 170$. Среднедушевой доход регионального бюджета $D = 123$ руб.

Сущность алгоритма распределения регионального стимулирующего трансферта между районами будет заключаться в следующих этапах.

Рассчитывается объем допустимого стимулирующего трансферта районов, исходя из принятых ранее трех вариантов его распределения, пропорционально доходам, расходам и доходам на 1 руб. (см. табл. 85).

1. Составляются ограничения вида $\underline{b}_i \le x_i \le \bar{b}_i$, т. е.

$$1{,}149 \le x_1 \le 2{,}465;\ 1{,}341 \le x_2 \le 2{,}554;$$
$$2{,}547 \le x_3 \le 2{,}874;\ 2{,}434 \le x_4 \le 4{,}695.$$

2. Районы упорядочиваются по уменьшению объема дохода:

$$D_4 \ge D_3 \ge D_2 \ge D_1.$$

Таблица 85

Районы	Объем допустимого трансферта		
	$\left(D_i / \sum_i D_i\right) \cdot \text{Т}_\text{С}$	$\left(P_i / \sum_i P_i\right) \cdot \text{Т}_\text{С}$	$\left[\left(D_i / P_i\right) / \sum_i Д_i / P_i\right] \cdot \text{Т}_\text{С}$
1	1,149	1,158	2,465
2	1,379	1,341	2,554
3	2,874	2,805	2,547
4	4,598	4,695	2,434

Таблица 86

Районы	Объем допустимого трансферта		
	$\left(1 / D_i / \sum_i 1 / D_i\right) \cdot \text{Т}_\text{В}$	$\left(P_i / D_i / \sum_i P_i / D_i\right) \cdot \text{Т}_\text{В}$	$\left(1 / P_i / \sum_i 1 / P_i\right) \cdot \text{Т}_\text{В}$
5	13,20	10,58	11,10
6	11,09	10,02	11,10
7	9,76	9,88	9,72
8	9,38	9,50	9,75
9	8,13	9,994	8,33

3. Распределяется стимулирующий региональный трансферт $\text{Т}_\text{С} = 10$ на душу населения между районами:

$$x_4 = 4{,}695;\ x_3 = 2{,}874;$$
$$x_2 = 10 - (4{,}695 + 2{,}874) = 2{,}431;\ x_1 = 0.$$

Таким образом, районы с учетом трансферта будут иметь доход:

$$D_1 = 100\ \text{Ч}_1;\ D_2 = 122{,}431\ \text{Ч}_2;$$
$$D_3 = 252{,}874\ \text{Ч}_3;\ D_4 = 404{,}695\ \text{Ч}_4.$$

Выравнивающий трансферт распределяется в следующем порядке.

Рассчитываются объемы допустимого выравнивающего трансферта районов, исходя из трех вариантов его распределения (табл. 86).

Составляются ограничения вида: $\underline{b}_i \le y_i \le \bar{b}_i$ $(i = 5, \ldots, 9)$, т. е.

$$10{,}58 \le y_5 \le 13{,}20;\ 10{,}02 \le y_6 \le 11{,}10;$$
$$9{,}72 \le y_7 \le 9{,}88;\ \ 9{,}38 \le y_8 \le 9{,}72;\ 8{,}13 \le y_9 \le 9{,}99.$$

Строится последовательность $-23 < -13 < 2 < 7 < 27$.

4. Определяются значения неизвестных y_i, согласно условиям

$$y_i = \begin{cases} \bar{b}_i \text{ для } (D_i - D) \le 0; \\ \underline{b}_i \text{ для } (D_i - D) > 0; \end{cases}$$

$$y_5 = 13{,}20;\ y_6 = 11{,}10;\ y_7 = 9{,}72;\ y_8 = 9{,}38;\ y_9 = 8{,}13.$$

5. Рассчитывается

$$z = 13{,}20 + 11{,}10 + 9{,}72 + 9{,}38 + 8{,}13 = 51{,}53.$$

6. Так как $51{,}53 > 50$, т. е. объем распределенного трансферта оказался больше наличного ресурса, то ранее распределенный по районам трансферт в объеме $z = 51{,}53$ руб. (на душу населения) снижается на величину перерасхода 1,53 руб. начиная с районов, которым соответствует

$$\min_i (D_{ik} - D).$$

Так, по пятому району, которому соответствует наименьшее значение среднедушевого дохода

$$\min_i (D_{ik} - D) = -23$$

величина снижения составит 1 руб., а по шестому району ранее распределенный трансферт может быть уменьшен на 0,53 руб. на душу населения.

Таким образом, каждый район получает:

трансферт на душу своего населения

$$y_5^* = 13{,}20 - 1 = 12{,}20;\ y_6^* = 11{,}10 - 0{,}53 = 10{,}57;$$
$$y_7^* = 9{,}72;\ y_8^* = 9{,}38;\ y_9^* = 8{,}13;$$

трансферт на все население территории района

$$y_5^* = 11{,}20\ \text{Ч}_5;\ y_6^* = 10{,}57\ \text{Ч}_6;\ y_7^* = 9{,}72\ \text{Ч}_7;$$
$$y_8^* = 9{,}38\ \text{Ч}_8;\ y_9^* = 8{,}13\ \text{Ч}_9.$$

7. Оценить степень выравнивания бюджетов районов можно, сравнив стандартные отклонения при двух вариантах бюджета — соответственно без учета (D_1) и с учетом трансферта (D_2):

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(D_i - D)^2} = 18 \text{ руб.};$$

следовательно, дисперсия

$$D_1 = D \pm 18 = 123 \pm 18 \text{ руб.};$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(D_i - D)^2} = 18 \text{ руб.};$$

следовательно, дисперсия

$$D_2 = (D + \sum_{i=1}^{m} y_i) \pm 13 = 173 \pm 13 \text{ руб.}$$

Соответствующие коэффициенты вариации:

$$k_1 = 100\sigma_1 / D_1 = 13\%;\ k_2 = 100\sigma_2 / D_2 = 7\%.$$

Проведенные расчеты показывают, что оптимальное распределение трансферта между районами позволяет повысить степень выравнивания среднедушевых доходов населения региона. Это выражается в существенном уменьшении стандартного отклонения, т. е. отклонения среднедушевых доходов населения района от средней величины, с 18 руб. до 13 руб. и коэффициента вариации среднедушевых расходов населения районов с 13 до 7%.

13.7. КРЕДИТНАЯ ПОЛИТИКА

Региональный центр, обладая определенными финансовыми ресурсами, может в соответствии с действующим законодательством РФ предоставлять на различных условиях своим хозяйствующим субъектам свои кредитные ресурсы. При предполагаемой неизменности ставки за кредит в течение планового периода и благоприятных условиях хозяйствования региональных предприятий региональный центр всегда может рассчитывать на пополнение доходной части своего бюджета финансовыми средствами в объеме:

$$\delta_P = \gamma\lambda\sum_i x_i = \gamma\lambda\delta,$$

где γ — региональная ставка налога на прибыль; λ — банковская ставка за кредит в плановом периоде; δ — объем кредитных средств, располагаемых региональным центром; x_i — объем кредита, предоставляемого i-му региональному хозяйствующему субъекту.

Обоснованием предоставляемого региональным центром i-му хозяйствующему субъекту кредита могут служить результаты решения следующей задачи:

$$f(y) = \sum_i B_{0i}\left(1 + \frac{\alpha_i x_i}{A_i - KO_i}\right) y_i \to \max,$$

$$\begin{cases} \sum_i x_i y_i \le \delta, \\ y_i = (1 \wedge 0). \end{cases}$$

В принятых обозначениях: y_i — искомый параметр — булева переменная, показывающая, предоставляет ли региональный центр i-му хозяйствующему субъекту кредитные ресурсы в объеме $x_i(y_i = 1)$ или не предоставляет $(y_i = 0)$; α_i — чистая прибыль на капитал (кредит), которую планирует получить i-й хозяйствующий субъект от использования кредита x_i; B_{0i}, A_i, KO_i — выручка, актив баланса и объем краткосрочных обязательств i-го хозяйствующего субъекта в отчетном периоде.

ГЛАВА 14

МОДЕЛИ МАРКЕТИНГА

Никакая реклама не поможет продать то, что продать невозможно.

С. Паркинсон

ХОЗЯИН НАНЯЛ РАБОТНИКА И 0К6ЩАЛ 6Л\у ДАТЬ 12 руБЛСЙ И кдф'гдн. Но тот, прорАкотАк 7 месяцев, здхотел уйти. При рдсчете он получил кдфтАИ и 5 рувлей. Сколько стоит кдфтдн?

СТАРИННАЯ ЗАДАЧА

14.1. ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ОБМЕНА ТОВАРАМИ (МОДЕЛЬ ЭДЖВОРТА)

Рассмотрим игру двух лиц с ненулевой суммой. Игрок *А* имеет *а* единиц товара, игрок В — *Ь* единиц другого товара. При обмене товарами каждый из игроков стремится извлечь пользу.

Для участника *А* итог обмена обозначим через (x, y), для участника В итог деятельности будет $(a - x, b - y)$. Для определяемых величин *х и у* учитываются ограничивающие условия. Значение *х* находится в пределах от 0 до а, значение — в пределах от 0 до *Ъ*.

В координатах *х, у* для прямоугольника допустимых значений искомых неизвестных строятся линии равной выгодности. Для участника *А* это совокупность параллельных выпуклых функций, для участника В — это совокупность параллельных вогнутых функций. Точки возможных условий контракта — это точки касания функций полезности результата для участников.

14.2. ЗАДАЧА ПРИКРЕПЛЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ К ПОСТАВЩИКАМ

Объединение имеет в своем составе три филиала, которые в течение месяца производят однородную продукцию. Эту продукцию получают три потребителя, расположенные в разных местах.

Тарифы перевозок единицы груза от филиалов к потребителям, мощности поставщиков и спрос потребителей заданы в таблице 87.

Таблица 87

Поставщики	Стоимость перевозок к потребителям			Мощности поставщиков
	1	2	3	
1	7	6	4	120
2	3	8	5	100
3	2	3	7	80
Спрос потребителей	90	90	120	

Требуется составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам, при котором общая стоимость перевозок за месяц будет минимальной.

Решение. Это — транспортная задача. Обозначим через ***Хц*** — объем перевозок от i-го поставщика к у'-му потребителю. Оптимальное решение задачи: $\#_{12}$ = 10, $\#_{13}$ = 110, **#21** — 90, $лг_{23}$ = Ю, $лг_{32}$ = 80 ед.; значение целевой функции при оптимальном решении L = 1060.

14.3. МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАДИИ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА ТОВАРА

Модель основана на изменении выручки по годам для всех товаров, входящих в анализируемую группу.

Пусть изменения распределены нормально. Если рост выручки меньше ц - 0,5а, то это фаза спада. Если больше ц. + 0,5ст, то фаза роста. Если в промежутке, то зрелость или насыщение. Если выручка до 5% от прогнозируемого максимума выручки, то фаза внедрения. Если уменьшается доля продукта в сбыте предприятия, снижается маржинальный доход от продукта, то его нужно снимать с производства.

14.4. МОДЕЛЬ ВЫБОРА СЕГМЕНТОВ РЫНКА

Пусть n — число возможных сегментов рынка данного предприятия и данного товара *(n > 2); N* — число сегментов, на которых предприятие желало бы продавать свой товар *(N < n); Kj* — количество товара, которое может быть реализовано на у-м сегменте; Cj — удельные переменные затраты по реализации товара на у-м сегменте; *Zj* — совокупные постоянные затраты по реализации товара на у-м сегменте; *Pj* — цена товара на у'-м сегменте, Р — минимально необходимая выручка.

Обозначим через ***x,*** — булеву переменную, которая показывает, целесообразно или нет работать на у-м сегменте.

Тогда модель выбора сегмента:

$$\min L = \sum_{j=1}^{n} (C_j K_j + Z_j) x_j,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_j K_j x_j \ge P, \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \le N, \\ x_j = \{1 \hat{} 0\}, (j = 1, \dots, n). \end{cases}$$

14.5. СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ СПРОСА

Путем анкетирования потенциальных покупателей обрабатываются сведения о желаемой очередности покупок определенного товарного набора, а также о фактической очередности покупок этих товаров в прошлом.

По этим сведениям определяют вероятность P_{ij} того, что i-й товар будет куплен у-м покупателем по очередности. Эти вероятности составляют квадратную матрицу Р = {Р;.}. Затем определяют удельный вес покупателей d_h имеющих в наличии i-видов товаров (i = 0, 1, n - 1).

Назовем емкостью рынка набор вероятностей r_i означающих вероятность того, что покупатель, приобретая какой-то товар, купит именно i-й товар. Обозначив через D и R соответственно вектор-столбцы удельных весов d_i и емкостей r_i:

$$D = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \dots \\ d_{n-1} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}$$

можно оценить емкость рынка в целом

$$R = PD$$

и определить спрос на исследуемые товары.

Пример 1. Пусть по анкетам определена матрица вероятностей очередности покупок трех видов товаров: стиральных машин, холодильников, пылесосов (матрица Р), а также удельный вес этих товаров, имеющихся у покупателей (матрица *D).*

Тогда емкость рынка составит:

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,04 & 0,06 \\ 0,02 & 0,2 & 0,88 \\ 0,07 & 0,8 & 0,13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,43 \\ 0,27 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0,9 \cdot 0,3 + 0,04 \cdot 0,43 + 0,06 \cdot 0,27 \\ 0,02 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,43 + 0,88 \cdot 0,27 \\ 0,07 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,43 + 0,13 \cdot 0,27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \\ 0,3 \\ 0,4, \end{vmatrix}$$

т. е. покупки стиральной машины и холодильника равновероятны (по 0,3), а вероятность покупки пылесоса равна 0,4, при условии, что покупки будут совершены.

Если известно, что численность покупателей данного сегмента составляет, например, 4 и каждый из них обязательно купит хотя бы один из этих видов товаров, то спрос составит: на стиральные машины и холодильники по 0,3 · 4, а на пылесосы — 0,4 · 4 ед.

14.6. РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ СПРОСА

Данная модель строится в виде уравнений, характеризующих зависимость потребления товаров и услуг от различных факторов. Модель может быть как однофакторной, так и многофакторной.

В таблице 88 представлены статистические данные о расходах на питание ***(у),*** душевом доходе ***(xi)*** и размере семьи ***(x₂)*** для девяти групп семей.

Таблица 88

№	Исходные данные			Расчетные данные				
	у	XI	X2	«12	УХ\	X\X2	X22	УХ2
1	433	628	1,5	394384	271924	942	2,3	649,5
2	616	1577	2,1	2486929	971432	3311,7	4,4	1293,6
3	900	2659	2,7	7070281	2393100	7179,3	7,3	2430
4	1113	3701	3,2	13697401	4119213	11843,2	10,2	3561,6
5	1305	4796	3,4	23001616	6258780	16306,4	11,6	4437
	1488	5926	3,6	35117476	8817888	21333,6	13,0	5356,8
7	1645	7281	3,7	53012961	11977245	26939,7	13,7	6086,5
8	1914	9350	4,0	87422500	17895900	37400	16,0	7656
9	2411	18807	3,7	353703249	45343677	69585,9	13,7	8920,7
Е	11825^	54725	27,9	575906797	98049159	194841,8	92,1	40391,7

Рассмотрим сначала однофакторную линейную модель зависимости расходов на питание (y) от душевого дохода семей (x_1). Она выражается линейной функцией вида

$$y = a_0 + a_1 x_1.$$

Параметры a_0 и a_1 находятся в результате решения системы нормальных уравнений, которая в свою очередь формируется с применением метода наименьших квадратов, предложенного французским математиком Лежандром еще в 1806 г.

Сумма квадратов отклонений должна быть минимальна согласно методу наименьших отклонений, т. е.

$$\sum (y - \tilde{y})^2 \to \min,$$

где суммирование проводится по всем группам семей; y — исходные данные; $\tilde{y}$ — соответствующее значение, вычисленное по модели.

Система нормальных уравнений для рассматриваемого случая имеет вид:

$$\begin{cases} na_0 + \left(\sum x_1\right) a_1 = \sum y, \\ \left(\sum x_1\right) a_0 + \left(\sum x_1^2\right) a_1 = \sum y x_1. \end{cases}$$

Используя таблицу 87, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 9a_0 + 54725a_1 = 11825, \\ 54725a_0 + 575906797a_1 = 98049159. \end{cases}$$

Отсюда $a_0 = 660$; $a_1 = 0{,}11$; уравнение регрессии имеет вид:

$$y = 660 + 0{,}11x_1.$$

Направление связи между y и x_1 определяет знак коэффициента регрессии (a_1). В нашем случае связь является прямой. Теснота этой связи определяется коэффициентом корреляции:

$$r_{yx_1} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{yx_1}^2}{\sigma_y^2}}, \text{ где } \sigma_y^2 = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n}; \; \sigma_{yx_1}^2 = \frac{\sum (y - \tilde{y})^2}{n}.$$

Здесь σ_y — среднеквадратическое отклонение выборки (табл. 87); σ_{yx1} — среднеквадратическое отклонение уравнения; $\bar{y}$ — среднее арифметическое значений y.

Чем ближе значение коэффициента корреляции к единице, тем теснее корреляционная связь. В нашем примере $\sigma_y^2 = 454070$, $\sigma_{yx1}^2 = 63846$, следовательно:

$$r_{yx_1} = \sqrt{1 - \frac{63846}{454070}} = 0{,}927.$$

Полученное значение коэффициента корреляции свидетельствует, что связь между расходами на питание и душевым доходом очень тесная.

Величина $r^2_{yx1} = 0{,}859$ называется **коэффициентом детерминации** и показывает долю изменения (вариации) результативного признака под воздействием факторного признака, т. е. 86% изменения расходов на питание можно объяснить фактором душевого дохода.

Рассмотрим **двухфакторную линейную модель** зависимости расходов на питание (y) от душевого дохода семей (x_1) и размера семей (x_2).

Многофакторный (множественный) корреляционно-регрессионный анализ решает три задачи: определяет форму связи результативного признака с факторными, выявляет тесноту этой связи и устанавливает влияние отдельных факторов.

В нашем случае модель имеет вид:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2.$$

Параметры a_0, a_1, a_2 находятся в результате решения системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + \left(\sum x_1\right)a_1 + \left(\sum x_2\right)a_2 = \sum y, \\ \left(\sum x_1\right)a_0 + \left(\sum x_1^2\right)a_1 + \left(\sum x_1x_2\right)a_2 = \sum yx_1, \\ \left(\sum x_2\right)a_0 + \left(\sum x_1x_2\right)a_1 + \left(\sum x_2^2\right)a_2 = \sum yx_2. \end{cases}$$

Используя таблицу 88, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 9a_0 + 54\,725a_1 + 27{,}9a_2 = 11\,825, \\ 54\,725a_0 + 540\,789\,321a_1 + 194\,341{,}8a_2 = 98\,049\,159, \\ 27{,}9a_0 + 194\,341{,}8a_1 + 92{,}1a_2 = 40\,391{,}7. \end{cases}$$

Решая эту систему (например, методом Гаусса), получим:

$$a_0 = 18{,}63;\ a_1 = 0{,}0985;\ a_2 = 224{,}6.$$

Тогда модель имеет вид $y = 18{,}63 + 0{,}0985x_1 + 224{,}6x_2$.

Для определения тесноты связи предварительно вычисляются парные коэффициенты корреляции: $r_{yx\{1\}}$, $r_{yx\{2\}}$, $r_{x\{1\}x\{2\}}$:

$$r_{yx_1} = \frac{\overline{yx_1} - \bar{y}\cdot\bar{x}_1}{\sigma_y\cdot\sigma_{x_1}},\ \text{где}\ \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum\left(y-\bar{y}\right)^2}{n}};\ \sigma_{x_1} = \sqrt{\frac{\sum\left(x_1-\bar{x}_1\right)^2}{n}}.$$

Аналогичный вид имеют формулы для $r_{yx\{2\}}$ и $r_{x\{1\}x\{2\}}$.

После этого вычисляется коэффициент множественной корреляции:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{r_{yx_1} + r_{yx_2} - 2r_{yx_1}\cdot r_{yx_2}\cdot r_{x_1x_2}}{1 - r^2_{x_1x_2}}},$$

который колеблется в пределах от 0 до 1; чем ближе он к единице, тем в большей степени учтены факторы, влияющие на результативный признак.

В нашем примере $R_{yx\{1\}x\{2\}} = 0{,}983$, что выше значения коэффициента корреляции в случае однофакторной модели. Таким образом, связь расходов на питание с факторами душевого дохода и размера семей является очень тесной.

Величина $R^2_{yx\{1\}x\{2\}} = 0{,}966$ называется **совокупным коэффициентом детерминации** и показывает долю вариации результативного признака под воздействием факторных признаков, т. е. 97% изменения расходов на питание можно объяснить факторами душевого дохода и размера семей.

Задача анализа тесноты связи между результативным и одним из факторных признаков при неизменных значениях других факторов решается в многофакторных моделях при помощи частных коэффициентов корреляции. Так, частный коэффициент корреляции между результативным признаком y и факторным признаком x_1 при неизменном значении факторного признака x_2 рассчитывается по формуле:

$$r_{yx_1(x_2)} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2}\cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_2}\right)\cdot\left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)}},$$

где используются парные коэффициенты корреляции. Аналогичная формула имеет место для частного коэффициента корреляции $r_{yx\{2\}(x\{1\})}$ между результативным признаком y и факторным признаком x_2 при неизменном значении факторного признака x_1.

Для рассматриваемого примера частные коэффициенты корреляции расходов на питание от душевого дохода и размера семей составляют

$$r_{yx\{1\}(x\{2\})} = 0{,}927;\ r_{yx\{2\}(x\{1\})} = 0{,}849,$$

т. е. теснота связи между расходами на питание и одним из исследуемых факторов при неизменном значении другого весьма велика.

Если частные коэффициенты корреляции возвести в квадрат, то получим частные коэффициенты детерминации, показывающие долю вариации результативного признака под действием одного из факторов при неизменном значении другого фактора. В нашей задаче

$$r^2_{yx\{1\}(x\{2\})} = 0{,}859;\ r^2_{yx\{2\}(x\{1\})} = 0{,}721,$$

следовательно, влиянием душевого дохода при неизменном размере семьи объясняется почти 86% изменения расходов на питание, а изменение размера семьи при неизменном душевом доходе объясняет более 72% изменения расходов на питание.

Влияние отдельных факторов в многофакторных моделях может быть охарактеризовано с помощью **частных коэффициентов эластичности**, которые показывают, на сколько процентов изменится результативный признак, если значение одного из факторных признаков изменится на 1%, а значение другого факторного признака останется неизменным.

В случае линейной двухфакторной модели частные коэффициенты эластичности рассчитываются по формулам:

$$E_{yx_1(x_2)} = \frac{a_1 \cdot \bar{x}_1}{\bar{y}} = \frac{0{,}0985 \cdot 6080{,}6}{1313{,}9} = 0{,}456,$$

$$E_{yx_2(x_1)} = \frac{a_2 \cdot \bar{x}_2}{\bar{y}} = \frac{224{,}6 \cdot 3{,}1}{1313{,}9} = 0{,}530.$$

Это означает, что при увеличении душевого дохода на 1% и неизменном размере семьи расходы на питание увеличатся на 0,456%, а увеличение (условное) на один процент размера семьи при неизменном душевом доходе приведет к возрастанию расходов на питание на 0,530%.

14.7. ЗАДАЧА ИГРУШЕЧНЫХ ДЕЛ МАСТЕРА

Пример 1. Игрушечных дел мастер может находиться в одном из двух состояний. Первое состояние — если игрушка, которую делает мастер, получает большой спрос. Второе состояние — если игрушка не найдет спроса. Раз в неделю мастер должен принять решение, продолжать ли ему на следующей неделе делать старую игрушку или начать делать новую.

Решение. Предположим, что если игрушка имеет спрос, т. е. мастер находится в состоянии 1, то с вероятностью 1/2 на следующей неделе этот спрос сохранится и с вероятностью 1/2 упадет. Будучи в состоянии 2, т. е. выпуская плохую игрушку, мастер на следующей неделе начнет выпускать новую игрушку. Однако придумать и сделать новую игрушку, на которую будет большой спрос, не так-то просто. Поэтому с вероятностью 3/5 мастер на следующей неделе останется в состоянии 2 и только с вероятностью 2/5 перейдет в первое состояние. Таким образом, в нашем случае имеется два состояния и элементы матрицы P таковы:

$$p_{11} = p_{12} = \frac{1}{2}, \quad p_{21} = \frac{2}{5}, \quad p_{22} = \frac{3}{5}.$$

Предположим, что в начальный момент мастер выпускал игрушку, имеющую спрос, т. е. начальное распределение имеет вид $q^{(0)} = (1,\ 0)$. Тогда через одну неделю $q^{(1)} = q^{(0)}\mathrm{P} = (1/2,\ 1/2)$. Через две недели распределение будет: $q^{(2)} = q^{(0)}\mathrm{P}^2 = (9/20,\ 11/20)$, т. е. уже через две недели более вероятным будет состояние 2. Если мы продолжим вычисление распределений $q^{(n)}$, то заметим, что они приближаются к распределению $q = (4/9,\ 5/9)$. Это и есть предельное распределение для нашей цепи.

Если в начальный момент мастер выпускал неудачную игрушку, то через некоторое время распределение тоже приблизится к вектору $q = (4/9,\ 5/9)$. Легко проверить, что q есть собственный вектор матрицы P с собственным значением 1: $q = qP$. Приближение к предельному распределению происходит экспоненциально быстро.

14.8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИКЛА «ИССЛЕДОВАНИЕ-ПРОИЗВОДСТВО» НОВОГО ТОВАРА

Процессы (фазы) подготовки производства и освоения нового изделия характеризуются стохастичностью, которая определяется факторами неопределенности: колебаниями потребительского спроса, случайными действиями конкурентов, перебоями в материально-техническом снабжении, нестабильностью инфляции, банкротством смежников, неплатежами. Все это ведет к более ранним срокам вывода товаров с рынка, прекращению производства и досрочному поиску, освоению новых изделий, т. е. фирма представляется как открытая система, подверженная внешним случайным воздействиям.

Цикл «исследование-производство» для этой фирмы может быть описан марковским случайным процессом с дискретным состоянием и непрерывным временем. При этом будут справедливы следующие допущения:

- состояния системы считаются дискретными, так как можно указать четкие границы начала и конца пребывания в каждом из этих состояний;
- совокупность состояний образует цепь (последовательность) с непрерывным временем. Для каждого момента t вероятность любого дискретного состояния s_i системы зависит только от ее состояния S_i в настоящем и не зависит от того, когда она в него пришла. Поэтому последовательность состояний системы отвечает условию ординарности потока событий;

Ш система переходит из какого-либо состояния в другое в случайные моменты, указать которые невозможно, а вероятность перехода из одного состояния в другое за время ***At*** равна А.^.

Таким образом, цикл «исследование-производство» новых изделий сводится к марковскому случайному процессу с дискретными состояниями и непрерывным временем при допущении, что реальный поток событий заменяется пуассоновским.

Переходными состояниями цикла могут быть (рис. 48):

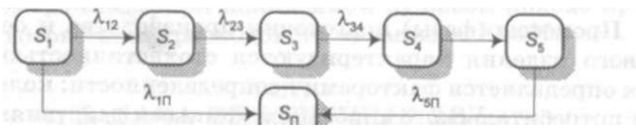
Ш *Si* — поисковые работы (НИОКР);

Ш S_2 — подготовка производства (реконструкция цехов, участков, демонтаж, монтаж, наладка оборудования, изготовление оснастки, закупка материалов и комплектующих);

Ш S_3 — освоение производства (обучение персонала, отладка технологии, изготовление партии, испытания, нормирование труда);

Ш S_4 — выпуск продукции;

Ш S_5 — реализация продукции.



Рте. 48

При этом из каждого состояния система может перейти в состояние свертывания работ $S_п$ (по тем же причинам — из-за банкротства смежников, смены стратегий, эффективных действий конкурентов).

Цикл «исследование-производство» по схеме марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем характеризуется вероятностью ***$P_k(t)$*** и средним временем ***t_k*** пребывания системы в каждом из состояний. Вероятности ***$P_k(t)$*** описываются системой уравнений Колмогорова:

$$dP_1 / dt = -\lambda_{12}^{*} P_1(t);$$
$$dP_2 / dt = \lambda_{12} P_1(t) - \lambda_{23}^{*} P_2(t);$$
$$dP_3 / dt = \lambda_{23} P_2(t) - \lambda_{34}^{*} P_3(t);$$
$$dP_4 / dt = \lambda_{34} P_3(t) - \lambda_{45}^{*} P_4(t);$$
$$dP_5 / dt = \lambda_{45} P_1(t) - \lambda_{5П} P_5(t);$$
$$dP_П / dt = \sum^{5} \lambda_{iП} P_i(t),$$

где $\lambda_{i,i+1}^{*} = \lambda_{i,i+1} + \lambda_{iП}$

При этом в любой момент t справедливо нормирующее условие

$$\sum_{i=1}^{5} P_i(t) + P_{П(t)} = 1,$$

а начальные условия при $t = 0$ $P_1(0) = 1$; $P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = P_5(0) = P_П(0) = 0$.

Таким образом, получено математическое описание системы функционирования фирмы по освоению, производству и реализации новой продукции.

14.9. АНАЛИЗ РИСКА ИННОВАЦИЙ

На стадии выхода на рынок проявляется множество случайных факторов, предсказать которые из-за их неопределенности зачастую невозможно (конкурентные действия, реакция рынка). Поэтому выход на рынок с новым товаром для фирмы всегда риск.

Анализ риска позволяет выбрать вариант инновационной политики, при котором он будет минимален. Для этого необходимо сформировать таблицу вероятностей рыночных состояний и полезности, соответствующих каждому варианту политики нового товара (табл. 89).

Таблица 89

Варианты	Возможные состояния получения прибыли					
	«отличное»		«нормальное»		«плохое»	
I	Pп	Oil	*Pi2*	a,2	*Pa*	a;з
1	0,6	55	0,1	22	0,3	-5
2	0,2	100	0,7	30	о д	-20
3	0,7	40	0,2	25	0,1	5

Объективное рыночное состояние — конъюнктура рынка, т. е. отнесенная к определенному периоду ситуация со сложившимися соотношением спроса и предложения, динамикой цен, положением конкурентов. Это состояние может быть определено как «отличное», «хорошее», «нормальное», «ниже среднего» или «плохое». Полезность — результат фирмы, достигнутый после реализации нововведений: выручка, прибыль, рентабельность.

В информатике, например, для измерения степени неопределенности явлений используют показатель «энтропия». Энтропия i-го варианта определяется

$$H_i = -\sum_{k=1}^{n} P_{ik} \lg P_{ik} = -\lg \prod_{k=1}^{n} P_{ik}^{P_{ik}}.$$

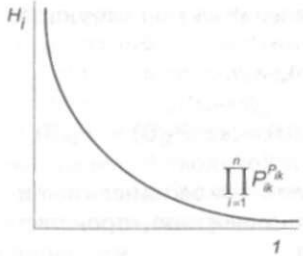


Рис. 49

Чем меньше энтропия H_i, тем меньше неопределенность выбранного варианта (рис. 49).

Однако знание варианта с большей определенностью не позволяет его выбрать, так как не учитывается полезность этого выбора α_{ik} с вероятностью P_{ik}. Чем выше неопределенность рыночных состояний или больше интервал изменения полезности, т. е. отклонение возможной полезности от ожидаемой, тем выше степень риска нововведения. Суммарное отклонение возможной полезности от ожидаемой (средней) по i-му варианту составит:

$$\Delta\alpha_i = \sum_{k=1}^{n} \left|\alpha_{ik} - M(\alpha_i)\right| \ (i = \overline{1, m}),$$

где $M(\alpha_i)$ — математическое ожидание полезности i-го варианта, т. е. ожидаемая полезность:

$$M(\alpha_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} P_{ik} \ (i = \overline{1, m}).$$

Дисперсия и среднеквадратичное отклонение соответственно составят

$$D(\alpha_i) = M[\alpha_{ik} - M(\alpha_i)]^2 = \sum_{k=1}^{n} [\alpha_{ik} - M(\alpha_i)]^2 P_{ik};$$

$$\sigma(\alpha_i) = \sqrt{D(\alpha_i)} \ (i = \overline{1, m}).$$

Чем меньше значение σ, тем меньше неопределенность и риск, так как среднеквадратичное отклонение характеризует колебания различных ситуаций от ожидания.

Также для измерения риска рассчитывают коэффициент вариации

$$V(\alpha_i) = 100 \cdot \sigma(\alpha_i) / M(\alpha_i) \ (i = \overline{1, m}).$$

Чем больше значение этого коэффициента, тем выше степень риска.

Таблица 90

Варианты	$H(\alpha_i)$	$M(\alpha_i)$	$D(\alpha_i)$	$\sigma(\alpha_i)$	$V(\alpha_i)$
1	0,39	33,7	735,21	27,115	80,46
2	0,35	39,0	1149,0	33,90	86,91
3	0,35	33,5	125,25	11,19	33,41

Пример 1. Пусть при анализе рыночных ситуаций для трех возможных вариантов нового товара получены следующие данные (см. табл. 89). По приведенным формулам получены следующие оценки (табл. 90).

Из анализа оценок следует:

$$\min_i \{H(\alpha_i)\} = \min\{0,39;\ 0,35;\ 0,35\} = 0,35 = H(\alpha_2) = H(\alpha_3);$$

$$\max_i \{M(\alpha_i)\} = \max\{33,7;\ 39,0;\ 33,5\} = 39,0 = M(\alpha_2);$$

$$\min_i \{D(\alpha_i)\} = \min\{735,21;\ 1149,0;\ 125,25\} = 125,25 = D(\alpha_3);$$

$$\min_i \{\sigma(\alpha_i)\} = \min\{27,12;\ 33,90;\ 11,19\} = 11,19 = \sigma(\alpha_3);$$

$$\min_i \{V(\alpha_i)\} = \min\{80,46;\ 86,91;\ 33,41\} = 33,41 = V(\alpha_3).$$

Отсюда следует, что предпочтение выхода имеет третье наименование товара, как вариант инновационной политики с меньшим риском.

ГЛАВА 15

МОДЕЛИ ФИНАНСОВОГО МЕНЕДЖМЕНТА

Самый большой и наименее рациональный риск из всех возможных — риск ничегонеделания.

П. Ф. Драккер

Хозяин нанял работника с тлкнл\ условней: за каждый равочнй день вудет платить е.иу по 20 копеек, а *ЗА* каждый неравочий день — вычитать 30 копеек. По прошествии 60 дней рлвотник ничего не здрдвотдл. Сколько выло рлвочнд- дней?

Старинная задача

15.1. МОДЕЛИ РАЗМЕЩЕНИЯ И РАЗВИТИЯ ПРОИЗВОДСТВА

15.1.1. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Пусть планируется развитие отрасли по стране в целом или в экономическом районе. Потребность в данном виде продукта задана. Известны пункты, в которых действуют или могут быть построены предприятия, выпускающие данный продукт. По каждому такому пункту строительства или реконструкции и расширения предприятия возможны различные варианты мощности предприятия. Для каждого предполагаемого предприятия в каждом пункте производства и каждого варианта строительства или расширения предприятия можно определить зависимость себестоимости продукции и капитальных вложений от производственной мощности предприятия. Эта зависимость определяется экономистами на основании опыта действующих предприятий, паспортных данных основного технологического оборудования, типовых проектов новых заводов и т. п. Кроме того, для каждого пункта, учитывая сырьевую базу и другие факторы, экономист может указать наибольшую производственную мощность, которую можно там сосредоточить.

Требуется выбрать производственные мощности предприятий так, чтобы суммарные расчетные годовые затраты по всем предприятиям были наименьшими возможными.

Составим математическую модель задачи.

Пусть *Xj* — производственная мощность у'-го предприятия (у = 1, *N); B* — суммарная производственная мощность всех *N* предприятий; *Dj, dj* — соответственно наибольшая и наименьшая производственные мощности, которые может иметь у'-е предприятие; $\Phi_у$(д:.) — годовые расчетные

затраты на j-м предприятии. Известно, что они равны сумме себестоимости производства и произведения капиталовложений на ставку дисконта

$$c_j(x_j) + B \cdot K_j(x_j),$$

причем как себестоимость $c_j(x_j)$ объема продукции, производимой за год на j-м предприятии, так и капитальные вложения $K_j(x_j)$ в строительство, расширение или реконструкцию предприятия зависят от предполагаемой производственной мощности x_j этого предприятия.

Задача состоит в том, чтобы найти план размещения и развития $(x_1, x_2, \dots, x_N)$, обеспечивающий минимум общих затрат

$$\Phi_1(x_1) + \Phi_2(x_2) + \dots + \Phi_N(x_N),$$

при условии

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N = B$$
$$d_j \le x_j \le D_j,\ j = 1, \dots, N.$$

Условимся вместо оптимальных производственных мощностей $x_1, x_2, \dots, x_N$ искать оптимальные приросты мощностей $X_1, X_2, \dots, X_N$ по сравнению с наименьшими возможными мощностями предприятий

$$X_j = x_j - d_j$$

и обозначим

$$\varphi_j(X_j) = \Phi_j(x_j) - \Phi_j(d_j) = \Phi_j(X_j + d_j) - \Phi_j(d_j),$$
$$m_j = D_j - d_j,$$
$$b = B - (d_1 + d_2 + \dots + d_N),\ j = 1, \dots, N,$$

где $\varphi_j(X_j)$ означают расчетные годовые затраты на j-м предприятии на создание дополнительной мощности X_j, считая от минимальной мощности d_j, а b — суммарный прирост мощностей на всех N предприятиях.

Получаем следующую задачу математического программирования:

$$\begin{cases} Z = \sum\limits_{j=1}^{N} \varphi_j(X_j), \\ \sum\limits_{j=1}^{N} X_j = b, \\ 0 \le X_j \le m_j,\ j = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Для решения этой задачи (т. е. для нахождения вектора $(X_1, X_2, \dots, X_N)$) воспользуемся методом динамического программирования. Введем параметр состояния и функцию состояния. Обозначим через $F_k(\xi)$ — минимальные затраты на создание дополнительной мощности ξ только на первых k заводах, т. е.:

$$F_k(\xi) = \min \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(X_j),$$

где минимум берется по переменным $X_1, X_2, \ldots, X_k$, удовлетворяющим условиям

$$\sum_{j=1}^{k} X_j = \xi,$$

$$0 \le X_j \le m_j,\ j = 1, \ldots, k.$$

Если на k-м заводе предполагается создать дополнительную мощность X_k, то на предыдущих $(k-1)$ заводах прирост мощности должен быть равен $\xi - X_k$. Естественно, как бы ни было выбрано значение X_k и какие бы затраты $\varphi_k(X_k)$ вследствие этого ни возникали на k-м заводе, мы постараемся использовать предыдущие $(k-1)$ заводов так, чтобы затраты на прирост мощности $\xi - X_k$ на них были наименьшими возможными, т. е. чтобы они были равны $F_{k-1}(\xi - X_k)$. Тогда затраты на первых k заводах на создание дополнительной мощности ξ будут равны сумме

$$\varphi_j(X_j) + F_{k-1}(\xi - X_k),$$

а минимальные затраты на первых k заводах мы получим, если выберем значение X_k между нулем и меньшим из значений ξ и m_k так, чтобы эта сумма приняла наименьшее возможное значение. Это приводит нас к рекуррентному соотношению

$$F_k(\xi) = \min_{0 \le X_k \le \min(\xi, m_k)} \left(\varphi_k(X_k) + F_{k-1}(\xi - X_k)\right),$$

при $k = 2, 3, \ldots, N$. Если же $k = 1$, то по самому смыслу функции состояния

$$F_1(\xi) = \varphi_1(\xi).$$

Теперь можно воспользоваться известной схемой расчетов и найти оптимальное решение — оптимальные приросты производственных мощностей, а затем и сами производственные мощности предприятий. Подчеркнем лишь, что здесь на k-м шаге ищется минимум по X_k при фиксированном ξ, причем параметр ξ может принимать значения

$$0 \le \xi \le \min\left(b, \sum_{j=1}^{k} m_j\right)$$

Пример 1. Предположим, что имеется только одно действующее предприятие, выпускающее некоторый продукт, производственная мощность которого равна 20 единицам продукта в год. Предусматривается увеличение производства продукта до 100 единиц в год, т. е. $B = 100$. Увеличение производственных мощностей может быть достигнуто как за счет

реконструкции и расширения действующего предприятия, так и за счет строительства трех новых предприятий. Экономисты указали границы производственных мощностей

$$0 \le X_1 \le 20;\ 20 \le X_2 \le 60;\ 0 \le X_3 \le 50;\ 0 \le X_4 \le 30,$$

т. е. действующим является второй завод. Экономисты подсчитали также затраты, связанные со строительством и реконструкцией предприятий, как функции их производственных мощностей — они приведены в таблице 91.

Таблица 91

X	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Oi(Xi)	0	10	13								
Ф₂(X₂)	0	0	15	21	26	31	35				
Фз(X₃)	0	9	18	26	32	38					
Ф4(X₄)	0	8	13	19							

Таблица 92

X	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
щ{X\)	0	10	13								
ф2(Хг)	0	6	11	16	20						
фз(Хз)	0	9	18	26	32	38					
щ(Хл)	0	8	13	19							

Затраты на прирост производственных мощностей предприятий приведены в таблице 92. Здесь учтено, что суммарный прирост производственных мощностей по всем заводам равен 80. Первая, третья и четвертая строки таблиц 91 и 92 совпадают, а вторая строка таблицы 92 получается из второй строки таблицы 91 как

$$\varphi_2(X_2) = \Phi_2(X_2 + d_2) - \Phi_2(d_2) =$$
$$= \Phi_2(X_2 + 20) - \Phi_2(20) = \Phi_2(X_2 + 20) - 15.$$

Переходим к вычислению значении функции $F_1(\xi)$. Учтем, что она определена только для $0 \le \xi \le 20$. Таблица значений $F_1(\xi)$ и $X_1(\xi)$ не приводится, так как она по существу содержится в таблице 92. Далее вычисляем значения $F_2(\xi)$ и $F_3(\xi)$. Для этого составляем таблицу 93. Числа $\varphi_2(X_2) + F_1(\xi - X_2)$ для фиксированного ξ расположены на прямой, параллельной диагонали, идущей слева снизу вверх направо, и наименьшее среди них есть $F_2(\xi)$. Учитываем, что параметр ξ на этом этапе может изменяться лишь от 0 до 60, так как суммарный прирост мощностей на первых

Таблица 93

		X_2								
		0	10	20	30	40	50	60	70	80
		0	6	11	16	20				
0	0	0	6	11	16	20				
10	10	10	16	21	26	30				
20	13	13	19	24	29	33				
30										
80										

Таблица 94

X	0	10	20	30	40	50	60	70	80
ft©	0	6	11	16	20	29	33		
щз	0	10	20	30	40	30	40		

Таблица 95

	Fifт - Xз)	Xз								
		0	10	20	30	40	50	60	70	80
		фз(Xз)								
		0	9	18	26	32	38			
0	0	0	9	18	26	32	38			
10	6	6	15	24	32	38	44			
20	11	11	20	29	37	43	49			
30	16	16	25	34	42	48	54			
40	20	20	29	38	46	52				
50	29	29	38	47	55					
60	33	33	39	51						
70										
80										

Таблица 96

X	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Я * ®	0	6	11	16	20	29	33	39	51
	0	0	0	0	0	10	0	10	20

двух предприятиях не может быть более 60. Значения $F_2(\xi)$ и $F_3(\xi)$ приведены в таблице 94.

Далее составляем таблицу 95 значений $\varphi_3(X_3) + F_2(\xi - X_3)$. При этом учитываем, что функция $\varphi_3(X_3)$ определена только при значениях аргумента от 0 до 50, а функция $F_2(\xi - X_3)$ — от 0 до 60. Значения $F_2(\xi)$ и $X_3(\xi)$ приведены в таблице 96.

Наконец, составляем таблицу 97, чтобы определить $F_4(\xi)$ для единственного значения аргумента $\xi = 80$. Получаем $F_4(80) = 46$, притом:

$$X_4^* = X_4(80) = 20.$$

По таблице 97 находим:

$$X_3^* = X_3(b - X_4^*) = X_3(80 - 20) = X_3(60) = 0.$$

По таблице 94 определяем:

$$X_2^* = X_2(b - X_4^* - X_3^*) = X_2(80 - 20 - 0) = X_2(60) = 40.$$

После чего получаем:

$$X_1^* = b - (X_4^* + X_3^* + X_2^*) = 80 - (20 + 0 + 40) = 20.$$

Следовательно, оптимальные приросты производственных мощностей $X_1^* = 20$; $X_2^* = 40$; $X_3^* = 0$; $X_4^* = 20$, и так как только второй завод имел наименьшую производственную мощность в 20 единиц, а остальные заводы должны строиться, то отсюда следует, что минимальные суммарные затраты по четырем заводам, равные 46 денежным

Таблица 97

%-x*		X*								
		0	10	,0	30	40	50	60	70	80
		Ф<(X.)								
		р	8	13	19					
0	0									
10	6									
20	11									
30	16									
40	20									
50	29				48					
60	33			46						
70	39		47							
80	51	51								

единицам, будут обеспечены при следующем плане развития и размещения производственных мощностей:

$$X_1^* = 20;\ X_2^* = 60;\ X_3^* = 0;\ X_4^* = 20.$$

Итак, мощность действующего завода следует довести до максимальной величины 60 единиц, третий завод не строить, а первый и четвертый заводы построить мощностью по 20 единиц.

15.1.2. ЗАДАЧА О РАЗМЕЩЕНИИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Определить место строительства завода между двумя пунктами сбыта и размер поставок в каждый из пунктов так, чтобы выручка была максимальна, с учетом затрат на транспортировку продукции.

Расстояние между пунктами сбыта 300 км. Месячный выпуск продукции завода составляет 2500 ед. Зависимость цены единицы продукции от размера поставки продукции $x_j (j = 1,2)$ в каждый пункт сбыта и зависимость затрат на перевозки единиц продукции от расстояния $y_i (i = 1,2)$ между заводом и пунктом сбыта заданы в таблице 98.

Таблица 98

Пункт сбыта	Цена	Затраты на перевозку
1	$200 - 0{,}1x_1$	$1{,}5 + 0{,}1y_1$
2	$150 - 0{,}08x_2$	$1{,}5 + 0{,}05y_2$

При этом заводу невыгодно продавать продукцию x_1 по цене менее 60 д. е./ед., а продукцию x_2 — по цене менее 40 д. е./ед.

ЭММ задачи:

$$\max L = [200 - 0{,}1x_1 - (1{,}5 + 0{,}1y_1)]x_1 + [150 - 0{,}08x_2 - (1{,}5 + 0{,}05y_2)]x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2500; \\ y_1 + y_2 = 300; \\ 200 - 0{,}1x_1 \ge 60; \\ 150 - 0{,}08x_2 \ge 40. \end{cases}$$

15.1.3. ЗАДАЧА О РАЗМЕРЕ ПРЕДПРИЯТИЯ

Компания анализирует варианты строительства завода по выпуску новой продукции. При этом возможны три стратегии компании: строить большой завод, строить малый завод, ничего не строить. Получаемый доход зависит

Таблица 99

Стратегии компании	Состояние природы	
	благоприятный рынок	неблагоприятный рынок
Строить большой завод	800	-180
Строить малый завод	100	-20
Ничего не строить	0	0

от состояния природы (рынка): благоприятного или неблагоприятного (табл. 99).

Возможно проведение маркетингового исследования рынка, которое дает почти совершенную информацию. Стоимость исследования 10 д. е. Результаты исследования могут быть положительными (благоприятный рынок) с вероятностью 0,45 и отрицательными (неблагоприятный рынок). При положительных результатах исследования рынок будет благоприятным с вероятностью 0,8. При отрицательных результатах рынок будет неблагоприятным с вероятностью 0,7.

Требуется принять решение в условиях неопределенности (когда неизвестны вероятности состояния рынка), в условиях риска (вероятности состояний природы 0,5 и 0,5) и в условиях определенности.

Решение. Для принятия решений в условиях неопределенности могут использоваться три критерия: максимакс (оптимистический), максимин (пессимистический) и равновероятный (табл. 100).

Таблица 100

Maximax = 200	Maximin = 0	Равновероятный — 40
max(200, -180) = 200	min(200, -180) = -180	(200 + (-180)) / 2 = 10
100	-20	40
0	0	0
Строить большой завод	Ничего не строить	Строить малый завод

Для принятия решения в условиях риска рассчитаем ожидаемую отдачу по каждой стратегии (*EMV — Expected Monetary Value*) с учетом вероятностных состояний рынка:

$$EMV_1 = 0{,}5 \cdot 200 + 0{,}5 \cdot (-180) = 10,$$
$$EMV_2 = 0{,}5 \cdot 100 + 0{,}5 \cdot (-20) = 40,$$
$$EMV_3 = 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0 = 0.$$

Максимальная ожидаемая отдача 40, строим малый завод. В условиях определенности построим дерево решений (см. рис. 50).

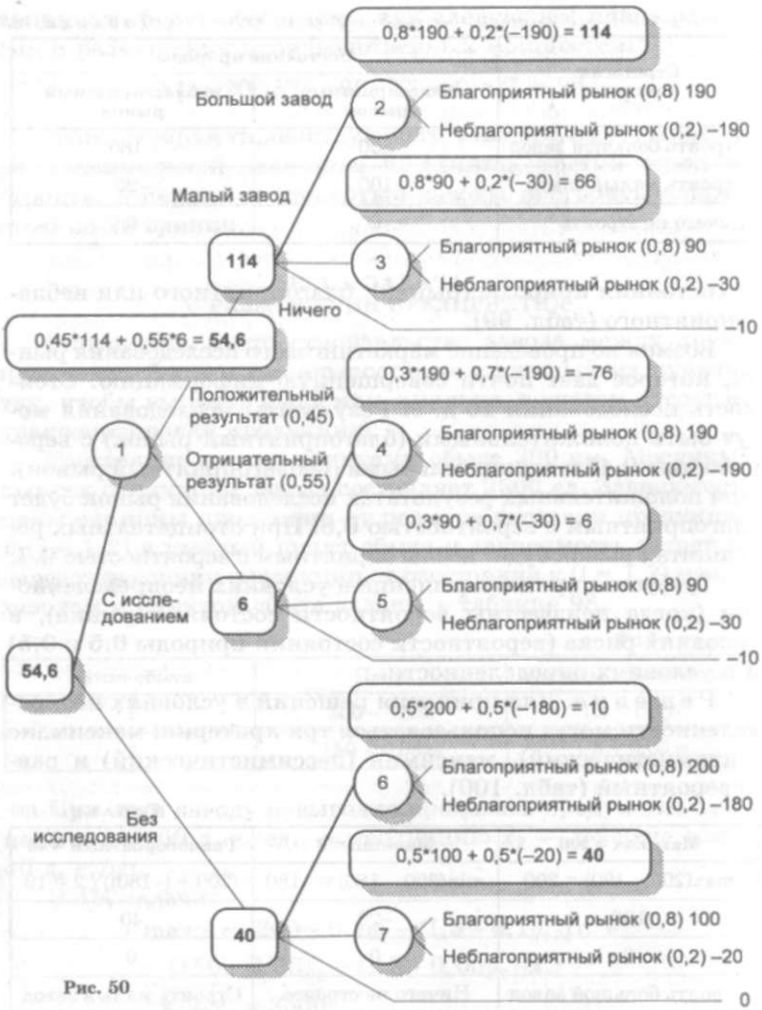


Рис. 50

Вывод: провести рыночное исследование и при положительном результате построить большой завод, при отрицательном — малый завод.

Задание 1. Предлагаются три варианта строительства завода, необходимо выбрать из них оптимальный.

Большой завод, требующий 3 млн долл. капиталовложений, при высоком спросе даст 1 млн долл. годового дохода в течение 10 лет. Если спрос будет высоким только два первых года, компания получит доход 100 тыс. долл. в год. Если спрос будет низким, то с момента пуска доход — 100 тыс. долл.

Малый завод, требующий 1,3 млн долл. капиталовложений, при высоком первоначальном спросе в два первых года даст 450 тыс. долл. дохода в год. Затем при высоком спросе — 300 тыс. долл. в год, при низком — 40 тыс. долл. в год. Такой же доход — при первоначальном низком спросе.

Расширение малого завода через два года требует 2,2 млн долл. дополнительных капиталовложений. При высоком спросе расширенный завод на протяжении 8 лет будет приносить 700 тыс. долл. в год, при низком — 50 тыс. долл. в год.

Уровень спроса может быть установлен с определенной долей вероятности: первоначально высокий спрос без последующего снижения — 0,6; первоначально высокий спрос, снижающийся впоследствии, — 0,1; первоначально низкий, остающийся на том же уровне, — 0,3; низкий, возрастающий впоследствии, — 0. Вероятность первоначально высокого спроса — 0,7(0,6 + 0,1). Если спрос останется высоким, вероятность высокого уровня спроса — 0,86(0,6:0,7) и вероятность низкого — 0,14.

15.1.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЙ

Пример 1. Вам, как руководителю предприятия, выделено 10 млн руб. для увеличения выпуска продукции. Четыре ваших заместителя (по производству, технологии, капитальному строительству, снабжению) предлагают набор мероприятий, ориентированных на различный прирост выпуска продукции и требующих соответствующих капитальных затрат. Каждый из ваших заместителей готов взяться за реализацию любого, но одного, мероприятия из своего набора. Вам необходимо решить проблему распределения выделенных средств, обеспечив максимальный прирост выпуска продукции на предприятии. Обобщенное

Таблица 101

[illegible]	Прирост выпуска продукции				Потребные затраты, млн руб.	Прирост выпуска продукции			
	1-й зам.	2-й зам.	3-й зам.	4-й зам.		1-й зам.	2-й зам.	3-й зам.	4-й зам.
1	93	108	104	105	6	479	475	557	–
2	182	198	203	210	7	–	–	629	–
3	262	282	293	240	8	–		703	–
4	341	358	387	260	9	–	–	766	–
5	410	411	472		10			830	

представление всей совокупности представленных мероприятий показано в таблице 101.

Вы можете выделить 10 млн руб. третьему заместителю и ориентироваться на прирост выпуска продукции в 830 тыс. т/год. Можно выделить 5 млн руб. первому заместителю и 5 млн руб. третьему, что обеспечит прирост выпуска продукции в количестве 410 + 472 = 882 тыс. т/год. Второй вариант явно лучше первого. Попытка перебора всей совокупности возможных вариантов распределения 10 млн руб. между заместителями или угадывания лучшего варианта практически обречена на неудачу. Необходим математический метод решения задачи. Метод такой имеется, и его идея заключается в поэтапном наращивании числа рассматриваемых сфер использования распределяемого ресурса.

Такими этапами для вашей задачи могут быть:

Ш рассмотрение предложений первого и второго заместителей;

Ш дополнение предложениями третьего заместителя;

Ш дополнение предложениями четвертого заместителя.

Рассмотрим варианты, предложенные первым и вторым заместителями, «забыв» пока про остальные. Но рассмотрим всю совокупность вариантов распределения предоставленных денег. Если на первых двух заместителей выделить 1 млн руб., то имеется два варианта их использования: отдать 1 млн руб. первому заместителю, что дает 93 тыс. т/год; отдать 1 млн руб. второму заместителю, что дает 108 тыс. т/год. Лучшим является второй вариант, который следует запомнить. Если рассмотреть аналогичным образом распределение 2 млн руб., то следует сравнить три варианта: 2 млн руб. первому заместителю (182 тыс. т/год); 2 млн руб. второму заместителю (198 тыс. т/год); разделить по 1 млн руб. между первым и вторым заместителями (201 тыс. т/год). Лучшим в этом случае является третий вариант, который следует запомнить. Таким образом можно продолжить рассмотрение вариантов использования ресурсов от 3 до 10 млн руб. Итоговые выводы этих исследований представим в таблице 102.

Таблица 102

Выделяемая сумма, млн руб.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Прирост выпуска, тыс. т/год	108	201	291	380	464	544	623	699	768	837
Следует выделить 2-му заместителю	1	1	2	2	3	3	3	4	4	4

Эту таблицу можно назвать обобщенной характеристикой мероприятий первого и второго заместителей (обобщенного зама).

Рассмотрим варианты использования средств, предложенные третьим и обобщенным заместителями. Алгоритм исследований будет таким же, как и на первом этапе, только пара рассматриваемых заместителей будет другая. Если на третьего и обобщенного заместителей выделить 1 млн руб., то существует два варианта их использования: отдать 1 млн руб. обобщенному заместителю (108 тыс. т/год); отдать 1 млн руб. третьему заместителю (104 тыс. т/год). Лучшим оказывается первый вариант, который следует запомнить. Распределение 2 млн руб. имеет три варианта: 2 млн руб. третьему заместителю (203 тыс. т/год); 2 млн руб. обобщенному заместителю (201 тыс. т/год); разделить по 1 млн между третьим и обобщенным заместителями (212 тыс. т/год). Лучшим оказывается третий вариант, который следует запомнить. Рассмотрев таким образом все варианты от 3 до 10 млн руб., получим итоговую таблицу 103.

Таблица 103

Выделяемая сумма, млн руб.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Прирост выпуска, тыс. т/год	108	212	311	407	500	590	679	767	852	937
Средства, выделяемые 3-му заместителю	0	1	2	3	3	3	3	4	5	6

Эту таблицу можно назвать обобщенной характеристикой мероприятий первого, второго и третьего заместителей. По аналогии с предшествующим этапом вычислений мы получили опять обобщенного заместителя и можем его рассмотреть совместно с четвертым заместителем. Не повторяя процесса рассуждений, который изложен выше на первом и втором этапах решения задачи, приведем итоговый результат распределения ресурсов между четвертым и обобщенным (из трех замов) заместителем (табл. 104).

Таблица 104

Выделяемая сумма, млн руб.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Прирост выпуска тыс. т/год	108	213	318	422	521	617	710	800	899	977
Следует выделить 4-му заместителю	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2

Если бы количество заместителей было больше четырех, то мы продолжили бы расчеты по выработанному алгоритму. В нашем примере все необходимые вычисления завершены. Остается из полученных таблиц выбрать ответ сформулированной задачи.

Из последней таблицы в столбце с объемом 10 млн руб. находим, что четвертому заместителю выделяется 2 млн руб., следовательно, на первых трех остается 8 млн руб. В предпоследней таблице находим столбец с объемом 8 млн руб., из которого видим, что третьему заместителю выделяется 4 млн руб. На первых двух заместителей остается 4 млн руб. Из первой таблицы видим, что в этом случае второму заместителю следует выделить 2 млн руб. и первому заместителю остается 2 млн руб. В результате получен ответ исходной задачи.

Пример 2. Пусть для приобретения оборудования, размещаемого на производственной площади 38 м^2, фирма выделяет 20 тыс. руб. Имеются единицы оборудования двух типов: типа А стоимостью 5 тыс. руб., производительностью 7 тыс. ед. продукции в смену, требующее 8 м^2 производственной площади; типа Б стоимостью 2 тыс. руб., производительностью 3 тыс. ед. продукции в смену, требующее 4 м^2 производственной площади.

Требуется рассчитать оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимум производительности участка.

Р е ш е н и е. Это задача целочисленного программирования. Обозначим через x_1, x_2 — количество приобретаемых машин типа А и Б. Тогда экономико-математическую модель можно записать в виде:

$$\max L = 7x_1 + 3x_2,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 4x_2 \le 38, \\ x_1,\ x_2 - \text{целые и} \ge 0. \end{cases}$$

Оптимальное решение этой задачи: $x_1 = 2$; $x_2 = 5$. Значение целевой функции при оптимальном решении $L =$ $= 29$ тыс. ед. продукции в смену.

15.1.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ МЕЖДУ ПОТРЕБЛЕНИЕМ И НАКОПЛЕНИЕМ

Два традиционных направления вложения доходов — это текущее потребление и наращивание капитала. Такая ситуация возникает для отдельного человека, предприятия, государства в целом. Текущее потребление обеспечивает приобретение ресурсов, товаров, продуктов для использования в настоящем периоде. За счет этого сохраняется жизнедеятельность и условия существования. Наращивание капитала не является самоцелью. Капитал необходим как инструмент повышения будущих доходов. Если сегодня часть дохода вложена в капитал, то завтра потребитель вправе рассчитывать на получение дополнительных благ либо на снижение затрат на их получение.

В простейшем виде задача управления доходами формулируется как определение $x(t)$ — текущее потребление в год t и $y(t)$ — вложение в капитал в год t. Потребности в период t обозначим через $X(t)$.

Разница $X(t)–x(t)$ — это неудовлетворенная потребность. Вкладывая средства в $y(t)$, потребитель тем самым повышает текущее неудовлетворение.

Вложения в капитал $y(t)$ характеризуются потоком доходов в будущем. Этот поток может быть различным. Отдача может проявиться через разовую выплату через некоторый период задержки, в виде постоянной отдачи на несколько последующих периодов, как достаточно сложная функция прироста доходов в будущем.

Для иллюстрации значимости текущего потребления и вложений в капитал рассмотрим отдачу в виде:

$$p(t) = \gamma y(t - \Delta),$$

где γ — прирост дохода с единицы средств капитала; Δ — издержки, вызванные освоением капитала.

Состояние потребителя в период t будет характеризоваться оценкой:

$$X(t) - x(t) - \gamma y(t - \Delta).$$

Общая оценка, охватывающая длительный интервал времени, будет:

$$J = \sum_{t=1}^{T} \alpha(t) \cdot \big(X(t) - x(t) - \gamma y(t - \Delta)\big),$$

где $\alpha(t)$ — значимость единицы неудовлетворенной потребности в период t. В оценку входят три параметра: α, γ, Δ. От их значений зависит стратегия управления доходами. Чем меньше значение γ, больше Δ и значительнее падение $\alpha(t)$ во времени, тем более предпочтительным будет превращение дохода в текущее потребление.

Обобщение ситуации, связанной с управлением доходами, происходит за счет учета инфляции денежной массы, разнообразия видов капитала, изменения структуры потребления во времени. Усложнение оценки приводит к следующему ее виду:

$$J = \sum_{t=1}^{T} \alpha(t) \cdot \left(X(t) - x(t) - \sum_{\Delta=1}^{\infty} \gamma(\Delta)\, y(t-\Delta) \right) \cdot f(t),$$

где $f(t)$ — изменение ценности денежных средств во времени, $\gamma(\Delta)$ — отдача капитала, сформированного Δ лет назад.

Если учесть структуру капитала, то оценка становится более сложной:

$$J = \sum_{t=1}^{T} \alpha(t) \cdot \left(X(t) - x(t) - \sum_{i} \sum_{\Delta=1}^{\infty} \gamma_i(\Delta)\, y_i(t-\Delta) \right) \cdot f(t).$$

Параметры α, Δ и f объективно сдерживают вложения в капитал, но параметр γ стимулирует наращивание капитала. Изымая единицу дохода от текущего потребления, потребитель рассчитывает на существенный выигрыш в будущем:

$$\alpha(t) < \sum_{t=1}^{\infty} \gamma(t+\tau) f(t+\tau).$$

Это условие предпочтения вариантов для вкладывания единицы дохода в год t.

Рассматривая проблему определения $x(t)$ и $y(t)$ как стратегию управления доходами, необходимо учитывать, что сумма дохода в год t является следствием сложения труда и накопленного ранее капитала:

$$x(t) + y(t) = f(\mathrm{T}, \mathrm{K}).$$

Накопленный капитал К равен

$$\mathrm{K} = \sum_{\Delta=1}^{\infty} y(t-\Delta)\alpha(\Delta),$$

где $\alpha(\Delta)$ — потеря (износ) капитала за время Δ.

В качестве производственной функции $f(\mathrm{T}, \mathrm{K})$ можно принять один из многих вариантов, приводимых в литературе и наиболее подходящий к статистике рассматриваемого объекта.

15.1.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРОЦЕССА

Практически любая трудовая деятельность распределяется на основные и вспомогательные операции. Например, для работающего на станке управление станком — это основная операция, а доставка заготовки — вспомогательная. Подготовка чертежа — основная конструкторская операция, а размножение чертежей — вспомогательная. Непосредственный результат труда Р появляется после основной операции, но производительность общественного труда зависит от суммы трудовых усилий в основных T_1 и вспомогательных операциях T_2:

$$q = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2}.$$

Можно организовать высокопроизводительный труд на основной операции, но иметь низкую общую производительность за счет плохой организации вспомогательного труда.

Проектируя и организуя процесс труда, часто внимание уделяют только основным операциям. За счет наращивания мощности, автоматизации процесса, установки систем контроля достигают уменьшения T_1. Чем больше вложено капитала в оборудование, тем меньше оказываются затраты труда:

$$\mathrm{T}_1 = f(\mathrm{K}_1).$$

Для вспомогательных операций ситуация аналогична:

$$\mathrm{T}_2 = f(\mathrm{K}_2).$$

При лимите общей суммы ресурсов, вкладываемых в процесс, возникает проблема определения K_1 и K_2.

$$\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2 = \mathrm{K}.$$

Оценкой вариантов решения этой проблемы может быть один из показателей результата труда. Если принять в качестве оценки производительность, то оценка будет иметь вид:

$$J = \mathrm{P} \,/\, (f_1(\mathrm{K}_1) + f_2(\mathrm{K}_2)),$$

где Р — результат труда.

Отличительной особенностью функций f_1 и f_2 является существенно различная чувствительность к изменению K_1. Во многих случаях сумма дополнительных капитальных вложений, требуемая для снижения на единицу T_1, уменьшается в несколько раз при таком же уменьшении T_2. Аналогичным образом повышение производительности труда обеспечивается не только наращиванием дорогостоящих производственных мощностей, но в десятки и сотни раз меньшими вложениями в обеспечивающие операции. Однако проблема не в том, что подобная ситуация неизвестна, а в том, что сумма потребных капитальных ресурсов лимитирована.

При совокупности обеспечивающих работ появляется экономическая проблема распределения капитала:

$$\sum_i \mathrm{K}_i^{(1)} + \sum_i \mathrm{K}_i^{(2)} = \mathrm{K},$$

$$\mathrm{K}_i \geq 0,$$

$$\max J = \frac{\mathrm{P}}{\sum_i f_i^{(1)}\mathrm{K}_i^{(1)} + \sum_i f_i^{(2)}\mathrm{K}_i^{(2)}}.$$

Здесь $К_i^{(1)}$ — вложение капитала в i-ю основную работу; $К_i^{(2)}$ — вложение капитала в i-ю обеспечивающую работу; К — общий ресурс средств; f_i — правило расчета потребных текущих ресурсов в зависимости от капиталообеспеченности.

Рассмотренная схема распределения капитальных вложений предполагала образование текущих расходов как арифметической суммы по всему комплексу операций. На практике это наиболее простой вариант.

Рассмотрим, например, распределение капитальных вложений между основной операцией, имеющей длительность $Т_1 = aК_1$, и вспомогательной операцией, имеющей длительность $Т_2 = aК_2$. Оценка вариантов значений $К_1$ и $К_2$ имеет вид:

$$J = Р\ /\ (aК_1 + b(К_1 - К_2)).$$

Максимум этой функции будет при $К_1 = К$.

Если затраты труда характеризуются зависимостями типа

$$Т_1 = aК_1^2 \text{ и } Т_2 = aК_2^2, \text{ то } К_1 = К^{b/(a+b)}.$$

Распределение капитальных вложений осуществляется на основе пропорций значений коэффициентов a и b.

При более сложном виде функций $Т_1(К_1)$ и $Т_2(К_2)$ решение может быть получено только в числовом виде.

В общем случае эффективность деятельности изменяется за счет результата труда:

$$Р = \varphi(К_i^{(1)},\ К_i^{(2)})$$

и расходуемых ресурсов

$$R = f\ (К_i^{(1)},\ К_i^{(2)}),$$

поэтому оценка распределения капитальных вложений между стадиями общего процесса имеет вид

$$\max J = \max(Р - R) \text{ или}$$
$$\max J = \max Р/R.$$

15.1.7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ ИНВЕСТИЦИЯМИ И РАЗВИТИЕМ ИНФРАСТРУКТУРЫ

Анализируя доходность инвестиционного проекта, целесообразно сравнивать две альтернативные ситуации.

1. Производство существует без инвестиционной поддержки.

2. Производство развивается через инвестиционные проекты.

Без инвестиционной поддержки производство будет «падать». Эффект от вложения средств зависит от размера инвестиций в производство (оборудование, строительство, закупка технологий) и в исследования. Без второй составляющей результат может оказаться вообще отрицательным. Исследовательскую часть работы должна выполнять инфраструктура инновационной деятельности, но ее следует заранее создать. Таким образом, инвестиционная поддержка всегда ставит проблему о направлении вложения средств.

Интеграционными показателями производственного процесса являются: количество продукции — $V(t)$, затраты на единицу продукции — $С(t)$, потребляемая емкость — $Ц(t)$.

Индексом «0» будем обозначать фактические, а индексом «1» — желаемые значения показателей.

Изменение показателей $V_0(t)$, $С_0(t)$, $Ц_0(t)$ происходит под влиянием лучших факторов, учитывающих сложившиеся статистические тенденции и проводимые нововведенческие мероприятия:

$$V_0(t+1) = f(V_0(t),\ V_0(t-1),\ V_0(t),\ \dots,\ V_0(t+\tau),$$
$$k(t),\ k(t-1),\ k(t-2),\ k(t-T)),$$

где τ — статистическое влияние по объемам производства, T — период статистического влияния капитальных вложений.

Для иллюстрации механизма влияния инновационной деятельности рассмотрим сначала простую модель (производственную функцию):

$$V_0(t+1) = V_0(t)e^{-\alpha} + \beta(f)k(t),$$

где $e^{-\alpha}$ — годовое снижение производства; $k(t-1)$ дополнительные вложения в развитие производства в предшествующем году; $\beta(f)$ — эффективность вложений, зависящая от объема работы обеспечивающей сферы инноваций.

Чтобы достичь требуемого объема производства $V_1(t+1)$, необходимо выполнение условия:

$$\beta(f) = (V_1(f+1) - V_0(t)e^{-\alpha})/k(t).$$

Если сумма задана как $f + k = F$, то функциональное условие для определения значения f будет иметь вид:

$$\beta(f) = (V_1(f) - V_0(t-1)e^{-\alpha})/(F - f).$$

Решение этого уравнения $f_0(t)$ даст необходимый объем работы в сфере, обеспечивающей инновации. Отсюда показатели этой сферы:

- численность работающих $N = af_0(t)$,
- стоимость фондов $Ф = bf_0(t)$.

Здесь a — производительность труда, b — фондоотдача в сфере обеспечения инновационной деятельности.

Согласно построенной модели получаем возможность определить значения N, Ф и К, если заданы фактический и требуемый объемы производства — V_0, V_1, нормативные показатели α, a, b и функция $\beta(t)$.

Если принять линейную модель всех зависимостей без учета запаздывания расчета, то получим

$$V_i^{(0)}(t+1) = V_i^{(0)}(t)e^{-\alpha} + \alpha f(t)k(t),$$
$$f(t) = f\Phi(t),$$
$$f(t) + \Phi(t) + r(t) = F.$$

Максимум $f(t)$К(t) соответствует максимуму

$$f(t)(F - f(t) - bf(t)) \text{ или } Ff(t) - (l+b)f^2(t).$$

Отсюда $f(t) = F/(2(1+b))$.

Если производительность обеспечивающей сферы принять 1 руб./руб., то распределение капитала будет в соотношении:

- 1/4 — в работу инфраструктуры инноваций,
- 1/4 — в развитие инфраструктуры инноваций,
- 1/2 — в реализацию инноваций.

Теперь перейдем к обобщенной модели. Требуется обеспечить минимум

$$J = \sum_t j_1(V_1(t) - V_0(t)) + j_2(C_1(t) - C_0(t)) + j_3(\text{Ц}_1(t) - \text{Ц}_0(t))$$

или

$$J = \sum_t \sum_i j_i(e_i^{(1)}(t) - e_i^{(0)}(t))\varepsilon(t),$$

где j_i — коэффициент значимости i-й оценки, $\varepsilon(e)$ — коэффициент приведения во времени.

Функции изменяются под воздействием $k(t)$ и $f(t)$:

$$e_i^{(0)}(t) = e_i^{(0)}e^{-\alpha} + \beta_i(f)k(t).$$

Лимит вложений определяется условиями:

$$\Phi(t) + f(t) + k(t) <= F(t),$$
$$f(t) \le \sum_{\tau=0}^{t} \Phi(\tau)/b,$$

где b — фондоотдача в обеспечивающей инфраструктуре.

Таким образом, динамическая оптимизационная задача состоит в образовании $f(t)$, $\Phi(t)$ и $k(t)$, обеспечивающих максимальное приближение фактической траектории развития $e_i^{(0)}(t)$ к заданной $e_i^{(1)}(t)$.

При полном использовании ресурсов обеспечивающей инфраструктуры

$$f(t) = 1/b\sum_{0}^{t} \Phi(\tau).$$

Решение задачи можно осуществить на основе имитационной модели путем подбора функций $\Phi(t)$ и $k(t)$ и визуального наблюдения за соответствующими изменениями функций $e_i^{(0)}(t)$.

Процедура исследований будет включать следующие этапы.

1. Задание $\Phi(t)$ и $k(t)$.
2. Проверка условия $\Phi(t) = 1/b\sum_{\tau=0}^{t-1}\Phi(\tau) + k(t)$.
3. Корректировка (при необходимости) $\Phi(t)$ и $k(t)$.
4. Расчет $e_i^{(0)}(t)$.
5. Визуальное сравнение $e_i^{(1)}(t)$ и $e_i^{(0)}(t)$.
6. Переход (при необходимости) к п. 1.

15.1.8. ИНВЕСТИРОВАНИЕ В АВТОТРАНСПОРТ

Предположим, что имеется некоторая начальная сумма денег x, которая вкладывается в предприятие, связанное с перевозкой людей и грузов. Эти деньги могут быть использованы для приобретения машин, перевозящих либо людей, либо грузы. Предположим, что на приобретение машин для перевозки людей израсходована сумма денег y, а остальная сумма израсходована на приобретение грузовых машин. Годовой доход от перевозки пассажиров является функцией от вложенной суммы денег y и равен $g(y)$ за первый год. Годовой доход от перевозки грузов является функцией оставшейся части $x - y$ капитала и равен $h(x-y)$ за первый год.

С целью довести до минимума затраты на техническое обслуживание и ремонт машин компания придерживается политики, согласно которой в конце каждого года она продает все машины, находившиеся в эксплуатации. Рыночная стоимость машин, использовавшихся для перевозки пассажиров, составляет часть их первоначальной стоимости и равна ay к концу первого года, где $0 < a < 1$. Стоимость грузовых машин составляет также некоторую часть их первоначальной стоимости и равна $b(x-y)$ к концу первого года, где $0 < b < 1$. Администрация компании должна найти последовательные оптимальные решения относительно того, каким образом следует разместить капитал, чтобы полный доход за период N лет был максимальным.

Чтобы упростить математический анализ этой иллюстративной задачи, предположим, что доход, который компания получает каждый год, она не использует для приобретения новых машин. Многошаговые задачи, требующие принятия последовательных решений, удобнее решать методом функциональных уравнений. Этот подход позволяет свести исходную задачу максимизации к нахождению решения функционального уравнения, которое в рассматриваемом случае может быть получено исходя из следующих рассуждений.

Доход или прибыль за первый год равен:

$$Y_1(x,y) = g(y) + h(x - y).$$

Максимальный доход за первый год равен:

$$f_1(x) = \max_{0\le y\le x}\left\{Y_1(x,y)\right\} = \max_{0\le y\le x}\left\{g(y) + h(x-y)\right\}.$$

Следует отметить, что максимальный доход является функцией начальной суммы вложенных денег. Если весовые функции доходов g и h определены или заранее известны, то максимальный доход может быть легко найден путем дифференцирования по y функций, заключенных в скобки, и подстановкой максимизирующего значения y в уравнение, описывающее полный доход.

После одного года работы компания для покупки новых машин расходует сумму денег, полученную в результате продажи находившихся в эксплуатации пассажирских и грузовых машин, так как согласно сделанному выше для упрощения предположению она не использует для этой цели доход за первый год работы. Поэтому сумма денег, вкладываемых в течение второго года работы, равна:

$$x_1 = ay + b(x - y),$$

что можно записать так:

$$x_1 = y_1 + (x_1 - y_1),$$

где y_1 — сумма денег, расходуемая на приобретение машин для перевозки пассажиров, и $(x_1 - y_1)$ — сумма денег, расходуемая на приобретение грузовых машин.

Следовательно, в течение второго года работы прибыль от вложения капитала в пассажирские перевозки равна $g(y_1)$; прибыль от вложения капитала в грузовые перевозки равна $h(x_1 - y_1)$.

В конце второго года рыночная стоимость машин, использовавшихся для перевозки пассажиров, составляет ay_1; рыночная стоимость машин, использовавшихся для перевозки грузов, составляет $b(x_1 - y_1)$.

Полный доход за двухлетний период равен:

$$Y_2(x, y, y_1) = g(y) + h(x - y) + g(y_1) + h(x_1 - y_1);$$

максимальный доход за этот же период равен:

$$f_2(x) = \max_{0\le y\le x}\left\{g(y) + h(x-y) + f_1(x_1)\right\}.$$

Сумма денег, оставшаяся после двух лет работы, равна сумме денег, вырученной от продажи находившихся в эксплуатации грузовых машин и машин для перевозки пассажиров, т. е.:

$$x_2 = ay_1 + b(x_1 - y_1),$$

что можно записать в виде:

$$x_2 = y_2 + (x_2 - y_2),$$

где y_2 — сумма денег, израсходованная на покупку машин для перевозки пассажиров, и $(x_2 - y)$ — сумма денег, израсходованная на покупку грузовых машин.

В течение третьего года работы прибыль от вложения капитала в пассажирские перевозки составляет $g(y_2)$; прибыль от вложения капитала в грузовые перевозки составляет $h(x_2 - y_2)$.

К концу третьего года работы стоимость машин, использовавшихся для перевозки пассажиров, равна ay_2; стоимость машин, использовавшихся для перевозки грузов, составляет $b(x_2 - y_2)$.

Тогда полный доход за три года работы равен:

$$Y_3(x, y, y_1, y_2) = g(y) + h(x - y) + g(y_1) + h(x_1 - y_1) + g(y_2) + h(x_2 - y_2),$$

максимальный доход равен:

$$f_3(x) = \max_{\substack{0\le y\le x\\ 0\le y_1\le x_1\\ 0\le y_2\le x_2}}\left\{Y_3(x, y, y_1, y_2)\right\} =$$

$$= \max_{\substack{0\le y\le x\\ 0\le y_1\le x_1\\ 0\le y_2\le x_2}}\left\{\begin{matrix} g(y) + h(x-y) + g(y_1) + h(x_1 - y_1) + \\ + g(y_2) + h(x_2 - y_2) \end{matrix}\right\} =$$

$$= \max_{0\le y\le x}\left\{g(y) + h(x-y) + f_2(x_1)\right\}.$$

Это уравнение представляет собой рекуррентное соотношение, из которого могут быть найдены оптимальные решения для трехшагового процесса.

Аналогичным образом находим максимальный доход для четырехлетнего периода работы:

$$f_4(x) = \max_{0\le y\le x}\left\{g(y) + h(x-y) + f_3[ay + b(x-y)]\right\}.$$

Отсюда получаем максимальный доход за N-летний период работы:

$$f_N(x) = \max_{0\le y\le x}\left\{g(y) + h(x-y) + f_{N-1}[ay + b(x-y)]\right\}.$$

Это — основное функциональное уравнение для N-шагового процесса решения.

15.1.9. ПРОБЛЕМА РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Некоторая фирма, вкладывая капитал x, производит N различных изделий в различных количествах. Стоимость производства партии из q_j штук j-го изделия равна

$$g_j(q_j) = \begin{cases} (a_j + b_j + c_j)q_j + K_j, & \text{для } q_j > 0, \\ 0, & \text{для } q_j = 0, \end{cases}$$

где a_j — стоимость сырьевых материалов, требуемых для производства единицы j-го изделия; b_j — стоимость машинного производства единицы j-го изделия; c_j — стоимость рабочей силы, требуемой для производства единицы j-го изделия; K_j — фиксированные затраты, не зависящие от объема произведенной партии j-го изделия, если $q_j > 0$.

Полная стоимость продукции удовлетворяет соотношению:

$$\sum_{j=1}^{N} g_j(q_j) \le x,$$

где $q_j \ge 0$ и x — начальный капитал.

Пусть фирма с единицы j-го изделия получает прибыль p_j. Задача состоит в том, чтобы найти оптимальное соотношение между q_j, при котором прибыль, получаемая фирмой от производства N различных изделий, является максимальной:

$$P_N = \sum_{j=1}^{N} p_j q_j.$$

Для простоты предполагается, что фирма обладает неограниченными резервами машинного производства и рабочей силы, позволяющими ей производить любое изделие в любых количествах.

Пусть $f_N(x)$ — максимальная прибыль. Тогда:

$$f_N(x) = \max_{\{q_j\}} P_N.$$

Если компания производит только одно изделие, то максимальную прибыль можно записать в виде:

$$f_1(x) = \max_{\{q_j\}} (p_1 q_1).$$

Так как

$$x = (a_1 + b_1 + c_1)q_1 + K_1,$$

то

$$q_1 = \frac{x - K_1}{a_1 + b_1 + c_1}.$$

Следовательно, если начальный капитал превышает связанные с производством фиксированные затраты, то фирма получает максимальную прибыль:

$$f_1(x) = \frac{p_1(x - K_1)}{a_1 + b_1 + c_1}.$$

Если фиксированные затраты больше или равны начальному капиталу, то максимальная прибыль: $f_1(x) = 0$.

Если компания производит два вида изделий, то получаемая ею максимальная прибыль равна:

$$f_2(x) = \max_{q_1, q_2} \{p_2 q_2 + p_1 q_1\} = \max_{\substack{q_2 \ge 0 \\ g_2(q_2) \le x}} \left\{ p_2 q_2 + p_1 \left[\frac{x - g_2(q_2) - K_1}{a_1 + b_1 + c_1} \right] \right\} =$$

$$= \max_{\substack{q_2 \ge 0 \\ g_2(q_2) \le x}} \left\{ p_2 q_2 + f_1\left[x - g_2(q_2)\right] \right\},$$

так как

$$f_1\left[x - g_2(q_2)\right] = p_1 \left[\frac{x - g_2(q_2) - g_3(q_3) - K_1}{a_1 + b_1 + c_1} \right].$$

При $N = 3$ компания получит максимальную прибыль

$$f_3(x) = \max_{\{q_i\}} \{p_3 q_3 + p_2 q_2 + p_1 q_1\},\ j = 1,\ 2,\ 3.$$

Принимая во внимание условия задачи, находим, что

$$(a_1 + b_1 + c_1)q_1 + K_1 + g_2(q_2) + g_3(q_3) = x$$

и

$$q_1 = \frac{x - g_2(q_2) - g_3(q_3) - K_1}{a_1 + b_1 + c_1}.$$

Отсюда

$$f_3(x) = \max_{q_2, q_3} \left\{ p_3 q_3 + p_2 q_2 + \frac{P_1\left[x - g_2(q_2) - g_3(q_3) - K_1\right]}{a_1 + b_1 + c_1} \right\} =$$

$$= \max_{q_2, q_3} \left\{ p_3 q_3 + p_2 q_2 + f_1\left[x - g_2(q_2) - g_3(q_3)\right] \right\}.$$

Используя рекуррентное соотношение для $N = 2$, приведем $f_3(x)$ к виду:

$$f_3(x) = \max_{\substack{q_3 \ge 0 \\ g_3(q_3) \le x}} \left\{ p_3 q_3 + f_2\left[x - g_3(q_3)\right] \right\}.$$

На основании этого по аналогии можно написать следующее функциональное уравнение для рассматриваемой проблемы регулирования производства:

$$f_N(x) = \max_{\substack{q_N \ge 0 \\ g_N(q_N) \le x}} \left\{ p_N q_N + f_{N-1}\left[x - g_N(q_N)\right] \right\},$$

которое может быть использовано для определения оптимальной политики регулирования $\{q_j\}$. Интересно отметить, что это функциональное уравнение можно было написать непосредственно, используя принцип оптимальности.

15.2. МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЯ

Каждый инвестор пытается сформировать портфель с возможно большей ожидаемой доходностью и возможно меньшим риском.

Целевой функцией задачи является максимум суммы коэффициентов относительной важности проектов, рассчитанных на основе согласованных мнений экспертов.

Пусть R_{ij} — коэффициент относительной важности предложения по проекту i, отнесенному к стратегии развития j. Через C_{ij} обозначим затраты проекта i в j-й стратегии развития:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если проект } i \text{ включается в стратегию } j; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Задача формирования портфеля проектов имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n} R_{ij}X_{ij} \to \max,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \le \Phi, \\ X_{ij} = \{0 \hat{\ } 1\}, \end{cases}$$

где n — число предложений проектов, включенных в рассмотрение.

15.3. МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ РИСКА ПРОЕКТА

Трудности принятия решений по проектам обусловлены значительной степенью неопределенности будущих условий, в которых будет осуществляться проект, и возможной противоречивостью сравнительных оценок нескольких проектов, когда по одному из показателей эффективности проектов лучшим будет один проект, а по другому показателю более предпочтителен другой.

Фактор неопределенности будущих условий осуществления проекта приводит к появлению риска для инвесторов и к необходимости принятия мер для его снижения. Противоречивость сравнительной оценки проектов по различным критериям вызывает необходимость дополнительного анализа сравниваемых проектов для окончательного выбора одного из них.

Под неопределенностью понимается неполнота или неточность информации об условиях реализации проекта, в том числе связанных с ними затратами и результатами. Неопределенность, связанная с возможностью возникновения в ходе реализации проекта неблагоприятных ситуаций и последствий, характеризуется понятием риска.

Таблица 105

t	п,	Р,	П, Р,	(п, - п)²р,	ц + Д)'.	п,
1	8000	од	800	400000	532900	5333
2	9000	0,2	1800	200000	236844	4000
3	10000	0,4	4000	0	105264	2963
4	11000	0,2	2200	200000	46784	2173
5	12000	0,1	1200	400000	20793	1580
±			10000	1200000	942585	16049

Пример 3. Величины прибыли (Π_t) в рассматриваемом году t и их вероятности (P_t) характеризуются следующими значениями (табл. 105).

Ожидаемая средняя прибыль составит:

$$\bar{\Pi} = \sum_{t=1}^{T} \Pi_t \cdot P_t = 10\,000.$$

Это будет наиболее вероятной величиной, однако нужно учесть риск, связанный с такой оценкой прибыли. Считается, что показателем абсолютного риска является среднеквадратическое отклонение σ. Чем больше среднеквадратическое отклонение, тем выше риск.

Величина среднеквадратического отклонения σ для прибыли Π_t определяется по следующему выражению:

$$\sigma(\Pi) = \sqrt{\sum_{t=1}^{T}\left(\Pi_t - \bar{\Pi}\right)^2 \cdot P_t} = \sqrt{1\,200\,000} = 1095$$

Общая величина риска по проекту определяется как среднеквадратическое отклонение чистой текущей стоимости $\sigma(NPV)$, которое определяется по выражению:

$$\sigma(NPV) = \sqrt{\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\sigma(\Pi)}{(1+R)^t}\right]^2} = \sqrt{942\,585} = 971.$$

Во многих случаях удобнее пользоваться не величиной среднеквадратического отклонения σ, а величиной относительного риска, определяемого как отношение среднеквадратического отклонения к ожидаемому значению:

$$NPV = \sum_{t=1}^{T}\frac{\Pi_t}{(1+R)^t} = 16\,049,$$

$$\sigma(NPV) = \sqrt{\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\sigma(\Pi)}{(1+R)^t}\right]^2} = \sqrt{942\,585} = 971.$$

15.4. МОДЕЛЬ ДЕЛЕНИЯ РИСКА

«Деление риска» — это управленческие действия, направленные на сокращение неблагоприятного будущего риска. Наиболее явное выражение этих действий связано с решениями по управлению финансами. Рассмотрим это на числовых примерах.

Пример 4. Пусть имеется возможность вложить некую сумму капитала через приобретение акций двух предприятий. У них одинаковые дивиденды 2 руб./руб. в год, но и одинаковый риск возможной неудачи, получения нулевых доходов. Как распорядиться своими средствами?

- Вариант 1. Вложить средства в первое предприятие. Средний доход в этом случае равен $2 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 = 1$ руб./руб. в год. Вероятность потери средств равняется 0,5.
- Вариант 2. Вложить средства во второе предприятие. Средний доход в этом случае равен $2 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 = 1$ руб./ руб. в год.
- Вариант 3. Поделить средства между предприятиями. Средний доход в этом случае равен $2(0{,}5 \cdot 0{,}5) + 1(0{,}5 \times 0{,}5) + 1(0{,}5 \cdot 0{,}5) + 0(0{,}5 \cdot 0{,}5) = 1$ руб./руб. в год. Вероятность потери средств равняется (оба предприятия не будут иметь прибыли) $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

В последнем варианте в два раза уменьшился риск полной потери средств, а средний доход оказывается одинаковым во всех вариантах. В рассмотренном примере управление средствами фактически не влияло на средний будущий доход, поэтому, выбирая распределение средств, можно использовать в качестве оценки минимум риска потери средств.

Математическое описание модели деления риска следующее.

Рассмотрим распределение средств между двумя предприятиями. Каждое из них характеризуется средним доходом и дисперсией отклонения от среднего дохода. Получаемая сумма дохода равняется:

$$M = a \cdot A + (1 - a)B,$$

где a — доля средств, вкладываемых в первое предприятие, A и B — доход на капитал, вложенный в первое и второе предприятия соответственно. Величина M является случайной и для нее вычисляются математическое ожидание m и дисперсия D.

Математическое ожидание вычисляется по формуле:

$$m = am_1 + (1 - a)m_2.$$

Формула вычисления дисперсии включает три слагаемых

$$D = a^2 D_1 + (1 - a)(1 - a)D_2 + 2a(1 - a) f \sqrt{D_1 D_2},$$

где D_1 и D_2 — дисперсия дохода по первому и второму предприятиям, f — коэффициент корреляции между доходами рассматриваемых предприятий.

- Вариант 1. При $m_1 = m_2$ и полной независимости предприятий ($f = 0$) получим следующее правило деления средств между предприятиями: $a = D_2/(D_1 + D_2)$.
- Вариант 2. При $m_1 = m_2$ и прямой предпринимательской зависимости между предприятиями ($f = 1$) получается, что итоговая сумма дохода не зависит от значения a, и минимальная дисперсия итогового дохода будет минимальна при $a = 1$, если $D_1 < D_2$, $a = 0$, если $D_1 > D_2$.
- Вариант 3. При $m_1 = m_2$ и обратной зависимости предприятий ($f = -1$) средняя сумма дохода не зависит от значения коэффициента a, а дисперсия будет минимальна при

$$a = \frac{\sqrt{D_2}}{\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2}}.$$

Комплексная оценка вариантов распределения средств имеет вид

$$rm - D,$$

где коэффициент r характеризует значимость для владельца средств дохода по отношению к риску. Для владельца значительных средств вложение небольшой суммы осуществляется, как правило, при большом значении коэффициента r. Инвестор готов вкладывать средства в мероприятия с большим возможным доходом, не обращая внимания на возможный риск. Соответственно инвестор с малыми средствами при вложении всех своих средств будет крайне осторожен, и значение коэффициента r небольшим. В этом случае большое значение имеет прежде всего риск, а не ожидаемый доход.

15.5. ОПТИМИЗАЦИЯ КУРСА ВАЛЮТЫ В ОПЦИОНЕ

Опцион — документ, удостоверяющий право покупки или продажи товара, валюты или ценных бумаг по оговоренной цене. Различают европейский опцион, допускающий покупки или продажу в определенный день, и американский опцион, допускающий покупку или продажу до определенного дня. Контракты на покупку валюты в будущем (*call option*) составляют существенную долю работы валютной биржи.

Сумма валютных контрактов на российских биржах очень быстро повышается. В основе этих контрактов лежит прогнозируемый валютный курс.

Если валюта необходима через T дней, то можно ее купить заранее по текущему курсу $g(0)$ и сохранить ее на счете в коммерческом банке, но подписать договор с дилером валютного рынка о покупке валюты через T дней по форвардному курсу $g_0(T)$. Если курс $g_0(T)$ окажется меньше соответствующего $g(T)$, то покупатель получит выигрыш.

Если $g_0(T)$ будет выше $g(T)$, то покупатель несет неоправданные убытки.

Провозглашение значения $g_0(T)$ — одна из задач, решаемых дилером на валютном рынке. Прогноз валютного курса позволяет определить его среднее значение $m(T)$ и плотность распределения вероятностей $f(x)$. Если объявить высокий курс $g(T)$, то это защитит дилера от потерь и риска, но количество покупателей, желающих заключить договор о будущей покупке, уменьшится. Зависимость суммы сделок от объявленного валютного курса можно принять, например, в линейном виде

$$S = s + a(m - g_0(T)),\ \text{ед. валюты},$$

где s — сумма сделок при среднем расчете курса в качестве объявленного срочного, a — изменение суммы сделок на единицу изменения объявленного срочного курса.

Прибыль дилера от заключения срочной сделки будет равна:

$$J = b \cdot S \cdot e(T) + \int_{m_0}^{g_0(T)} S(g_0(T) - x)f(x)dx - \int_{g_0(T)}^{m} S(x - g_0(T)f(x)dx.$$

Первое слагаемое определяет долю оплаты (b), получаемую в момент подписания срочной сделки, второе — прибыль дилера от выбора завышенного срочного курса, третье — потери дилера от выбора заниженного срочного курса. Необходимое условие минимума J приводит к соотношению:

$$g(T) = m + s/2a - b \cdot e(T) \cdot g(0)/2.$$

Повышенное значение доли авансовых платежей (b) и банковской ставки e на капитал позволяют объявлять меньшее значение курса срочной сделки. Аналогичным образом воздействует коэффициент привлекательности заказов. Повышение прогнозируемого курса валюты m и базового уровня суммы сделок s, наоборот, стимулируют рост объявляемого курса срочных сделок.

В более сложном виде функции спроса на валютные опционы от объявляемого курса получится следующее уравнение расчета $g(T)$:

$$g_0(T) = m - b \cdot e(T) - \frac{S(g_0(T))}{S_g^1(g_0(T))} - w,$$

где w — оплата услуг брокера.

Покупатель валюты, оценивая опционный курс, стремится к максимуму своего дохода. Он составит выигрыш от разницы фактического x и договорного курсов $g(T)$, но одновременно потери покупателя определяются убытком, если x окажется меньше $g(T)$, а также потребуются расходы на услуги брокера.

$$\Phi = \int_{g_0(T)}^{m} S(x - g_0(T))f(x)dx -$$

$$- \int_{m_0}^{g_0(T)} S(g_0(T) - x)f(x)dx - b \cdot S \cdot e(T) - w.$$

Здесь S — сумма сделки; $f(x)$ — плотность распределения вероятностей значения x; $b \cdot S \cdot e(T)$ — недополученная прибыль от авансового платежа в доле b; w — плата брокеру за сделку. Значение w может быть фиксированной суммой или долей от S, например pS.

Если принять линейную зависимость допустимой суммы сделок от опционного курса валюты, то оптимальное значение курса, при котором будет максимальное значение Φ, равно

$$g_0(T) = m - b \cdot e(T) \cdot g(0)/2 + s/2a - p/2.$$

Получается, что интересы покупателя и дилера валютного рынка совпадают. Усложнение ситуации связано с необходимостью учета инфляции и различия в процентных ставках по валютным и рублевым счетам.

Для защиты от риска в опционной сделке используют хеджирование. Это меры для ограничения финансового риска. Предполагая превышение будущего курса валюты x над оговоренным в опционе, дилер приобретает страховой полис.

Возможная сумма потерь составит:

$$S \int_{g_0(T)}^{m} (x - g_0(T))f(x)dx.$$

Вероятность наступления страхового случая равна:

$$r = \int_{g_0(T)}^{m} f(x)dx.$$

Страховая организация в случае наступления страхового случая понесет расходы в размере:

$$S\int_{g_0(T)}^{m_1}(x-g_0(T))f(x)dx.$$

Если страховой случай не наступит, то доход страховой организации будет равен сумме страхового платежа и заработанных на ней процентов:

$$S\cdot h\cdot(1+e(T))\cdot g_0(T),$$

где h — доля страхового платежа по отношению к сумме сделки; $e(T)$ — накопление за период страховки T проценты на капитал; S — сумма сделки в валюте.

Выбирая значение h, страховая организация обеспечит баланс

$$g_0(T)\cdot S\cdot h\cdot(1+e(T))=S\int_{g_0(T)}^{m_1}(x-g_0(T)f(x)dx.$$

Для равномерного закона распределения плотности вероятностей значения курса валюты получим:

$$h=\frac{(m_1-g_0(T))}{2(m_1-m_2)(1+e(T)g_0(T)}.$$

Если учесть, что $(m_1-g_0(T))/(m_1-m_0)$ — это вероятность наступления страхового случая, то

$$h=\frac{r\cdot(m_1/(g_0(T)-1))}{2(1+e(T))}.$$

Рост ставки на капитал и опционного курса позволяют уменьшать сумму страхового платежа. Повышение риска сделки требует увеличения суммы страхового платежа.

15.6. ИНВЕСТИРОВАНИЕ В ВАЛЮТУ

Рассмотрим ситуацию приобретения иностранной валюты с целью сохранения своих средств при высокой инфляции в стране. Форвардный курс i-й валюты обозначим через m_i, возможный интервал его значений — от m_0 до m_1, распределение плотности вероятности значений форвардного курса — через $f_i(x_i)$. Среднее значение ожидаемого дохода составит:

$$J_i=\frac{R}{g_i^{(0)}}\cdot\int_{m_i^{(0)}}^{m_i^{(1)}}xf_i(x)dx-R,$$

где R — сумма национальных денежных единиц, вложенных в валюту; g_i — текущий курс i-й валюты.

При равномерном распределении плотности получим:

$$J_i=R\cdot\left(\frac{m_i^{(0)}+m_i^{(1)}}{2g_i^{(0)}}-1\right).$$

Рассмотрим правило принятия решения при инвестировании в i-ю и j-ю валюты. Определяемая величина b будет долей денежной суммы R, вкладываемой в i-ю валюту. Соответственно, сумма $R(1-b)$ будет выделена для покупки j-й валюты. Средний ожидаемый доход составит

$$J=b\cdot J_i+(1-b)\cdot J_j,$$

а суммарная оценка риска

$$D=b_2\cdot D_i+(1-b)2\cdot D_j.$$

Введем в качестве оценки принимаемого решения показатель

$$\Phi=J-z\cdot D,$$

где коэффициент z определяет значимость дохода и риска для инвестора. Значение z зависит от соотношений суммы инвестирования R и общего имеющегося капитала.

При значительной сумме инвестируемых средств необходимо учитывать значимость возможных потерь. Принимая линейный рост ценности возможных потерь, получим следующее выражение для определения суммы среднего ожидаемого дохода:

$$J=\frac{R}{g_i^{(0)}}\left(\int_0^{m_i^{(1)}}x\cdot f_i(x)\cdot dx+\int_{m_i^{(0)}}^{0}x\cdot f_i(x)\cdot dx\right)-R.$$

Для равномерного закона распределения получаем расчетное соотношение:

$$J_i=R\cdot\left(\frac{m_i^{(0)}+m_i^{(1)}}{2g_i^{(0)}}-1\right)+R\cdot(1-a)\cdot\left(\frac{m_i^{(0)}}{2g_i^{(0)}\left(m_i^{(1)}+m_i^{(0)}\right)}\right).$$

Если дополнительно учесть процентные ставки, инфляцию и транзакционные издержки, то среднее значение ожидаемого дохода будет равно:

$$J=\frac{R\cdot(1+e_i)}{g_i^{(0)}}\cdot\int_{m_i^{(1)}}^{m_i^{(1)}}x\cdot f_i(x)\cdot dx-R\cdot(1+e_0),$$

где e_i — реальная процентная ставка без процента транзакционных платежей по i-й валюте за оцениваемый период,

e_0 — реальная процентная ставка без транзакционных платежей по национальной валюте.

Соответствующее выражение для расчета J_i при учете коэффициента (a) значимости снижения дохода будет иметь вид:

$$J_i = R\frac{(1+e_i)\cdot\left(m_i^{(0)}+m_i^{(1)}\right)}{2g_i^{(0)}} - R\cdot(1-e_0) +$$

$$+R\cdot\frac{(1-a)\cdot(1-e_i)\,m_i^{(0)}}{2g\left(m_i^{(1)}-m_i^{(0)}\right)}.$$

Сравнение различных валют, как объектов инвестирования, требует учета риска принимаемого решения. Количественной оценкой риска может быть дисперсия ожидаемого дохода:

$$D_i = \frac{R^2}{g_i^{(0)}}\cdot\int_{m_i^{(1)}}^{m_i^{(1)}}(x-m_i)^2\cdot f_i(x)\cdot dx$$

или средний относительный интервал разброса значений дохода:

$$r_i = \frac{R_i}{q_i}\cdot\frac{\left(m_i^1-m_i^0\right)}{2m_i}.$$

Максимум Ф обеспечивается при значении b, равном:

$$b = \frac{(J_i-J_j)/(2z+D)}{D_i+D_j}.$$

Отсюда видно, что при высокой значимости риска распределение инвестирования между валютами будет зависеть только от соотношения степеней неопределенности дохода, при малом значении z решение зависит от разницы средней доходности. Подставив в расчетное соотношение конкретные выражения J_i, J_j, D_i и D_j, получим возможность определить долю средств, выделяемых для покупки i-й валюты. При этом определяющими факторами будут текущий курс валют g_i и g_j, характеристики форвардного курса $f_i(x)$, $f_j(x)$:

$$b = b(g_i(0), g_j(0), f_i(x), f_j(x), z).$$

15.7. ЗАДАЧА О СДЕЛКАХ

Задача о сделках относится к играм, в которых допускается кооперирование между игроками, т. е. заключение совместных соглашений, совместный выбор смешанных стратегий и передача полезности от одного игрока к другому.

Пусть в игре двух лиц с произвольной суммой заданы функции полезности игроков u и v. Игроки, действуя совместно, могут получить в любой точке области допустимых решений соответственно полезности u и v. Однако чем больше получает один игрок, тем меньше сможет получить другой. Задача состоит в том, чтобы из этой области выбрать точку, которая будет удовлетворять обоих.

Хотя исход в любом конкретном случае зависит от личных свойств игроков и их умения торговаться, но мы можем установить минимальную величину, на которую будет согласен игрок. Это та величина, которую он может получить односторонними действиями при любых действиях другого игрока, т. е. максиминное значение игры u^* и v^*.

Наклон границы области допустимых решений в произвольной точке представляет собой отношение, в котором полезность может передаваться от одного игрока к другому. Дополнительная полезность должна делиться между игроками в таком же соотношении, в каком она может передаваться. Естественно, что существует точка, в которой полезность передается в данном отношении. Это и есть решение задачи о сделках.

Пример 1. Двоим предлагают 100 руб., если они смогут решить, как поделить эти деньги между собой. Предполагается, что первый из них очень богат, а второй имеет капитал всего 100 руб. Предполагается также, что полезность суммы денег пропорциональна ее логарифму. Как должны быть разделены эти деньги?

Решение. Так как первый игрок очень богат, мы можем предположить, что полезность x руб. (где $x \le 100$) пропорциональна x. Так как второй игрок имеет только 100 руб., полезность, которую он получает от x руб., равна

$$\log(100 + x) - \log100 = \log[(100 + x)/100].$$

Граница области допустимых решений задается уравнением:

$$v = \log[(200 - u)/100] \text{ (рис. 51).}$$

Теперь ищем точку в области допустимых решений, которая максимизирует u^*v, т. е. функцию

ц/(200 - u) =
= log [(200 - и)/100].

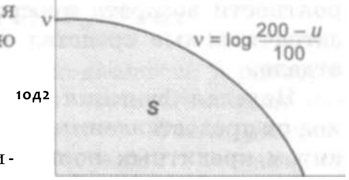


Рис. 51

Решая его, получаем приближенно u = 54,4 руб. первому игроку и v = 45,6 руб. второму.

В некотором смысле результат кажется странным: богатый игрок должен получить больше, чем бедный, о котором можно утверждать, что он нуждается в деньгах. Однако такое утверждение предполагает сравнение полезностей разных лиц, что в принятой схеме, вообще говоря, не допускается. Решение учитывает, что фактически полезность денег у второго игрока убывает быстро, а у первого игрока медленно. В результате получается, что второй игрок стремится получить хоть что-то и при сделке может уступить первому игроку.

15.8. МОДЕЛИ КОММЕРЧЕСКОГО КРЕДИТОВАНИЯ

Экономическая целесообразность предоставления кредита группе фирм-потребителей с £-м результатом анализа расчетов прошлого периода и у-м уровнем финансового рейтинга определяется как ожидаемый доход фирмы-производителя *E:*

$$E_{ij} = -C - VS + P_{ij} S,$$

где С — постоянные затраты, руб.; S — сумма кредита, которая показывает объем выручки за реализованную продукцию, руб.; V — переменные затраты на 1 руб. реализованной продукции, руб./руб.; P_{ij} — вероятность погашения кредита фирмой-потребителем из группы с *i-м* результатом анализа расчетов прошлого периода и у-м уровнем финансового рейтинга.

Пусть фирма-производитель планирует затратить на осуществление коммерческого кредитования денежные средства в размере K руб. При этом каждому s-му варианту кредитной политики для каждой *m-й* группы фирм-потребителей могут быть поставлены в соответствие затраты K_{ms}. При начислении процентов за предоставляемый кредит фирма-производитель определяет общую величину дополнительных расходов по инкассации задолженности ($З_н$), превышение которой нецелесообразно из-за снижения вероятности возврата просроченных кредитов, несмотря на затрачиваемые средства и усилия персонала кредитного отдела.

Целевая функция *f(x)* — совокупный ожидаемый доход от предоставления кредита потребителям по всем вариантам кредитных политик, который должен быть максимальным. Основная модель кредитования различных групп фирм-потребителей имеет вид:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{s=1}^{R_m} Д_{ms} x_{ms} \to \max;$$

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{M} \sum_{s=1}^{R_m} K_{ms} x_{ms} \le K; \\ \sum_{s=1}^{R_m} x_{ms} \le 1; \\ x_{ms} = \{1 \wedge 0\} \quad (m = \overline{1, M}; \quad s = \overline{1, R_m}). \end{cases}$$

Здесь M — количество вариантов кредитной политики фирмы-производителя; R_m — количество фирм-потребителей, претендующих на получение коммерческого кредита; x_{ms} — искомая булева переменная:

$$x_{ms} = \begin{cases} 1, \text{ если } m\text{-я группа фирм кредитуется} \\ \quad \text{по } s\text{-му варианту;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

15.9. МОДЕЛЬ БЮДЖЕТИРОВАНИЯ КОРПОРАЦИИ

Производственно-хозяйственная деятельность (ПХД) корпорации может рассматриваться как бизнес-процесс (БП), основное содержание которого — операция по переработке потребляемого ресурса в товары и услуги, с последующим их сбытом во внешнюю среду. Важно, что система БП внешней среды выступает как надсистема по отношению к БП корпорации.

Воздействие внешней среды на БП корпорации осуществляется в виде ограничения на объемы предоставляемого ресурса, а также его стоимости, часть ресурса, получаемого от внешней среды в оплату товаров и услуг, идет на восполнение ресурса, использованного в процессе деятельности корпорации, а избыток представляет собой результат деятельности корпорации.

Математически данную модель можно представить в виде:

$$\Delta R = f^{БП}[(R_0 + R^{упр}), E] - R_0 \to \max.$$

Здесь ΔR — изменение ресурса, находящегося в распоряжении корпорации; $f^{БП}$ — действия, осуществляемые над ресурсом в рамках БП в зависимости от объема ресурса, находящегося в распоряжении корпорации в начальный момент времени (R_0), управления объемом ресурса ($R^{упр}$) и внешних факторов (E).

Тогда функционал одноэтапного стратегического плана корпорации может быть формализован в виде:

$$R_t(x_{1t}) = \varphi_t(x_{1t}, \gamma, b) \to \max.$$

Откуда функционал стратегии корпорации с учетом требования ликвидности при использовании бюджетной модели примет вид:

$$\begin{cases} R_T = \sum_{t=1}^{T} \dfrac{\varphi_t(x_{1t}, \gamma, b)}{(1+e_t)^t} \to \max, \\ x_{1t} \le R_t + \varphi_t(x_{1t}, \gamma, b) + x_{2t}. \end{cases}$$

Здесь R_t — изменение ресурса, находящегося в распоряжении корпорации в период t; φ — функция дохода корпорации в году t в зависимости от объемов инвестиций x_{1t}, при фиксированных параметрах структуры капитала (γ — доля заемного капитала в источниках капитала корпорации) и дивидендной политики (b — доля прибыли, распределяемой на выплаты по дивидендам); e_t — средневзвешенная стоимость капитала, используемого корпорацией в году t; x_{2t} — величина дополнительного собственного либо заемного капитала, привлекаемого корпорацией в период t, $t = 1, 2, \ldots, T$.

Соответственно оптимизация ПХД корпорации на основе бюджетной модели в контуре оперативного управления с учетом требования ликвидности может быть формализована в виде:

$$\begin{cases} R = \sum_{t=1}^{T} s_t(x_{3t}) - \sum_{t=1}^{T} k_t(\nu, x_{3t}) \to \max; \\ \sum_{t=1}^{T} B_t(x_{3t}) + x_{1T} \le \sum_{t=1}^{T} \Pi_t(x_{3t}) + x_{2T}. \end{cases}$$

Здесь R — изменение ресурса, находящегося в распоряжении корпорации за плановый период T; $S_t(x_{3t})$ — выручка от продаж в период t; x_{3t} — объем производства в период t; $k_t(\nu, x_{3t})$ — затраты на производство в зависимости от объемов производства и загрузки производственных мощностей в период t; $B_t(x_{3t})$ — выплаты в период t на осуществление корпорацией хозяйственной деятельности в зависимости от объемов производства; $\Pi_t(x_{3t})$ — поступления в период t от осуществления корпорацией хозяйственной деятельности в зависимости от объемов производства.

Таким образом, моделирование ПХД корпорации на базе бюджетной модели позволяет оценивать управленческие решения, устанавливать цели (осуществлять процесс планирования), оптимизировать использование ресурса на основе его стоимостной оценки.

Рассматривая долгосрочный план как N-этапный инвестиционный процесс, можно получить функционал максимизации чистого приведенного дохода корпорации в долгосрочном периоде:

$$CFS(Y) = \sum_{t=1}^{N} \lambda^t \left(\sum_{r=0}^{k} EBIT_{rt} y_{r+6,t} - \alpha ЗК_0 \right)(1-T) -$$

$$- \sum_{n=1}^{N} \sum_{t=n}^{N} [\lambda^t \alpha ЗК_t (1-T) - y_{1t}] \to \max,$$

где

$$\lambda^t = \frac{1}{\alpha\gamma(1-T) + \delta(1-\gamma)}.$$

Требование ликвидности будет представлено в виде:

$$ДС_t + \sum_{r=0}^{k} U_{rt} y_{r+6,t} - (y_{3t} + y_{4t} - y_{5t}) -$$

$$- \alpha ЗК_{t-1}(1-T) - y_{1t} + \Delta_t + y_{2t} \ge 0, \ \forall t,$$

где

$$U_{rt} = EBIT_{rt}(1-T) + AO_{rt} - КВ_{rt} - (\Delta З_{rt} + \Delta ДЗ_{rt} - \Delta КЗ_{rt});$$

$$\Delta ЗК_t = \frac{\gamma \left[\begin{array}{c} СК_t + y_{2t} + \left(\sum_{r=0}^{k} EBIT_{rt} y_{r+6,t} - \alpha ЗК_t \right)(1-T) - \\ - y_{1t} + ЗК_t \end{array} \right] - ЗК_t}{1 + \gamma\alpha(1-T) - \gamma}.$$

Ограничения на поддержание финансовой устойчивости:

$$СК_t + \left(\sum_{r=0}^{k} EBIT_{rt} y_{r+6,t} - \alpha ЗК_t \right) \times (1-T) -$$

$$- \left(BA_t + \sum_{r=0}^{k} (КВ_{rt} - AO_{rt}) y_{r+6,t} \right) - y_{1t} + y_{2t} - К_{ОСС} \times$$

$$\times \left(ДС_t + З_t + ДЗ_{rt} + \sum_{r=0}^{k} (\Delta З_{rt} + \Delta ДЗ_{rt}) y_{r+6,t} + y_{3t} + y_{4t} \right) \ge 0, \ \forall t;$$

$$\sum_{r=0}^{k} EBIT_{rt} y_{r+6,t} - TIE\alpha \times$$

$$\times \left(ЗК_t + \frac{\gamma \left[\begin{array}{c} СК_t + y_{2t} + \left(\sum_{r=0}^{k} EBIT_{rt} y_{r+6,t} - \alpha ЗК_t \right) \times \\ \times (1-T) - y_{1t} + ЗК_t \end{array} \right] - ЗК_t}{1 + \gamma\alpha(1-T) - \gamma} \right) \ge 0, \ \forall t;$$

$$ДС_t + З_t + ДЗ_t - К_{ТЛ}(КЗ_t + y_{5t}) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{k} (\Delta З_{rt} + \Delta ДЗ_{rt} - К_{ТЛ} \Delta КЗ_{rt}) y_{r+6,t} + y_{3t} + y_{4t} \ge 0, \ \forall t;$$

$$ДЗ_t - К_{МН}\left(КЗ_t + \sum_{r=0}^{k} \Delta КЗ_{rt} y_{r+6,t} + y_{5t}\right) + \geq 0, \forall t;$$

$$y_{1t}, y_{3t}, y_{4t}, y_{5t} \geq 0,$$

$$\underline{I_t} \leq y_{2t} \leq \overline{I_t}, \; y_{2t} = y_{2t+1}, \forall t,$$

$$y_{6,t} = 1, \forall t$$

$$y_{r+6}, \mathrm{t} \in [1 \wedge 0], r = 1, 2, \ldots, k.$$

Причем $y_{r+6}, t = y_{r+6, t+1}, \forall t. \; t = 1, 2, \ldots, N.$

Если корпорация отличается нестабильным финансовым положением, в модель могут быть введены условия приведения величины оборотных активов и текущих обязательств в соответствие с нормативами:

$$З_t + \sum_{r=0}^{k} \Delta З_{rt} y_{r+6,t} - y_{3t} - ОЗ_t \sum_{r=0}^{k} FZ_{rt} lr_t y_{r+6,t} \frac{1}{360} = 0;$$

$$ДЗ_t + \sum_{r=0}^{k} \Delta ДЗ_{rt} y_{r+6,t} - y_{4t} - \sum_{r=0}^{k} S_{rt} lp_t y_{r+6,t} ОДЗ_t \frac{1}{360} = 0;$$

$$КЗ_t + \sum_{r=0}^{k} \Delta КЗ_{rt} y_{r+6,t} - y_{5t} - ОКЗ_t \sum_{r=1}^{k} (CZ_{rt} + FZ_{rt}) lr_t y_{r+5,t} \frac{1}{360} = 0.$$

Здесь y_{1t} — величина минимальных выплат по дивидендам в период t; y_{2t}, — предложение собственного капитала в период t; y_{3t}, y_{4t}, y_{5t} — абсолютная величина целевого изменения в период t соответственно запасов, дебиторской и кредиторской задолженностей; $EBIT_{rt}$ — прибыль до выплаты процентов и налога на прибыль в период t по проекту r ($EBIT_{rt} = S_{rt} - CZ_{rt} - FZ_{rt} - AO_{rt}$); $ЗК_t$ — величина заемного капитала на начало периода t; T — величина ставки налога на прибыль; $ДЗ_{rt}$, $ДДЗ_{rt}$, $ДКЗ_{rt}$ — нормативное изменение в период t соответственно запасов, дебиторской и кредиторской задолженностей при принятии к реализации проекта r; $З_t$, $ДЗ_t$, $КЗ_t$ — величина соответственно запасов, дебиторской и кредиторской задолженностей на начало периода t; $ОЗ_t$ — период оборачиваемости средств в запасах в днях, $ОЗ = \{ОЗ_t\}_{t=1}^{5}$; $ОДЗ_t$ — период оборачиваемости дебиторской задолженности в днях; $ОЗ = \{ОЗ_t\}_{t=1}^{5}$; $ОКЗ_t$ — то же, кредиторской задолженности, $ОКЗ = \{ОКЗ_t\}_{t=1}^{5}$; $СК_t$ — величина собственного капитала на начало периода t; $К_{МН}$, $К_{ТЛ}$, $К_{ОСС}$, TIE — коэффициенты соответственно мгновенной и текущей ликвидности, обеспеченности собственными средствами, обеспеченности процентов к уплате.

Исходная информация для долгосрочного прогнозирования движения средств и баланса промышленной корпорации может быть представлена в виде таблицы (табл. 106).

Таблица 106

Исходные данные	Комментарии
$S_0 = \{S_{0t}\}_{t=1}$	Прогнозный объем продаж в ценах базового периода при отсутствии инвестиций
$FZ_0 = \{FZ_{0t}\} l_t$	Величина переменных затрат в ценах базового периода
$CZ_0 = \{CZ_{0t}\}_{t=1}$	Постоянные затраты без амортизации и учета инвестиционной деятельности в ценах базового периода
$AO_0=\{AO_{0t}\}^5_{t=1}$	Амортизационные отчисления без учета инвестиционной деятельности
$LP_0=\{lp_{0t}\}l_{-1}$	Индекс цен на продукцию корпорации
$LR_0=\{lr_{0t}\}l_1$	Индекс инфляции
	Ставка налога на прибыль
$\Delta S_{rt}, \Delta FZ_{rt}, \Delta CZ_{rt}$	Матрица инвестиционных альтернатив, отображающая влияние проекта на объем продаж, переменные и постоянные затраты, амортизационные отчисления, а также необходимые по проекту вложения во внеоборотные активы
	Доля заемного капитала в источниках капитала корпорации'
	Цена заемного капитала
	Цена собственного капитала

При разработке долгосрочного плана корпорации могут быть рассмотрены, например, такие три варианта ограничений на предложение собственного капитала для инвестиционной деятельности: (1) инвестирование собственного капитала не предусматривается; (2) в течение трех лет осуществляется дополнительная эмиссия акций на сумму 10 млн руб. в год; (3) в течение трех лет осуществляется дополнительная эмцссия акций на сумму 30 млн руб. в год. Для каждого из этих вариантов рассчитываются значения чистого дисконтированного дохода (результата производственно-хозяйственной деятельности) корпорации при изменении доли заемного капитала в общих источниках средств в диапазоне от 0,0% до 30,0% с шагом в 3%. Величина ставки налога на прибыль была принята в размере 35%, цена собственного капитала определена в размере 30%, цена заемного капитала — 25%, а также используемые в практике производственно-хозяйственной деятельности корпорации нормы оборачиваемости оборотного капитала.

Таблица 107

Параметр оптимального плана	Значение параметра				
Общая потребность в инвестициях во внеоборотные активы	**460,7 млн руб.**				
Доля заемного капитала	**27%**				
Чистый дисконтированный доход за период	**417,4 млн руб.**				
WACC	**26,3%**				
Выплаченные дивиденды	**568,0 млн руб.**				
	Период				
	***t* = 1**	***t*=2**	***t* = 3**	**г = 4**	***t* = 5**
Целевое изменение запасов, млн руб.	**273,7**	**0,0**	**0,0**	**0,0**	**0,0**
Целевое изменение дебиторской задолженности, млн руб.	**177,9**	**0,0**	**0,0**	**0,0**	**0,0**
Целевое изменение кредиторской задолженности, млн руб.	**410,4**	**0,0**	**0,0**	**0,0**	**0,0**
Выплаты по дивидендам, млн руб.	**31,4**	**58,7**	**82,9**	**107,8**	**137,0**
Потребность в собственном капитале, млн руб.	**30,0**	**27,4**	**10,6**	**0,0**	**0,0**

По итогам расчетов формируется оптимальный план — перечень проектов, включаемых в инвестиционный бюджет корпорации, общая потребность в инвестициях согласно оптимальному плану, а также расчетный результат производственно-хозяйственной деятельности корпорации (табл. 107).

15.10. ОПЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

Широко используемая в настоящее время для оценки капитальных вложений методология дисконтированного денежного потока имеет недостатки.

1. Оценка ожидаемых денежных потоков ложна, так как требуется большая точность в предсказании изменения цен на выпускаемую продукцию и потребляемые ресурсы на несколько лет вперед. Ошибка велика как в вычислении будущих денежных потоков, так и при определении соответствующей безрисковой ставки процента.

2. Практическое использование принципа *DCF* крайне затруднено, когда проект включает один или несколько значительных операционных опционов. Операционные опционы

возникают, когда менеджмент может отложить принятие решения о характере операции до какого-либо момента на будущее, когда будет разрешена какая-нибудь значительная неопределенность. Подобные операционные опционы усложняют расчет ожидаемых денежных потоков, безрисковых процентных ставок из-за сложной структуры рисков.

3. Принцип дисконтированного денежного потока косвенно предполагает, что фирмы держат реальные активы пассивно. При его использовании не учитываются опционы, заложенные в реальных активах. Но финансовый менеджер может активно использовать их, предпринимая действия для нивелирования потерь по проектам или реализовывая потенциальные новые возможности.

Американские ученые С. Мейсон, Р. Мертон и Е. Альтман предположили, что должен быть сформулирован новый принцип оценки капитальных вложений, включающий в себя теорию ценообразования опционов на финансовых рынках ее развитым математическим аппаратом. Для этого необходимо провести аналогию между финансовыми опционами и операционными опционами, другими словами, представить инвестиционный проект как опционный контракт.

Опционный контракт — документ, удостоверяющий право покупки или продажи товара, валюты или ценных бумаг по оговоренной цене. Различают европейский опцион, допускающий покупку или продажу в определенный день, и американский опцион, допускающий покупку или продажу до определенного дня. Контракт на покупку называется caZZ-опционом, на продажу — /ш£-опционом.

Новый принцип оценки капитальных вложений сейчас находит на Западе все более широкое применение в практике анализа инвестиционных проектов в самых разных отраслях: горнодобывающая промышленность, добыча полезных ископаемых, перерабатывающая промышленность, машиностроение.

Модель Блэка-Шоулза *(Black-Scholes option pricing model)* была разработана в 1973 г. для оценки премии европейских caZZ-опционов на акции. В основу модели положена концепция формирования безрискового портфеля активов, динамика стоимости которых не зависит от динамики курса акций. Рассматривался портфель, состоящий из акций и опциона.

При построении модели учитывался ряд ограничений:

Ш краткосрочные процентные ставки известны и постоянны в течение срока действия опциона; краткосрочные кредитные и депозитные процентные ставки одинаковы;

Ш цена акции изменяется случайным образом с дисперсией, пропорциональной квадрату цены акции, поэтому распределение возможных значений цен акций является логнормальным, дисперсия доходов по акциям постоянна;

Ш не учитываются операционные расходы на покупку/продажу опциона и акций, а также налоги.

Условие, согласно которому доходность безрискового портфеля, состоящего из акций и опционов, равна безрисковой ставке процента в любой момент времени, описывается с помощью частного дифференциального уравнения, решением которого и является формула Блэка-Шоулза.

В соответствии с этой формулой стоимость европейского ca/Z-опциона определяется разностью между ожидаемым взвешенным курсом базового актива и ожидаемой дисконтированной величиной цены использования (издержками) данного опциона:

$$C = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}};\ d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

где C — премия европейского call-опциона; S — цена базового актива (цена акции по рыночным данным); K — цена исполнения; T — время, оставшееся до момента исполнения опциона; r — безрисковая процентная ставка; σ — стандартное отклонение цены базового актива; $N(d)$ — функция нормального распределения.

Для определения $N(d)$ можно использовать таблицы для стандартной нормальной кривой или Excel-функцию НОРМСТРАСП(d). Она возвращает стандартное нормальное интегральное распределение, которое имеет среднее, равное нулю, и стандартное отклонение, равное единице.

Уравнение плотности стандартного нормального распределения имеет следующий вид:

$$\text{НОРМСТРАСП}(d) = \frac{1}{\sqrt{2\text{тс}}} \cdot e^{-\frac{d^2}{2}},$$

где d — это значение, для которого строится распределение.

Пример 1. Требуется оценить с<Ш-опцион на акции с ценой исполнения 60 д. е. и остаточным периодом 3 месяца. Безрисковая процентная ставка — 12% годовых. Текущий курс акции — 59 д. е., волатильность курса акции — 20%.

Стоимость этого опциона составляет 2,2058 д. е. (табл. 108).

Если равновесная цена опциона больше рыночной, то инвестор может продать опцион; если же меньше, то купить опцион.

Таблица 108

№ строки	Столбец A	Столбец B	Расчетная формула
1	K	60	
2	T	3	
3	r	12%	
4	S	58	
5	s	20%	
6	d_1	0,0110	=(LN(B4/B1) + (B3 + (B5^2)/2)*(B2/12))/(B5*((B2/12)^0,5))
7	d_2	–0,0890	=(LN(B4/B1) + (B3 – (B5^2/2)*(B2/12))/(B5*((B2/12)^0,5))
8	$N(d_1)$	0,5044	=НОРМСТРАСП(B6)
9	$N(d_2)$	0,4645	=НОРМСТРАСП(B7)
10	C	2,2058	=B4*B8 – B1*B9*EXP(–B3*B2/12)

Зная, что $1 - N(d) = N(-d)$, можно определить стоимость европейского *put*-опциона:

$$P = -S \cdot N(-d_1) + Ke^{-rT} \cdot N(-d_2).$$

Формулы позволяют рассчитывать не только размеры премий, но и решать обратную задачу — подбирать цены исполнения или даты истечения контракта. Это дает возможность анализировать итоги торгов, приводя премии по разным видам опционов (*call*, *put*) и разным ценам исполнения к «общему знаменателю».

Адаптация модели Блэка–Шоулза к материальным объектам инвестирования (земельные участки, месторождения, здания, сооружения, оборудование, технологии и др.) проявляется в трактовке и методах расчета соответствующих параметров модели.

Если фирма связана с разработкой месторождения, то трактовка параметров модели будет такова: S — текущая стоимость разработанного месторождения; K — затраты на разработку месторождения; T — срок, отведенный на разработку месторождения; σ — стандартное отклонение стоимости разработанного месторождения; r — безрисковая проектная ставка; $N(d)$ — функция нормального распределения.

Пример 2. Предположим, что существует нефтяное месторождение со следующими параметрами:

Ж объем месторождения — до 100 млн баррелей в год;

Ш текущая стоимость затрат на разработку — 11,79 у. е. за один баррель;

Ш временной разрыв между добычей и разработкой составляет 3 года;

Ш срок разработки — 10 лет;

Ш ожидаемое стандартное отклонение — 14,2%;

Ш коэффициент выплаты прибыли (отношение суммы выплачиваемых дивидендов к объему чистой прибыли) — 4,1%;

Ш стоимость разработанного месторождения в настоящее время — 12 у. е. за один баррель.

Используя формулу, с учетом новой трактовки переменных рассчитаем значения цены опциона на разработку месторождения в расчете 1 у. е. затрат на разработку при различных значениях параметров *V/D, a, T*. Результаты расчета представлены в таблице 109.

Первоначально рассчитывают текущую стоимость разработанного месторождения $V = 12/(1 + 0{,}041) = 10{,}61$ у. е.

Далее рассчитывают коэффициент $C = V/D$, где V — текущая стоимость разработанного месторождения, полученного после ожидавшегося временного разрыва; D — затраты на разработку месторождения. Отсюда

$$C = 10{,}61/11{,}79 = 0{,}90.$$

Теперь определяют стоимость неразработанного месторождения *DV*, используя рассчитанные значения из таблицы 109. Для T = 10 лет, а = 14,2% имеем

$$DV = 0{,}0524 \cdot 11{,}79 \cdot 100\,000\,000 = 61\,838\,550 \text{ у. е.}$$

Смысл полученного результата состоит в том, что право разрабатывать месторождение в будущем в настоящее время имеет положительную стоимость DV = 61 млн у. е.

Таблица 109

V/D	а = 14,2%			V/D	ст = 14,2%		
	Г=б	Т= 10	Т= 15		Г=5	Т= ю	Т= 15
Опцион с «проигрышем»							
0,70	0,0065	0,0132	0,0170	0,85	0,0276	0,0389	0,0443
0,75	0,0112	0,0196	0,0241	0,90	0,0402	0,0524	0,0580
0,80	0,0181	0,0281	0,0331	0,95	0,0564	0,0689	0,0746
Опцион с «выигрышем»							
1,00	0,0766	0,0889	0,0943	1,10	0,1304	0,1403	0,1446
1,05	0,1011	0,1125	0,1175	1,15	0,1647	0,1724	0,1760

В основе любого инвестиционного проекта лежат три важных реальных опциона: опцион на продолжение инвестиций, опцион на отказ от проекта и опцион на выжидание (и анализ ситуации), прежде чем инвестировать. Эти опционы позволяют менеджерам увеличивать стоимость бизнеса, расширяя его возможности или уменьшая потери.

Опцион на продолжение инвестиций означает, что проект помимо потоков денежных средств непосредственно от самого проекта порождает caZZ-опцион на последующие проекты, т. е. реализация проекта сегодня порождает благоприятные инвестиционные возможности на завтра (а это и есть опционный контракт).

Пример 3. Пусть разрабатываемый проект характеризуется следующими параметрами:

Ш решение об инвестировании проекта может быть принято через 2 года;

ш объем инвестиций в проект (цена исполнения) составляет 2 млн у. е.;

Ш приведенная стоимость прогнозируемых денежных потоков составляет 16 млн у. е.;

Ш будущей стоимости потоков денежных средств от проекта свойственна высокая неопределенность. Поведение этой стоимости подобно поведению цен на акции со стандартным отклонением 70% в год;

Ш безрисковая ставка составляет 55% годовых.

Потоки денежных средств и финансовый анализ эффективности вложений по принципу дисконтированного денежного потока представлены в таблице 110.

Для определения возможности инвестирования в последующие проекты определяют стоимость caZZ-опциона по формуле Блэка-Шоулза: C = 4285,1 тыс. у. е.

Та блица 110

Годы					
0	1	2	3	4	5
Финансовые параметры про !Кта					
Поток денежных средств от реализации проекта					
—	12 100,59	11 771,30	11 800,64	11 828,14	11 854,06
Инвестиции в проект					
38 752,2	—	—	—	—	—
Чистая приведенная стоимость проекта					
4078,7 тыс. у. е.					

12-2917

Таким образом, стоимость проекта равна его собственной чистой приведенной стоимости (4078,7) и стоимости связанного с ним опциона ***call*** (4285,1), что в итоге дает 8363,8 тыс. у. е.

Если на рынке события развиваются в неблагоприятном направлении, то проект можно отменить, т. е. продать его активы по их рыночной цене. В этом случае необходимо оценить опцион на прекращение бизнеса. Для этой оценки Д. Кенсингер модифицировал модель Блэка-Шоулза.

Смысл предложенного им подхода состоит в том, что возможность (опцион) ухода из инвестиционного проекта (сокращение убытков и возмещение части первоначальных инвестиций путем продажи части активов) рассматривается подобно владению страховым полисом, по которому производятся выплаты, если проект обеспечивает результат «ниже номинала». Цена этого полиса определяется как сумма чисто дисконтированной стоимости и стоимости опциона.

Рис. 52

Рассмотрим подход к оценке опциона на отказ на примере одного из инвестиционных проектов фирмы — приобретение установки.

Пример 4. Фирма рассматривает возможность покупки новой установки стоимостью 120 ООО у. е. По оценке отдела маркетинга и сбыта стоимость бизнеса может либо вырасти на 33% с вероятностью 0,6, либо уменьшиться на 25% с вероятностью 0,4. Возможные результаты приобретения показаны на рисунке 52.

Ожидаемый поток денежных средств по инвестиционному проекту составит 0,6 · 150 000 + 0,4 · 70 000 = 118 000 у. е.

Приведенная стоимость проекта равна 118 000/(1 + 0,16) = = 101 724 у. е.

Таким образом, чистая приведенная стоимость составтr crOf·

101 724 - 120 000 = -18 276 у. е.

Приведенные расчеты не включают возможности отказа от бизнеса. Так как вероятность неудачного развития событий на рынке достаточно высока, то можно предположить, что лучше заранее продать оборудование стоимостью

120 000 у. е., чем продолжать бизнес, стоимость которого может составить 70 000 у. е.

Для оценки стоимости опциона на отказ необходимо оценить стоимость *put*-опциона для периода в один год на установку с ценой исполнения 120 000 у. е. Имеется следующая информация:

- цена исполнения — 120 000 у. е.;
- приведенная стоимость проекта без опциона на отказ — 101 724 у. е.;
- время, оставшееся до исполнения опциона, — 1 год;
- процентная ставка — 16%;
- будущая стоимость проекта при высоком спросе — 150 000 у. е.;
- будущая стоимость проекта при низком спросе — 70 000 у. е.

Так как в развитии бизнеса предполагается, что возможны два результата, то для определения стоимости опциона на отказ возможно применение биноминальной модели, которую разработали У. Шарп, Д. Кокс, С. Росс и М. Рубинштейн.

Уравнение **однопериодной биноминальной модели** ценообразования европейских опционных контрактов *put* на акции, не выплачивающие дивидендов, имеет вид:

$$C = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{(1+r)},$$

$$p = (r - d) / (u - d).$$

Для нашего проекта $r = 16\%$; $u = 33\%$; $d = -25\%$; $K = 120\,000$ у. е.; $S = 101\,724$.

Подставляя нужные значения в формулы, получаем:

$$p = \frac{0,16-(-0,25)}{0,33-(-0,25)} = 0,517;$$

стоимость *put*-опциона:

$$C = \frac{0,517C_U + (1-0,517)C_d}{1+0,16}.$$

Числитель этой формулы показывает ожидаемую будущую стоимость опциона на отказ от бизнеса.

Внутренняя стоимость опциона *put* определяется как max (0; $K - S$). Эта формула означает, что если бизнес будет успешным, то опцион на отказ P_u обесценится. Если же бизнес не будет успешным, то фирма исполнит опцион P_L (продав оборудование за 120 000 у. е. и сэкономив 50 000 у. е. (120 000 – 70 000)).

Таким образом, стоимость *put*-опциона:

$$C = \frac{0,517 + (1 - 0,517) \cdot 50\ 000}{1 + 0,16} = 20\ 819 \text{ у. е.}$$

Следовательно, стоимость бизнеса с учетом опциона на отказ возрастает на 20 819 у. е. и составляет

101 724 + 20 819 = 122 543 у. е.,

а величина скорректированной чистой дисконтированной стоимости дает значение

20 819 – 18 276 = 2543 у. е.

Опционное время для осуществления инвестиций выбрать легко, если нет никакой неопределенности. Для этого вычисляют приведенную стоимость инвестиционного проекта на различные даты инвестирования и выбирают тот период, в котором приведенная стоимость имеет максимальное значение. Однако принцип не работает в условиях неопределенности.

Если проект не подпадает под принцип «сейчас или никогда» (необходимо инвестировать проект немедленно или подождать; риски, связанные с его осуществлением, высоки; проект имеет положительную чистую приведенную стоимость), то возникает проблема выбора оптимального времени для осуществления инвестиций. Решение начать или отложить осуществление инвестиций равносильно решению исполнить *call*-опцион немедленно или подождать и исполнить его позже.

Для определения времени начала инвестирования проекта могут быть использованы биномиальные модели.

Однопериодная биномиальная модель оценки опционных контрактов *call* на акции, не выплачивающие дивидендов, описывается выражением:

$$C = \frac{pC_{Tu} + (1-p)C_{Td}}{(1+r)},$$

$$p = (r-d)/(u-d);$$

$$C_{Tu} = \max\left[0;\ (1+u)S_{T-1} - K\right],$$

$$C_{Td} = \max\left[0;\ (1+d)S_{T-1} - K\right],$$

где u — сдвиг цены акции вверх; d — сдвиг цены акции вниз; r — безрисковая процентная ставка ($u > r > d$). Если $r > u$, то необходимо продать акции и инвестировать вырученную сумму под безрисковый процент r, если же $d > r$, то необходимо взять кредит под безрисковый процент r и купить акции.

Двухпериодная биномиальная модель оценки опционных контрактов имеет вид:

$$C = \frac{p^2 C_{Tuu} + 2p(1-p)C_{Tud} + (1-p)^2 C_{Tdd}}{(1+r)^2},$$

где

$$C_{Tuu} = \max\left[0;\ (1+u)^2 S_{T-2} - K\right];$$

$$C_{T_{Tud}} = \max\left[0;\ (1+u)(1+d)S_{T-2} - K\right];$$

$$C_{Tdd} = \max\left[0;\ (1+d)S_{T-2} - K\right].$$

Многопериодная биномиальная модель оценки опционных контрактов представляется выражением:

$$C = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=a}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!}\, p^j (1-p)^{n-j} \left[(1+u)^j (1+d)^{n-j} S_{T-n} - K\right].$$

Использование биноминальной модели при разбиении временного интервала, оставшегося до исполнения опциона, на 5 периодов дает результаты, приблизительно совпадающие с результатами расчета по формуле Блэка–Шоулза.

ГЛАВА 16

МОДЕЛИ АНТИКРИЗИСНОГО МЕНЕДЖМЕНТА

Увидеть можно только то, что есть, а то, что есть, — это уже не будущее, а настоящее. И когда о будущем говорят, что его видят, то видят не его — будущего еще нет, — а, вероятно, его причины или признаки, которые уже налицо.

Аврелий Августин

Некто продает двух коней с седлами, из коих цена одного седла] 120 руклей, а другого — 25 руклей. Первый конь с хорошим седлом втрое дороже другого с дешевым седлом, л другой конь с хорошим седлом вдвое дешевле первого коня с- дешевым седлом. Какова цена каждого коня?

Старинная задача

V

16.1. МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ РЕОРГАНИЗАЦИОННОЙ ПОЛИТИКИ

ДЛЯ большинства неплатежеспособных предприятий неудовлетворительная структура баланса отождествляется с отставанием фактического уровня текущей ликвидности от его норматива ($К_{тл} < 2$) даже при достаточном уровне обеспеченности собственными средствами ($К_{осс} \wedge 0,1$).

Реорганизационные политики — процедуры реструктуризации балансов — позволяют перевести их в удовлетворительную структуру за счет реализации специально подобранного комплекса организационно-технических мероприятий. Но однозначно выбрать для практической реализации из возможных вариантов «чистых» и «смешанных» реорганизационных политик один, наиболее рациональный, затруднительно, так как, если по прогнозируемым показателям платежеспособности, структуры баланса они равнозначны, то по прогнозным финансовым результатам могут быть противоречивыми.

Оценить предпочтительность каждого из этих вариантов оказывается возможным, если сформулировать задачу оптимизации реорганизационных политик. Экономическая интерпретация и математическая постановка задачи будут определяться текущим уровнем финансовой состоятельности, прежде всего сложившимся уровнем платежеспособности.

Для неплатежеспособных предприятий, находящихся в пред- или кризисном состояниях, постановка задачи оптимизации выбора направлений текущей деятельности будет заключаться в выборе наиболее эффективной реорганизационной для этой деятельности политики управления активами и пассивами.

Для финансово устойчивых предприятий постановка задачи оптимизации сводится к поддержанию и развитию достигнутого уровня финансовой устойчивости за счет реализации такого комплекса организационно-технических мероприятий по функциям управления деятельностью, которые обеспечили бы возможность совершенствования большинства основных показателей финансовой состоятельности.

Задача оптимизации основных параметров текущей деятельности может быть представлена следующей, общей постановкой:

$$\min F(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i;$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = q; \\ w = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \alpha; \\ p_i' = p_i x_i = p_i''; \qquad (i = \overline{1,n}); \\ x_i - x_i + 1 > 0; \qquad (i = \overline{1,n-1}). \end{cases}$$

где $F(x_i)$ — целевая функция задачи; n — число направлений реорганизационной политики (число независимых искомых переменных); δ_1 — нормированная экспертная оценка приоритетности i-го направления текущей деятельности; $x_i (i = \overline{1,n})$ — искомые независимые переменные, вектор управления структурой имущества (искомая величина продаж одного вида средств, приобретения другого, погашения долгов); w — константа обеспечения текущей ликвидности (w = 2КЗ − ОА; КЗ — краткосрочная задолженность, ОА — оборотные активы); $a_i (i = \overline{1,n})$ — коэффициенты при неизвестных переменных в ограничении на обеспеченность собственными оборотными средствами; q — минимально допустимый уровень обеспеченности собственными оборотными средствами (q = ВА + 0,1 · ОА − КР; ВА — внеоборотные активы, КР — капитал и резервы); α — верхний предел допустимых продаж и приобретений активов; ρ_i', $\rho_i''(i = \overline{1,n})$ — соответственно нижняя и верхняя границы изменения i-го вида активов; $\rho_i (i = \overline{1,n})$ — удельный вес i-го вида активов предприятия в общей стоимости его имущества.

Таким образом, применительно к типичной неудовлетворительной структуре баланса $К_{ТЛ} < 2$, $К_{ОСС} = 0,1$, характерной для большинства неплатежеспособных предприятий, возможны направления реорганизационной политики, отображаемые схемой:

ВА — x\	КР
ОА + (xi - хг)	КЗ-Х2
А - хг	

Для этой схемы реструктуризации предельно допустимые параметры выбранной политики определятся из следующих соотношений между структурными разделами баланса, ограниченными нижними нормативными значениями показателей платежеспособности:

$$К_{ТЛ} = \frac{ОА + x_1 - x_2}{КЗ - x_2} = 2; \quad К_{ОСС} = \frac{КР - ВА + x_1}{ОА + x_1 - x_2} = 0,1;$$

а также возможностей практической реализации

$$x_2 - x_1 = \alpha \cdot ОА;$$
$$x_1 = \beta \cdot ВА;$$
$$x_2 = \gamma \cdot КЗ,$$

где α, β, γ — предельно допустимые для сохранения статуса деятельности предприятия размеры уменьшения оборотных активов (например, до 20%), внеоборотных активов (10%), краткосрочной задолженности (50%).

Реальность тактических реорганизаций структуры средств предприятия и их источников требует минимальных воздействий на составляющие разделов баланса. Тогда целевая функция такого воздействия запишется:

$$\min\,(\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2),$$

где δ_1, δ_2 — экспертные оценки значимости (приоритетности) тех или иных направлений реорганизации деятельности: продаж имущества, восполнения оборотных активов или погашения наиболее срочных обязательств; $\delta_1, \delta_2 = 0$; $\delta_1 + \delta_2 = 1$.

Пример 1. Пусть известен для одного из исследуемых предприятий отчетный агрегированный нетто-баланс (млн руб.), структура которого неудовлетворительна, и выбраны направления реструктуризации этого баланса:

ВА = 48 - xi	КР = 677
ОА = 173 + xi - хг	КЗ = 121-x_2
А = 821-x_2	

Применительно к сложившейся структуре имущества предприятия и выбранной схеме его реорганизации, а так-

же в соответствии с общей оптимизационной моделью тактики управления активами и пассивами конкретная задача реструктурной оптимизации тактических параметров запишется:

$$\min(\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2);$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2КЗ - ОА = 69; \\ 0,9x_1 + 0,1x_2 = ВА + 0,1 \cdot ОА - КР = -611,7; \\ -x_1 + x_2 = 0,2 \cdot ОА = 34,6; \\ 0 = x_1 = 64,8; \\ 0 = x_2 = 0,5 \cdot КЗ = 60,5. \end{cases}$$

Здесь в двух последних граничных условиях нижние значения искомых переменных конкретно пока не заданы, так как определение области граничных условий, связанное с учетом особенностей инвестирования, требует отдельного рассмотрения. При задании экспертизой равнозначности различных направлений реструктуризации $\delta_1 = \delta_2 = 0,5$ или приоритетности наиболее срочного погашения обязательств, например $\delta_1 = 0,2$; $\delta_2 = 0,8$, можно установить оптимальные значения параметров соответствующих антикризисных реорганизационных политик.

В первом случае оптимум неопределенный, во втором — оптимальное решение:

$$X^0 = \{64,8;\ 4,2\},$$
$$\min F(x_i) = F^0 = 0,2 \cdot 64,8 + 0,8 \cdot 4,2 = 16,32 \text{ млн руб.}$$

При приоритетности, по мнению экспертов, продаж части активов, в частности основных средств и запасов, например при $\delta_1 = 0,8$; $\delta_2 = 0,2$, вектор оптимального плана и оптимум задачи соответственно составят:

$$X^0 = \{17,2;\ 51,8\};\ F^0 = 24,12 \text{ млн руб.}$$

Каждой из этих политик будут соответствовать свои прогнозные балансы удовлетворительной структуры:

при $\delta_1 = 0,2$; $\delta_2 = 0,8$

ВА = 648 - 64,8 = 583,2	КР = 677
ОА = 173 + 64,8 - 4,2 = 233,6	К З = 121-4,2= 116,8
А = 821-4,2 = 816,8	Ктл = 2; Косе = 0,4

при б! = 0,8; 5_2 = 0,2

ВА = 648- 17,2 = 630,8	КР = 677
ОА = 173 + 17,2 - 51,8 = 138,4	КЗ = 121 - 51,8 = 69,2
А = 821-51,8 = 769,2	Ктл = 2; Косе = 0,33

Используя предложенную общую постановку задачи, можно поставить задачи оптимизации текущих реорганизационных политик применительно к каждой схеме реструктуризации баланса, соответствующей тому или иному сочетанию фактических значений показателей платежеспособности предприятия. Так, для схемы реструктуризации, выбираемой при $K_{ТЛ} \le 2$, $K_{ОСС} \le 0{,}1$, соответствующая ей задача оптимизации запишется:

$$\min\left(\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2\right);$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le -КЗ - ОА; & (1) \\ 0{,}9x_1 + 0{,}1x_2 \ge ВА + 0{,}1 \cdot ОА - КР; & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 0{,}2 \cdot ОА = 34{,}6; & (3) \\ x_1 > ВА - КР; & (4) \\ x_1 - x_2 \ge ВА + ОА; & (5) \\ 0 \le x_2 \le 0{,}5, & (6) \end{cases}$$

где ограничения (1), (2) отражают требования обеспечения нормативного уровня соответственно текущей ликвидности и обеспеченности собственными средствами; ограничение (3) — о предельно допустимых объемах продаж оборотных активов, при которых сохраняется статус предприятия (не свыше, например 20% их исходной величины); ограничение (4) — соблюдение необходимых для обеспечения финансовой устойчивости балансовых пропорций, в частности не превышение труднореализуемых активов ВА над постоянными пассивами КР; ограничение (5) — обеспечение рентабельности деятельности на уровне не ниже средней расчетной ставки процента; ограничение (6) — о допустимых пределах погашения краткосрочной задолженности.

Для схемы, которая выбирается при значениях платежеспособности $K_{ТЛ} \ge 2$, $K_{ОСС} < 0{,}1$, задача оптимальной параметризации реорганизационной политики будет иметь вид:

$$\min\left(\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2\right);$$

$$\begin{cases} x_2 \ge 2КЗ - ОА; & (1) \\ -x_1 + x_2 \le 0{,}1 \cdot ВА; & (2) \\ x_1 + x_2 \ge ВА + ОА; & (3) \\ x_1 \ge 2 & (4) \\ 0{,}5 \cdot КЗ \ge x_2 \ge d, & (5) \end{cases}$$

где d — нижний предел искомой величины объема продаж, устанавливаемый из условия:

$$d = \min\{2КЗ - ОА;\ ВА - КР + 0{,}1 \cdot ОА\}.$$

Правая часть ограничений (1), (2) устанавливает требования обеспечения нормативного уровня текущей ликвидности и обеспеченности собственными средствами; левая часть — верхнюю границу погашения краткосрочной задолженности (равной, например, 0,5КЗ). Разумеется, доля погашения наиболее срочных обязательств в объеме краткосрочной задолженности должна устанавливаться из приоритетности тех или иных платежей, исходя из конкретных сложившихся условий производственной и финансовой деятельности предприятия.

Любая из этих постановок обеспечивает предприятию, прежде всего, переход на более высокий уровень финансовой состоятельности. Эта возможность достижима за счет подбора и осуществления комплекса организационно-технических мероприятий, адекватного найденным оптимальным значениям параметров выбранной реорганизационной политики, а также создает реальные предпосылки оптимизации стратегии развития.

16.2. МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ

Экономико-организационными предпосылками построения оптимальных стратегий развития предприятий могут быть следующие условия:

- четко сформулированная и обоснованная генеральная цель — корпоративная миссия предприятия по конкретным направлениям деятельности и развития;
- удовлетворительная структура баланса, а также достаточный уровень финансовой устойчивости (платежеспособности);
- возможность развития производства стратегической группы товаров за счет привлечения на цели развития как внешних, так и собственных источников инвестиций.

При наличии таких общих предпосылок возможность устойчивого и эффективного в стратегической перспективе развития может быть достигнута, например, при реализации следующей схемы (процедуры) управления активами и пассивами (см. рис. 53).

Экономическая интерпретация этой схемы комбинированного инвестирования заключается в следующем.

1. Первоочередным импульсом стратегического развития могут выступать средства внешнего кредитования — долгосрочные кредиты и займы (ДКЗ), которые в концепции финансового анализа трактуются как собственные средства

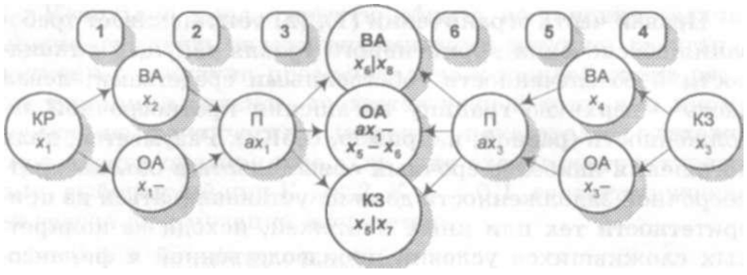


Рис. 53

предприятия, а также источники собственных средств: фонд накопления, нераспределенная прибыль предыдущих периодов, сальдо результатов прочей реализации — в суммарном объеме ***Xi*** (предполагается, что все денежные потоки дисконтированы по фактору времени и темпам инфляции).

Эти средства распределяются по двум направлениям. В размере x_2 — на собственно цели развития, связанные с перепрофилированием предприятия, модернизацией и расширением производственных мощностей, технической подготовкой производства и маркетингом продукции стратегической группы, реализация которых требует прироста внеоборотных активов (ВА). Другая часть этих источников средств (*! - x_2) — на прирост оборотных активов (ОА), прежде всего запасов и затрат, обусловленных освоением производства стратегической группы продукции и производством тактической группы.

2. Предполагается, что инвестиционный проект обоснован возможностью достижения (за счет реализации содержащихся в нем направлений развития) достаточной нормы прибыли на инвестируемый капитал, т. е. в размере, не меньшем средней расчетной ставки процента (СРСП) по заемным средствам, а это означает, что результатом инвестиций должно быть получение нераспределенной (чистой) прибыли в размере, не меньшем ***axi*** (где ***a*** = СРСП).

3. Наряду с долгосрочными кредитами и займами в качестве краткосрочных кредитов и займов (ККЗ) служат средства кредиторской задолженности (КЗ) — в размере x_3, которые также распределяются: в объеме x_4 — на цели развития (прирост ВА); в объеме ($x_3 - x_4$) — на цели текущего производства (восполнение и прирост запасов ОА).

4. В свою очередь, вновь образованная прибыль ***ax***\ может быть распределена уже по трем направлениям: в размере x_5 — на погашение наиболее срочных обязательств по платежам в бюджеты всех уровней и внебюджетные фон-

ды, кредиторской задолженности поставщикам, подрядчикам и персоналу предприятия, уплате процентов за пользование банковским кредитом; в размере x_6 — на цели развития, требующие прироста ВА; в размере $(ax_1 - x_5 - x_6)$ — на прирост ОА.

5. Предполагается, что результатом использования кредитных средств в объеме x_3 должно быть получение нераспределенной (чистой) прибыли ax_3.

6. Полученная прибыль ax_3 также подлежит последующему распределению по трем направлениям: в объеме x_7 — на очередные и своевременные погашения краткосрочной задолженности; в объеме x_8 — на цели развития (прирост ВА); в объеме $(ax_3 - x_7 - x_8)$ — на цели текущего производства (прирост ОА).

В соответствии с этой схемой могут быть формализованы ограничения и граничные условия. Они определят область таких значений параметров стратегии развития, которые были бы допустимыми по требованиям обеспечения финансовой устойчивости.

Наиболее обобщающим функционалом развития представляется рентабельность активов:

$$RA = \frac{x_1 + a(x_1 + x_3)}{\text{ВА} + \text{ОА} + x_1 + a(x_1 + x_3) + x_3 - x_5 - x_7},$$

или прирост чистой рентабельности активов:

$$\Delta R'A = \frac{a(x_1 + x_3)}{x_1 + a(x_1 + x_3) + x_3 - x_5 - x_7} = \frac{a(x_1 + x_3)}{(1 + a)(x_1 + x_3) - x_5 - x_7}.$$

В качестве целевой функции формирования стратегии развития могут быть использованы и другие функционалы, например:

- выручка (прогнозная) от реализации стратегической и тактической групп товаров

$$\text{В} = \frac{\text{В}_{t-1}(\text{ОА} - \text{КЗ} + x_1 - x_2 + ax_1 + ax_3 - x_4 - x_6 - x_8)}{\text{ОА} - \text{КЗ}},$$

где В_{t-1}, (ОА − КЗ) — соответственно выручка и чистые оборотные активы отчетного периода, как константы, могут быть исключены на время решения задачи оптимизации стратегии развития; тогда можно принять целевую функцию прогнозной выручки несколько иного вида:

$$\text{В}' = x_1 - x_2 + ax_1 + ax_3 - x_4 - x_6 - x_8;$$

- прибыль от реализации:

$$\text{ЧП} = a(x_1 + x_3),$$

где a — величина единичной эффективности инвестиционных ресурсов («норма прибыли на капитал») может быть задана параметрически.

Согласно предложенной схеме реализации стратегии развития может быть представлена следующая структура перспективного прогнозного баланса:

Процедура формирования и распределения средств на цели стратегии развития (цифровые обозначения стрелок соответствуют этапам формирования и использования средств)

↓❶ ↓❹ $BA + x_2 + x_4 + x_6 + x_8$ ↑❸ ↑❻	↖❶ ↓❷ ↘❺ ↑❻ $КР + x_1 + ax_1 + ax_3$ ↙❶ ↙❹ ↓ ❻↙
↓❶ ↓❸ ↓❹ ↓❻ $ОА + (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + (ax_1 - x_5 - x_6) + (ax_3 - x_7 - x_8)$ ↓❷ ↓❺	↖❸ ↓❹ ↓❻ $КЗ + x_3 - x_5 - x_7$ ↙❸
$A + x_1 + ax_1 + x_3 + ax_3 - x_5 - x_7$	

Имущество предприятия, его технический потенциал за срок реализации соответствующего инвестиционного проекта увеличится и составит:

$$A + x_1 + ax_1 + x_3 + ax_3 - x_5 - x_7.$$

Корректность предложенной схемы формирования и использования инвестиционных средств подтверждается соблюдением основного балансового тождества, а также включением в эту схему ряда других балансовых соотношений и пропорций хозяйственного развития моделируемого производственного объекта:

- уменьшение (продажа) оборотных активов в процессе стратегического развития не предусматривается:

$$x_1 - x_2 = 0;$$

- размер погашаемой кредиторской задолженности не должен превышать ожидаемой от использования всех источников инвестиций нераспределенной прибыли, причем величина погашения вновь образованной краткосрочной задолженности не должна превышать ее среднего значения:

$$ax_1 + ax_3 - (x_5 + x_7) = 0{,}5(КЗ + x_3);$$

- аналогичные остальные балансовые соотношения:

$$x_3 - x_4 = 0;$$
$$ax_1 - x_5 - x_6 = 0;$$
$$ax_3 - x_7 - x_8 = 0;$$

- непревышение трудногреализуемых внеоборотных активов над постоянными пассивами — капиталом и резервами, что обеспечит соблюдение и других важнейших балансовых пропорций устойчивого бескризисного развития:

$$КР - BA + x_1 + ax_1 + ax_3 >$$
$$> КР - BA + x_2 + x_4 + x_6 + x_8.$$

Отсюда:

$$x_1 - x_2 + ax_1 + ax_3 - x_2 - x_4 - x_6 - x_8 = 0;$$

- текущая платежеспособность в процессе стратегического развития не должна утрачиваться, т. е. разрывы ликвидности не допускаются, и ее уровень не может быть ниже, чем достигнутый на начало срока реализации инвестиционного проекта:

$$\frac{ОА + x_1 - x_2 + ax_1 + x_3 + ax_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8}{КЗ + x_3 - x_5 - x_7} = \frac{ОА}{КЗ};$$

- то же, по уровню обеспеченности собственными средствами:

$$\frac{КР + x_1 + ax_1 + ax_3 - (BA + x_2 + x_4 + x_6 + x_8)}{ОА + (x_1 - x_2) + ax_1 + x_3 + ax_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8} = \frac{КР - BA}{ОА};$$

- оборачиваемость активов не может быть снижена в результате реализации стратегии развития:

$$\frac{B(ОА + x_1 - x_2 + ax_1 + ax_3 - x_5 - x_6 - x_7 - КЗ)}{(ОА - КЗ)(BA + ОА + x_1 + ax_1 + x_3 + ax_3 - x_4)} = \frac{B}{BA + ОА};$$

или, что то же самое,

$$(BA + ОА)(ОА + x_1 - x_2 + ax_1 + ax_3 - x_5 - x_6 - x_7 - КЗ) =$$
$$= (ОА - КЗ)(BA + ОА + x_1 + ax_1 + x_3 + ax_3 - x_4).$$

Пример 1. Исходя из отчетного агрегированного нетто-баланса (млн руб.) одного из предприятий и принятой схемы комбинированного инвестирования стратегии развития:

ВА = 44 + Х2 + Х4 + Х6 + Х8	КР = 46 + xi + axi + axз
ОА = 3 + (xi - xг) + axi + xз + axз - x» - xs - - Х6 - Х7 - Х8	КЗ = 1 + Х3 - Х5 -Х7
А = 47 + xi + axi + xз + axз - xг, - Х7	

а также учитывая значения констант, принимаемые по статистическим (a = СРСП = 0,5) и отчетным (ВА, ОА, КР, КЗ, А, $К_{ТЛ}$, $К_{ОСС}$, В) данным, избавляясь от дробности в ограничениях, в результате дальнейших упрощений конкретно для данного предприятия задача запишется:

$$\max \Delta RA = 0{,}5(x_1 + x_3) \,/\, (1{,}5x_1 + 1{,}5x_3 - x_5 - x_7);$$
$$1{,}5x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 \ge 0;$$
$$1{,}5x_1 - x_2 - 1{,}5x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 + 2x_7 - x_8 \ge 0;$$

$$33{,}75x_1 - 23{,}5x_2 + 10{,}25x_3 - 23{,}5x_4 + x_5 -$$
$$- 23{,}5x_6 + x_7 \geq 0;$$
$$x_1 - 2x_5 - 2x_7 \leq 1;$$
$$1{,}5x_1 - x_2 + 0{,}5x_3 - x_4 - x_6 - x_8 \geq 0;$$
$$0{,}5x_1 + 0{,}5x_3 - x_5 - x_7 \leq 0;$$
$$1{,}5x_1 + 1{,}5x_3 - x_5 - x_7 \leq 47;$$
$$x_1 - x_2 = 0;$$
$$0{,}5x_1 + 0{,}5x_3 - x_4 = 0;$$
$$0{,}5x_1 - x_6 = 0;$$
$$0{,}5x_3 - x_7 = 0;$$
$$x_3 - x_5 = 0;$$
$$x_1, \ldots, x_8 = 0.$$

Здесь ограничения (1), (2) введены в систему условий задачи дополнительно. Ограничение (1) обусловлено требованием обеспечения рентабельности деятельности предприятия при реализации стратегии развития на уровне не ниже средней расчетной ставки процента:

$$(ax_1 + ax_3) \,/\, (x_1 + ax_1 = x_3 + ax_3 - x_5 - x_7) =$$
$$= (0{,}5x_1 + 0{,}5x_3) \,/\, (1{,}5x_1 + 1{,}5x_3 - x_5 - x_7) \geq a =$$
$$= \text{СРСП} = 0{,}5.$$

Ограничение (2) означает реальность стратегических преобразований предприятия, обусловленную невозможностью освоения в реальной перспективе таких чрезмерно больших объемов инвестиционных средств, которые превышали бы действующую (балансовую) стоимость самого предприятия (стоимость всех его активов). К тому же это условие ограничивает область допустимых решений задачи, снимая тем самым неопределенность ее оптимума.

Для приведения данной постановки к линейному виду обозначим:

$$y_0 = (1{,}5x_1 + 1{,}5x_3 - x_5 - x_7)^{-1}$$

и введем новые переменные:

$$y_j = y_0 x_j, \; (j = \overline{1,8}).$$

В результате приходим к задаче:

$$\max \Delta RA = 0{,}5y_1 + 0{,}5y_3;$$
$$1{,}5y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + y_5 - y_6 + y_7 - y_8 \geq 0;$$
$$1{,}5y_1 - y_2 - 1{,}5y_3 - y_4 + 2y_5 - y_6 + 2y_7 - y_8 \geq 0;$$
$$33{,}75y_1 - 23{,}5y_2 + 10{,}25y_3 - 23{,}5y_4 + y_5 -$$
$$- 23{,}5y_6 + y_7 \geq 0;$$
$$y_1 - 2y_5 \quad 2y_7 - y_0 \leq 0;$$
$$1{,}5y_1 - y_2 + 0{,}5y_3 - y_4 - y_6 - y_8 \geq 0;$$

$$0{,}5y_1 + 0{,}5y_3 - y_5 - y_7 \leq 0;$$
$$1{,}5y_1 + 1{,}5y_3 - y_5 - y_7 - 47y_0 \leq 0;$$
$$y_1 - y_2 = 0;$$
$$0{,}5y_1 + 0{,}5y_3 - y_4 = 0;$$
$$0{,}5y_1 - y_6 = 0;$$
$$0{,}5y_3 - y_7 = 0;$$
$$y_3 - y_5 = 0;$$
$$1{,}5y_1 + 1{,}5y_3 - y_5 - y_7 = 1;$$
$$y_0, y_1, \ldots, y_8 = 0.$$

Оптимальный план задачи, полученный с помощью QSB:

$$y_0^0 = 0{,}0213;\; y_1^0 = y_2^0 = 0{,}4787;$$
$$y_3^0 = 0{,}5213;\; y_4^0 = 0{,}4574;\; y_5^0 = 0{,}2394;$$
$$y_6^0 = 0;\; y_7^0 = 0{,}2606;\; y_8^0 = 0;$$

при этом плане $\max \Delta RA(y_0, y_j) = 0{,}5$.

Учитывая также, что $x_j = y_j \,/\, y_0 (j = 1, \ldots, 8)$, находим оптимальный план и оптимум исходной задачи:

$$x_1^0 = y_1^0 \,/\, y_0^0 = 0{,}4787 \,/\, 0{,}0213 = 22{,}47;$$
$$x_2^0 = 22{,}47;\; x_3^0 = 24{,}47;\; x_4^0 = 21{,}47;\; x_5^0 = 11{,}24;$$
$$x_6^0 = 0;\; x_7^0 = 12{,}23 \text{ млн руб.};\; x_8^0 = 0;$$
$$\max \Delta RA(x_j) = 0{,}5.$$

Таблица 111

Параметры	Прогноз (a = = СРСП = = 0,5)	Исходный отчетный баланс
Фонд накопления, долгосрочные кредиты (ДКЗ), повторная эмиссия ценных бумаг, нераспределенная прибыль (x_1)	22,47	–
Инвестиции на техническое развитие за счет фонда накопления, ДКЗ (x_2)	22,47	–
Увеличение кредиторской задолженности, краткосрочных кредитов и займов (x_3)	24,47	–
Инвестиции на техническое развитие за счет краткосрочной задолженности (x_4)	21,47	–
Погашение краткосрочной задолженности ($x_5 + x_7$)	23,47	–
Отчисления на развитие за счет вновь образованной прибыли ($x_6 + x_8$)	–	–
Внеоборотные активы (ВА = 44 + x_2 **+** x_4 **+** $x_6 + x_8$)	87,94	44
Оборотные активы (ОА = 3 + $x_1 - x_2 + ax_1 + x_3 + ax_3 + x_4 \pm x_5$ - XR - $x_7 - x_8$)	6	3
Капитал и резервы (КР = 46 + $ax_1 + ax_3$)	91,94	46

Продолжение табл. Ill

Параметры	Прогноз (a = = СРСП = = 0,5)	Исходный отчетный баланс
Краткосрочная задолженность (КЗ = 1 + $x_3 - x_5 - x_7$)	2	1
Актив баланса (А = 47 + $x_1 + ax_1 + x_3 + ax_3 - x_5 - x_7$)	93,94	47
Коэффициент текущей ликвидности (Ктл)	3	3
Коэффициент обеспеченности собственными средствами (Косс)	0,67	0,67
Выручка от реализации (В)	78,3	50,33
Прибыль от реализации (нераспределенная) (ЧП = $a(x_1 + x_3)$)	46,97	23,5
Оборачиваемость активов (ОА)	0,83	1,07
Рентабельность продаж (R'П)	0,6	0,47
Рентабельность собственных средств (R'СС)	0,51	0,51
Рентабельность активов (R'А)	0,5	0,5

С реализацией этих оптимальных параметров достигается соблюдение важнейших хозяйственно-финансовых пропорций и обеспечиваются достаточно высокие показатели финансовой состоятельности, как и было предусмотрено предложенной постановкой задачи оптимизации выбора направлений стратегического развития предприятия (табл. 111).

16.3. ПРОГНОЗНЫЕ МОДЕЛИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Прогноз финансовых результатов будет связан с установлением их функциональных зависимостей от изменений параметров реорганизационных политик и стратегий развития.

При выборе варианта реорганизационной политики необходимо учитывать, что структура баланса по объему основных и оборотных средств и их соотношениям, объему собственных и заемных средств и их соотношениям и т. д. влияет на величину получаемой предприятием прибыли и рентабельность его работы. Можно показать, что каждой структуре баланса соответствуют свои значения показателей прибыли и рентабельности. Особенно наглядно эта связь представляется соотношением

Д'СС = (1 - СНП)ДА + (1 - СНП)(ЯА - СРСП) ЗС/КР,

где R'СС — рентабельность собственных средств, определяемая как ЧП/КР; RА — рентабельность активов, рассчитываемая как БП/А; СНП — ставка налога на прибыль; СРСП — средняя расчетная ставка процента по всем видам задолженности («цена» заемных средств), определяемая

$$\text{СРСП} = (\text{БСП}_1 \cdot \text{ККЗ} + \text{БСП}_2 \cdot \text{ДКЗ}/(\text{ККЗ} + \text{ДКЗ}) = \%\text{К}/\text{ЗС}.$$

В этом выражении числитель представляет собой уплату процентов в размере %К за пользование краткосрочными ККЗ и долгосрочными ДКЗ кредитами и займами, приходящимися на расчетный период; БСП_1, БСП_2 — соответственно банковские процентные ставки по краткосрочным и долгосрочным кредитам и займам.

Здесь к параметрам структуры баланса будем относить величины отдельных его разделов А, ЗС, КР; к параметрам прибыльности и рентабельности работы предприятия — ЧП, БП, ЧП/КР, БП/А.

Взаимосвязь прогнозируемых параметров деятельности, отображаемых проектируемой структурой баланса с прогнозируемыми результатами деятельности — показателями прибыли и рентабельности, — может выражаться по-разному. Одним из возможных подходов может быть непосредственная увязка показателей структуры баланса с показателями выручки от реализации продукции и затрат, следовательно, и с рентабельностью (прибыльностью) работы предприятия. Приближенно взаимосвязь прогнозируемой выручки от реализации продукции с прогнозируемой структурой баланса при прочих равных условиях конкретного производства в предыдущем отчетном $(t-1)$-м и последующем прогнозируемом t-м отрезках краткосрочного периода T (например, кварталах года) может быть представлена

$$\text{В}_t = \text{В}_{t-1}(1 + |x_1 - x_2|/\text{А}),$$

где x_1 — прогнозируемая величина сокращения внеоборотных активов, выявленная при параметризации выбранной эффективной текущей реорганизационной политики хозяйствования; x_2 — сокращение текущих пассивов (краткосрочной задолженности); $|x_1 - x_2|$ — абсолютная величина изменения оборотных активов, т. е. при $x_1 > x_2$ — восполнение их запасов, при $x_1 < x_2$ — сокращение на величину $|x_1 - x_2|$.

Данная зависимость показывает, что улучшение платежеспособности предприятия, достигаемое как за счет сокращения оборотных средств и ускорения оборачиваемости при условии достаточности их уровня для непрерывности и равномерности производственного процесса, так и за счет увеличения оборотных средств, ведут к росту выручки от реализуемой продукции.

Взаимосвязь между прогнозируемой выручкой от реализации продукции и прогнозируемыми затратами приближенно может быть представлена

$$С_t = (С_{t-1} - БСП_1 \cdot ККЗ_{t-1}) \cdot (В_t/В_{t-1}) + БСП_1 \cdot ККЗ_t = = (С_{t-1} - \%К_{t-1}) \cdot (В_t/В_{t-1}) + \%К,$$

где $ККЗ_{t-1}$, $ККЗ_t$ — соответственно отчетные и прогнозируемые за квартал краткосрочные кредиты и займы; $\%К_{t-1}$, $\%К_t$ — то же, по уплате процентов за пользование банковским кредитом; $В_{t-1}$, $В_t$ — то же, выручка от реализации; $БСП_1$ — ставка банковского процента на краткосрочные кредиты за квартал.

В свою очередь, параметр $ККЗ_t$ можно спрогнозировать, исходя из следующих соображений:

$$ККЗ_t = \begin{cases} 0, \text{ если в прогнозной политике} \\ \quad \text{рассчитается } x_1 \geq ККЗ_{t-1}; \\ x_1, \text{ если в прогнозе установлено,} \\ \quad \text{что значение } x_1 < ККЗ_{t-1}, \end{cases}$$

т. е. эта альтернатива в принятии прогнозных значений $ККЗ_t$ означает приоритетность первоочередного погашения краткосрочных кредитов и займов, так как по ним требуется выплата процентов.

При сложившейся значительной доле условно-постоянных издержек в структуре затрат представляется, что корректнее будет устанавливать прогнозное значение выручки $В_t$ как функцию «работающего» капитала:

$$В_t = В_{t-1}(ОА_t - КЗ_t)/(ОА_{t-1} - КЗ_{t-1}),$$

или, выражая прогноз величины работающего капитала через параметры выбранной для реструктуризации баланса реорганизационной политики, после элементарных преобразований, можно использовать более простую зависимость прогноза выручки уже как функцию фактических значений выручки, работающего капитала и прогноза только одного параметра x_1:

$$В_t = В_{t-1}(ОА_{t-1} - КЗ_{t-1} + x_1)/(ОА_{t-1} - КЗ_{t-1}) = = В_{t-1}(1 + x_1/ОА_{t-1} - КЗ_{t-1}),$$

где $ОА_{t-1}$, $КЗ_{t-1}$ — величины оборотных активов и краткосрочной задолженности по отчетному (предпрогнозного периода) балансу; $ОА_t$, $КЗ_t$ — то же, по структуре прогнозного баланса.

Если в прогнозном периоде не предусматривается использование краткосрочных кредитов и займов, то прогноз себестоимости сведется к еще более простой функции, пропорциональной росту прогнозного значения выручки относительно ее фактической предпрогнозной величины:

$$С_t = С_{t-1} \cdot В_t/В_{t-1}.$$

При существенной доле фиксированных издержек (ФИ) в структуре полных затрат из прогноза можно вывести иную прогнозную функцию:

$$С_t = f(С_{t-1}, В_{t-1}, В_t, ФИ);$$

$$С_t - ФИ = (С_{t-1} - ФИ) \cdot (В_t - ФИ)/(В_{t-1} - ФИ),$$

откуда

$$С_t = С_{t-1}(В_t - ФИ) - ФИ(В_t - В_{t-1})/(В_{t-1} - ФИ) = = (С_{t-1}(ПИ_t + БП_t) - ФИ \cdot \Delta В)/(ПИt_{-1} + БП_{t-1})$$

где $\Delta В$ — прогнозируемый прирост выручки.

Подобные соображения допустимы и в прогнозе выручки

$$В_t = F(В_{t-1}, С_{t-1}, БП_t)$$

в результате применения оптимальных текущих политик, ориентированных на максимизацию выручки, прибыли или рентабельности, а также — оптимальных стратегий развития:

$$В_t = (В_{t-1}(БП_t + (1 - \alpha_t)С_t))/В_{t-1} - \alpha_t С_{t-1} = = (В_{t-1}МD_t)/МD_{t-1},$$

где $МD_{t-1}$, $МD_t$ — соответственно фактическое и прогнозное значения маржинального дохода; α_t — вероятная в прогнозном периоде доля переменных издержек в структуре полной себестоимости.

Значение α_t может быть установлено по экспертным оценкам или выявлено при экстраполяции тенденций затрат $С_t(N)$ через ставку переменных издержек $СПИ_t$:

$$С_t(N) = СПИ_t(N) \cdot N + ФИ.$$

Здесь значение $СПИ_t$ вычисляется как величина предельных издержек, т. е. величина их изменения при изменении объема производства N на единицу:

$$СПИ_t = dС(N)/dN \approx \Delta С(N)/\Delta N.$$

При достаточной репрезентативности отчетных данных предпрогнозного $(T - 1)$-го периода приращение издержек

$\Delta C(N)$ на единицу приращения объема производства ΔN может исчисляться по верхним $\max C_{T-1}(N_{T-1})$, $\max N_{T-1}$ и нижним значениям $\min C_{T-1}(N_{T-1})$, $\min N_{T-1}$ издержек и объемов производства:

$$\Delta C(N) = \max C_{T-1}(N_{T-1}) - \min C_{T-1}(N_{T-1});$$
$$\Delta N = \max N_{T-1} - \min N_{T-1}.$$

В то же время может быть решена и обратная задача прогнозирования. По прогнозному значению выручки, заданному в качестве цели стратегии развития или текущей политики достижения (обеспечения) финансовой устойчивости, обосновать соответствующую ей величину балансовой и чистой прибыли:

$$БП_t = (В_t/В_{t-1}) \cdot [В_{t-1} - (1 - \alpha_t)C_{t-1}] - \alpha_t C_{t-1};$$
$$ЧП_t = (1 - СНП) \cdot БП_t.$$

Остальные прогнозируемые результаты деятельности являются производными от $В_t$ и C_t. Так, могут быть предложены следующие прогнозные оценки рентабельности активов RA_t, продаж $RП_t$, собственной рентабельности RCC_t, продукции RC_t и деловой активности — оборачиваемости активов $ОА_t$ и их элементов:

$$RA_t = БП_t/(ВА_t + ОА_t);\ RП_t = БП_t/В_t;$$
$$RCC_t = БП_t/КР_t;\ RC_t = БП_t/C_t.$$
$$ОА_t = В_t/(ВА_t + ОА_t);\ ОФ_t = В_t/ВА_t;$$
$$ООА_t = В_t/ОА_t;\ ОДЗ_t = В_t/ДЗ_t.$$

Пример 2. Исходя из результатов анализа сложившейся неудовлетворительной структуры отчетного агрегированного нетто-баланса одного из предприятий, устанавливаем, что эта структура может быть реструктурирована (восстановлена) по схеме «смешанной» политики (так как «чистые» политики оказываются нереальными), параметры которой рассчитаются из условия:

<table>
<tr><td colspan="2">Предпрогнозный отчетный баланс I квартала (млн руб.)</td><td colspan="2">Прогнозный баланс II квартала (млн руб.)</td></tr>
<tr><td>ВА = 648 - x_1</td><td>КР = 677</td><td>ВА = 613,5</td><td>КР = 677</td></tr>
<tr><td>ОА = 173 + x_1 - x_2</td><td>КЗ = 121 - x_2</td><td>ОА = 173</td><td>КЗ = 86,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">А = 821</td><td colspan="2">А = 786,5</td></tr>
</table>

$$0 \le x_1 = \max\begin{cases}2КЗ - ОА - x_2; \\ (ВА - КР + 0,1 * ОА - \\ - 0,1 * x_2/0,9; = \max\end{cases} \begin{cases}69 - x_2; \\ -13 - \\ 0,111 * x_2;\end{cases}$$

Отсюда

$$69 - x_2 = -0,2 \quad 173 + x_2;$$
$$x_2 = 51,8;\ x_1 = 17,2 \text{ млн руб.}$$

Теперь по предложенным прогнозным функциям могут быть рассчитаны основные финансовые результаты и большинство параметров финансовой состоятельности на t-й период прогноза (табл. 112).

Как видно из сопоставления прогнозных оценок II квартала и фактически достигнутых в нем показателей, реализация предложенного данной реорганизационной политикой направления реструктуризации имущества предприятия позволила ему уже в ближайшем периоде заметно

Таблица 112

Функция прогноза	Формула	Отчет I квартала	Прогноз II квартала	Отчет II квартала
Выручка по вариантам стратегий на t-й период	$В_t = В_{t-1}{}^{*}(ОА_t - КЗ_t)/(ОА_{t-1} - КЗ_{t-1})$	133	177	212
Балансовая прибыль t-го периода	$БП_t = (В_t/В_{t-1})[В_{t-1} - (1 - \alpha_t)C_{t-1}] - \alpha_t C_{t-1}$	23	37,8	44
Чистая прибыль	$ЧП_t = (1 - СНП)БП_t$	16	24,6	24
Коэффициент текущей ликвидности	$К_{тлt} = ОА_t/КЗt$	1,43	2	1,54
Коэффициент обеспеченности собственными средствами	$К_{осс t} = (КР_t - ВА_t)/ОА_t$	0,17	0,33	0,19
Общая экономическая рентабельность (рентабельность активов)	$RA_t = БП_t/(ВА_t + ОА_t)$	2,8	4,9	5,3
Рентабельность собственных средств	$RCC_t = БП_t$ (или $ЧП_t$)$/КР_t$	2,4	3,6	3,5
Рентабельность продаж	$RП_t = БП_t\ (ЧП_t)/В_t$	17	21,4	20,7
Рентабельность продукции	$RC_t = БП_t(ЧП_t)/C_t$	21 (С = = 110)	27 (С = = 139,2)	26,2 (С = = 168)
Оборачиваемость внеоборотных активов	$ОВА_t = В_t/ВА_t$	0,2	0,28	0,33
Оборачиваемость оборотных активов	$ООА_t = В_t/ОА_t$	0,8	1,3	1,2
Оборачиваемость активов	$ОА_t = В_t/А_t = В_t/(ВА_t + ОА_t)$	0,16	0,23	0,26
Оборачиваемость собственных средств	$ОССt = В_t/КР_t$	0,19	0,26	0,31

улучшить практически все важнейшие параметры деятельности, хотя полученную отчетную структуру средств предприятия и его платежеспособность еще нельзя считать удовлетворительными. Поэтому, исходя из нового финансового состояния, должна разрабатываться новая реорганизационная политика с соответствующими параметрами деятельности и прогнозными оценками результатов, которые будут являться новыми предельными (минимальными) условиями финансовой состоятельности.

Задание 1. На конец квартала финансовое состояние фирмы характеризуется отсутствием прибыли от текущей деятельности, а также следующими значениями показателей текущей ликвидности и обеспеченности собственными средствами, рассчитанными по отчетным данным: $К_{гл}$ = = 600 млн руб. / 400 млн руб. = 1,5; $К_{ос}с$ = (500 млн руб. - - 452 млн руб.) / 600 млн руб. = 0,08.

Определите допустимые параметры «чистых» и «смешанных» политик реструктуризации имущества фирмы, при которых обеспечивается восстановление структуры ее баланса и платежеспособность.

16.4. МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ БЮДЖЕТА РАЗВИТИЯ КОМПАНИИ

В бюджете развития компании устанавливается рациональная структура ее средств (имущества) во взаимосвязи с источниками их формирования.

Одна из первоочередных задач бюджетного планирования состоит в выявлении направлений такой реструктуризации имущества и источников средств компании, при которой достигается требуемый уровень платежеспособности (ликвидности). К другим важнейшим требованиям, предъявляемым к проектируемому бюджету, отнесем его соответствие ранее установленным целям и инвестиционным потребностям развития компании.

В качестве информационной базы бюджетного планирования используется агрегированный баланс и отчет о финансовых результатах:

$ВА_t = 55643$	$СК_t = КР_t + Д$ $КЗ_t = 61204$	$В_t = 79642$; $ЧП_t = 3057$;
$ОА_t = 28910$	$КЗ_t = 23349$	$К_{тл_t} = \dfrac{ОА_t}{КЗ_t} = \dfrac{28910}{23349} = 1{,}24$;
$А_t = 84553$		$К_{осс_t} = \dfrac{КР_t - ВА_t}{ОА_t} = \dfrac{61204 - 55643}{28910} = 0{,}19.$

Здесь t — индекс отчетного периода; ВА, — величина внеоборотных активов на начало планируемого периода; ОА,, СК,, ДКЗ,, КР,, КЗ,, В,, ЧП, — то же, оборотных активов, собственного капитала, долгосрочных кредитов и займов, капитала и резервов, краткосрочной задолженности (как суммы величин кредиторской задолженности и краткосрочных кредитов и займов), выручки, чистой прибыли; Ктл<» К₀сс< — коэффициенты соответственно текущей ликвидности и обеспеченности собственными средствами в отчетном периоде.

Эффективный подход к формированию бюджета развития компании, отвечающий сформулированным нами требованиям, отличают возможности использования различных схем (направлений) реструктуризации, позволяющих сформировать допустимое множество вариантов прогнозной структуры имущества с последующим отбором из них оптимального варианта, согласно принятым критерию, ограничениям и граничным условиям.

Представляется, что из предложенных в этой работе критериев структурной реорганизации наиболее соответствует принципам стратегического развития компании —• объекта исследований — минимум структурных изменений стоимости имущества (актива) компании, так как очевидно, что при этом можно добиться наибольшей вероятности достижения проектируемых в бюджете параметров развития компании. Кроме того, неопределенность выполнения бюджета за счет реализации специально сформированного комплекса организационно-технических мероприятий стратегического менеджмента компании может быть снижена и за счет сокращения периода (дискретности) бюджетного планирования до одного года.

Собственно сама принимаемая нами схема реструктуризации в краткосрочном периоде будет иметь свои отличительные особенности.

$ВА_{t+1} = ВА_t + \delta[x_1 + x_2 + \alpha(x_1 + x_2)] =$ $= 55\,643 + \delta[x_1 + x_2 + \alpha(x_1 + x_2)]$	$СК_{t+1} = СК_t + x_1 + \alpha(x_1 + x_2) =$ $= 61\,204 + x_1 + \alpha(x_1 + x_2)$
$ОА_{t+1} = ОА_t + (1 - \delta)[x_1 + x_2 + \alpha(x_1 + x_2)] =$ $= 28910 + (1 - \delta)[x_1 + x_2 + \alpha(x_1 + x_2)]$	$КЗ_{t+1} = КЗ_t + x_2 = 23\,349 + x_2$
$А_{t+1} = А_t + x_2 + \alpha(x_1 + x_2) = 84\,553 + x_1 + x_2 + \alpha(x_1 + x_2)$	

Условные обозначения: $(t + 1)$ — индекс периода планирования; 5 — доля средств (инвестиций), направляемых на расширение мощностей нефтедобычи и нефтепереработки; а — норма прибыли на капитал (т. е. нормативная рентабельность инвестиций, принимаемая равной средней расчетной ставке процента по заемным средствам или ставке рефинансирования Центробанка); x_1 — искомый объем инвестиционных ресурсов за счет долгосрочных кредитов и займов, фондов накопления компании и на восстановление минерально-сырьевой базы; x_2 — искомый объем инвестиционных ресурсов за счет краткосрочных кредитов и займов, кредиторской задолженности.

Сущность этой схемы состоит в привлечении компанией, как транснациональной корпорацией, реализующей свою стратегическую концепцию, инвестиционных ресурсов из различных источников с распределением этих ресурсов по приоритетным направлениям развития и на обеспечение текущей деятельности (табл. 113, 114).

Инвестиции формируются за счет внутренних источников и долгосрочных кредитов и займов (в объеме x_1), а также краткосрочных кредитов и займов и кредиторской задолженности (в объеме x_2). От использования их на цели развития компания может рассчитывать на получение нераспределенной (чистой) прибыли, направляемой за вычетом дивидендов в фонд накопления, в объеме, не меньшем,

Таблица 113

Источники	Распределение по годам		Всего
	1998	1999	
Внутренние	650-720	850-1000	1500-1720
Фонд на восстановление минерально-сырьевой базы	100-120	50-100	150-220
Банковские кредиты и займы	35-40	40-60	75-100
Другие внешние	250-300	300-400	550-700
Общий объем финансирования	1000-1200	1200-1600	2200-2800

Таблица 114

Направления инвестиций	Распределение по годам		Всего
	1998	1999	
Переработка	150-200	200-300	350-500
Сбыт	15-20	20-30	35-50
Другие на внутренних рынках	40-50	50-100	90-150
Общие инвестиции	1000-1200	1200-1600	2200-2800
Средний обменный курс (руб./$)	10	20	–
Общие инвестиции (млрд руб.)	10-12	24-32	34-44

чем $\alpha(x_1 + x_2)$. Распределение общего объема инвестиционных ресурсов на цели стратегического развития и текущей деятельности осуществляется в соответствии с потребностями, обоснованными инвестиционными проектами компании. По усредненным оценкам, доля инвестиций в развитие и расширение мощностей нефтедобычи, нефтепереработки и сбыта δ составляет 0,7, а на цели текущей деятельности эта доля $(1 - \delta)$ составляет соответственно 0,3.

Исходя из сформулированных нами предпосылок и условий, можно прийти к следующей общей постановке задачи оптимизации бюджетного планирования, в которой критерий и ограничения представлены неявными функциями финансовых результатов деятельности от искомых объемов инвестиций x_1, x_2:

$$F_{t+1}(x_1, x_2) \to \min;$$
$$\begin{cases} R_{nt+1}(x_1, x_2) \geq R_n^*; \\ \text{О}_{At+}(x_1, x_2) \geq \text{О}_\text{A}^*; \\ \text{В}_{t+1}(x_1, x_2) \geq \text{В}^*; \\ \text{К}_{\text{ТЛ}t+1}(x_1, x_2) \geq \text{К}_\text{ТЛ}^\text{Н}; \\ \text{К}_{\text{ОСС}t+1}(x_1, x_2) \geq \text{К}_\text{ОСС}^\text{Н}; \\ \underline{I_1} \leq x_1 \leq \overline{I_1}; \\ \underline{I_2} \leq x_2 \leq \overline{I_2}, \end{cases} \quad (1)$$

где $R_{nt+1}(x_1, x_2), R_n^*$ — прогнозные уровни рентабельности продаж соответственно компании и ее главного конкурента — лидера нефтяного рынка; $\text{О}_{At+1}(x_1, x_2), \text{О}_A^*$ — то же, прогноз значения оборачиваемости активов; $\text{В}_{t+1}(x_1, x_2), \text{В}^*$ — то же, прогнозные объемы выручки; $\text{К}_\text{ТЛ}^\text{Н}, \text{К}_\text{ОСС}^\text{Н}$ — нормативные значения коэффициентов соответственно текущей ликвидности (равное двум) и обеспеченности собственными средствами (равное 0,1); $\underline{I_1}, \overline{I_1}, \underline{I_2}, \overline{I_2}$ — нижние и верхние прогнозные значения инвестиционных ресурсов, привлекаемых компанией за счет соответственно собственных и внешних источников (табл. 113, 114).

Если принимаемая нами целевая функция бюджетного планирования отражает требование минимизации управляющих воздействий x_1, x_2 на структуру имущества и средств (активы) компании, то тогда ее можно формализовать как

$$F_{t+1}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \to \min.$$

Заслуживает внимания и исследование других критериев формирования бюджета, например максимизации доли рынка компании, которую можно представить возрастающей функцией относительного увеличения «работающего (функционирующего)» капитала $(OA_{t+1} - КЗ_{t+1})/(OA_t - КЗ_t)$:

$$F_{t+1}(x_1, x_2) = B_{t+1}(x_1, x_2) = = B_t \frac{OA_{t+1}(x_1, x_2) - КЗ_{t+1}(x_1, x_2)}{OA_t - КЗ_t} \to \max,$$

или, подставив из схемы формирования бюджета $(t+1)$-го периода выражения $OA_{t+1}(x_1, x_2), КЗ_{t+1}(x_1, x_2)$ и исключив на время решения задачи постоянные величины выручки, оборотных активов и краткосрочной задолженности отчетного t-го периода $(B_t, OA_t, КЗ_t)$, получим:

$$F_{t+1}(x_1, x_2) = [(1-\delta)(1+\alpha)(x_1 + x_2) - x_2] = = [(1+\alpha-\delta-\alpha\delta)x_1 + (\alpha-\delta-\alpha\delta)x_2)] \to \max.$$

Первые три ограничения задачи (1) формализуют требования достижения или превышения компанией уровня рентабельности продаж, оборачиваемости активов, а также объема продаж своего главного конкурента. Известно, что общая эффективность деятельности (рентабельность активов) RА компании в двухфакторной модели Дюпона выражается произведением рентабельности продаж RП на оборачиваемость ее активов ОА. Поэтому учет этих требований, обеспечивающих возможность достижения устойчивой в планируемой перспективе эффективности деятельности компании в целом, в данной задаче, как нам представляется, является особенно существенным.

Прогнозный уровень рентабельности продаж компании как функцию объема распределенных инвестиций можно представить отношением размера фонда накопления $\alpha(x_1 + x_2)$, образованного в планируемом периоде за счет вновь сформированной прибыли, к величине планируемой выручки. Ограничение, отражающее требование достижения и превышения компанией уровня рентабельности продаж лидера нефтяных рынков, формализуется следующим образом:

$$\frac{\alpha(x_1 + x_2)}{\frac{B_t}{OA_t - КЗ_t}[OA_t - КЗ_t + (1-\delta)(1+\alpha)(x_1 + x_2) - x_2]}$$

или, после преобразований к линейному виду:

$$[1 - \frac{(1+\alpha-\delta-\alpha\delta)R_n^* B_t}{\alpha(OA_t - КЗ_t)}]x_1 + [1 - \frac{(\alpha-\delta-\alpha\delta)R_n^* B_t}{\alpha(OA_t - КЗ_t)}]x_2 \ge \frac{R_n^* B_t}{\alpha}.$$

Требование, вытекающее из заявленной генеральной цели компании по реализации ее стратегического ресурсно-производственного потенциала в достижении лидерства

на нефтяных рынках ресурсов и продуктов, формулируется из соотношения:

$$\frac{B_t}{OA_t - КЗ_t}[OA_t - КЗ_t + (1-\delta)[(1+\alpha)(x_1 + x_2) - x_2] \ge B^*,$$

которое после преобразований перепишется следующим образом:

$$(1+\alpha-\delta-\alpha\delta)x_1 + (\alpha-\delta-\alpha\delta)x_2 \ge \frac{(OA_t - КЗ_t)}{B_t}.$$

В свою очередь ограничение, отражающее возможности компании по достижению или превышению уровня деловой активности лидера нефтяных рынков, может быть конкретизировано из следующего соотношения:

$$\frac{B_t[OA_t - КЗ_t + (1+\alpha-\delta-\alpha\delta)x_1 + (\alpha-\delta-\alpha\delta)x_2]}{(OA_t - КЗ_t)[A_t + (1+\alpha)(x_1 + x_2)]} \ge O_A^*,$$

или, после преобразований:

$$[B_t(1+\alpha-\delta-\alpha\delta) - O_A^*(OA_t - КЗ_t)(1+\alpha)]x_1 + + [B_t(\alpha-\delta-\alpha\delta) - O_A^*(OA_t - КЗ_t)(1+\alpha)]x_2 \ge \ge (O_A^* A_t - B_t)(OA_t - КЗ_t).$$

Последние два ограничения задачи (1) отображают требования в планируемом периоде достижения компанией уровня нормативной платежеспособности и поддержания нормативной обеспеченности собственными средствами.

Развернутое ограничение по платежеспособности имеет вид:

$$\frac{OA_t + (1-\delta)(1+\alpha)(x_1 + x_2)}{КЗ_t + x_2} \ge K_{ТЛ}^{Н},$$

или, что то же самое:

$$(1+\alpha-\delta-\alpha\delta)x_1 + (1+\alpha-\delta-\alpha\delta-K_{ТЛ}^{Н})x_2 \ge K_{ТЛ}^{Н}(КЗ_t - OA_t).$$

И, наконец, требование обеспеченности собственными средствами:

$$\frac{КР_t - BA_t + x_1 + \alpha(x_1 + x_2) - \delta(1+\alpha)(x_1 + x_2)}{OA_t + (1-\delta)(1+\alpha)(x_1 + x_2)} \ge K_{осс}^{Н}$$

окончательно перепишется так:

$$(1+\alpha-\delta-\alpha\delta)x_1 + (\alpha-\delta-\alpha\delta)x_2 \ge \frac{K_{осс}OA_t + BA_t - КР_t}{1 - K_{осс}}$$

Теперь можно записать задачу оптимизации бюджетного планирования компании, в которой критерий и ограничения будут представлены уже явными функциями искомых объемов инвестиций на цели эффективного развития и текущей деятельности:

$$F_{t+1}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \to \min;$$

$$F_t(x_1, x_2) = [(1 - \delta)(1 + \alpha)(x_1 + x_2) - x_2] =$$

$$= [(1 + \alpha - \delta - \alpha\delta)x_1 + (\alpha - \delta - \alpha\delta)x_2] \to \max;$$

$$\left[1 - \frac{(1 + \alpha - \delta - \alpha\delta)R^*_{\Pi}B_t}{\alpha(\mathrm{OA}_t - \mathrm{КЗ}_t)}\right]x_1 + \left[1 - \frac{(\alpha - \delta - \alpha\delta)R^*_{\Pi}B_t}{\alpha(\mathrm{OA}_t - \mathrm{КЗ}_t)}\right]x_2 \geq \frac{R^*_{\Pi}B_t}{\alpha}$$

$$(1 + \alpha - \delta - \alpha\delta)x_1 + (\alpha - \delta - \alpha\delta)x_2 \geq \left(\frac{\mathrm{B}^*}{\mathrm{B}_t} - 1\right)(\mathrm{OA}_t - \mathrm{КЗ}_t); \quad (3.2)$$

$$[\mathrm{B}_t(1 + \alpha - \delta - \alpha\delta) - \mathrm{O}^*_{\mathrm{A}}(\mathrm{OA}_t - \mathrm{КЗ}_t)(1 + \alpha)]x_1 + [\mathrm{B}_t(\alpha - \delta - \alpha\delta) -$$

$$- \mathrm{O}^*_{\mathrm{A}}(\mathrm{OA}_t - \mathrm{КЗ}_t)(1 + \alpha)]x_2 \geq (\mathrm{O}^*_{\mathrm{A}}\mathrm{A}_t - \mathrm{B}_t)(\mathrm{OA}_t - \mathrm{КЗ}_t);$$

$$(1 + \alpha - \delta - \alpha\delta)x_1 + (1 + \alpha - \delta - \alpha\delta - \mathrm{K}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{ТЛ}})x_2 \geq \mathrm{K}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{ТЛ}}(\mathrm{КЗ}_t - \mathrm{OA}_t);$$

$$(1 + \alpha - \delta - \alpha\delta)x_1 + (\alpha - \delta - \alpha\delta)x_2 \geq \frac{\mathrm{K}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{OCC}}\mathrm{OA}_t + \mathrm{BA}_t - \mathrm{KP}_t}{1 - \mathrm{K}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{OCC}}};$$

$$\underline{I_1} \leq x_1 \leq \overline{I_1};$$

$$\underline{I_2} \leq x_2 \leq \overline{I_2}.$$

Отметим, что ориентация компании на ключевые показатели прогноза развития мировой компании — лидера нефтяных рынков имеет скорее глобальный характер. Эту ориентацию следует рассматривать как долгосрочную доминанту развития. В кратко- или среднесрочном аспекте развития, отображаемом бюджетным проектированием, более реалистичным представляется целеполагание компании на прогнозные показатели своего ближайшего конкурента, также входящего в десятку мировых нефтяных компаний, например — *Texaco* (США). Тогда в задачу (2) могут быть введены следующие прогнозные оценки развития этой компании: $R^*_{\Pi} = 0,2; \mathrm{O}^*_{\mathrm{A}} = 1; \mathrm{B}^* = 90$ млн руб. Норма прибыли на инвестируемый капитал α, которая не может быть меньше средней расчетной ставки процента и рассчитывается как отношение финансовых издержек по обслуживанию долга компании (уплата процентов) к общей величине заемного капитала (п. 1.3), с учетом инфляционных ожиданий и риска инвесторов принимается равной 0,4. Доля инвестиций на техническое развитие компании составляет 0,7 их общего объема.

Общая постановка задачи оптимизации бюджетного планирования, в которой критерий и ограничения представлены неявными функциями финансовых результатов деятельности от искомых объемов инвестиций x_1, x_2:

$$F_{t+1}(x_1, x_2) \to \min;$$

$$R_{nt+1}(x_1, x_2) \geq R^*_n;$$

$$\mathrm{O}_{\mathrm{A}t+1}(x_1, x_2) \geq \mathrm{O}^*_{\mathrm{A}};$$

$$\mathrm{B}_{t+1}(x_1, x_2) \geq \mathrm{B}^*;$$

$$\mathrm{K}_{\mathrm{ТЛ}t+1}(x_1, x_2) \geq \mathrm{K}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{ТЛ}};$$

$$\mathrm{K}_{\mathrm{OCC}t+1}(x_1, x_2) \geq \mathrm{K}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{OCC}};$$

$$\underline{I_1} \leq x_1 \leq \overline{I_1};$$

$$\underline{I_2} \leq x_2 \leq \overline{I_2},$$

где $R_{nt+1}(x_1, x_2), R^*_n$ — прогнозные уровни рентабельности продаж соответственно компании и ее главного конкурента; $\mathrm{O}_{At+1}(x_1, x_2), \mathrm{O}^*_{\mathrm{A}}$ — то же, прогноз значения оборачиваемости активов; $\mathrm{B}_{t+1}(x_1, x_2), \mathrm{B}^*$ — то же, прогнозные объемы выручки; $\mathrm{K}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{ТЛ}}, \mathrm{K}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{OCC}}$ — нормативные значения коэффициентов соответственно текущей ликвидности (равное двум) и обеспеченности собственными средствами (равное 0,1); $\underline{I_1}, \overline{I_1}, \underline{I_2}, \overline{I_2}$ — нижние и верхние прогнозные значения инвестиционных ресурсов, привлекаемых компанией за счет соответственно собственных и внешних источников.

Модель оптимизации бюджета развития компании, исходя из ее прогнозных параметров и принятых прогнозных показателей деятельности компании-конкурента, запишется в виде:

$$F_{t+1}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \to \min; \quad (1)$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5,15x_2 \geq 39\,821; & (2) \\ 0,42x_1 - 0,58x_2 \geq 723,9; & (3) \\ 4,6x_1 - 9,7x_2 \geq 4\,919,48; & (4) \\ 0,42x_1 - 1,58x_2 \leq 17\,788; & (5) \\ 0,42x_1 - 0,88x_2 \geq 47,76; & (6) \\ 0,378x_1 - 0,622x_2 \geq -2670; & (7) \\ 80\,000 \leq x_1 \leq 100\,000; & (8) \\ 20\,000 \leq x_2 \leq 45\,000. & (9) \end{cases}$$

Здесь целевая функция (1) отображает требование минимума суммарных инвестиций в цели стратегического развития и обеспечения эффективной текущей деятельности.

Ограничения (2)-(4) формализуют условия обеспечения конкурентоспособности компании по уровню рентабельности продаж, оборачиваемости активов и объему дохода.

Условиями (5)–(6) накладываются требования обеспечения устойчивой платежеспособности в прогнозируемой (планируемой) перспективе, т. е. текущая ликвидность компании в $(t + 1)$-м должна быть в пределах от достигнутого в t-м периоде уровня до нормативного значения, равного двум.

Ограничение (7) выражает требование соответствия прогнозируемого (планируемого) уровня обеспеченности собственными средствами нормативному уровню, равному 0,1.

Ограничения (8)–(9) конкретизированы как средневероятные объемы предполагаемых источников инвестиционных ресурсов компании и их распределений по основным направлениям развития.

Вместо целевой функции вида (1) для обоснования выбора другого возможного сценария развития компании, в модель может быть введен критерий максимизации доли рынка как возрастающая функция «работающего» капитала. После соответствующих преобразований этот критерий был представлен в виде:

$$F_{t+1}(x_1, x_2) = [(1 + \alpha - \delta - \alpha\delta)x_1 + (\alpha - \delta - \alpha\delta)x_2] \to \max,$$

или, после подстановки исходных данных:

$$F_{t+1}(x_1, x_2) = [(0{,}42x_1 - 0{,}58x_2)] \to \max. \qquad (10)$$

Реализация моделей (1)–(9) и (2)–(10) как задач линейного программирования осуществлялась с использованием программ *QSB*. При этом были получены следующие оптимальные результаты, которые были положены в основу производственно-хозяйственной и финансовой деятельности компании на период до 2003 г.

Из реализации модели (3.8)–(3.16):

$$X^0 = (x_1^0;\ x_2^0) = (95\ 943{,}8189;\ 44\ 991{,}9677) \text{ млн руб};$$

$$\min F(x_1^0\ x_2^0) = 140\ 935{,}8 \text{ млн руб.},$$

или при предполагаемом среднем курсе 30 руб./$

$$X^0 = \$(3198;\ 1500) \text{ млн}; \min F(x_1^0;\ x_2^0) = \$4698 \text{ млн}.$$

Из реализации модели (3.9)–(3.17):

$$X^0 = (x_1^0;\ x_2^0) = (95\ 964;\ 45\ 000) \text{ млн руб};$$

$$\max F(x_1^0\ x_2^0) = 14\ 205,$$

что означает объем суммарных инвестиций на цели среднесрочного развития и текущей деятельности в 140 964 млн руб., или $4699 млн при предполагаемом среднем курсе 30 руб./$ и $X^0 = \$(3199;\ 1500)$ млн.

Полученные результаты позволяют сформировать прогнозную структуру бюджета развития компании и соответствующие этой структуре финансовые показатели (табл. 115–117).

Из анализа полученных оценок реализации моделей (1)–(9) и (2)–(10) следуют весьма принципиальные для

Таблица 115

Прогнозный бюджет развития компании (по результатам реализации модели (1)-(9))

ВА = 55 643 + 0,7 • 1,4 140 936 = 193 760	СК = 61 204 + 95 944 + 0,4 х х 140 936 = 213 522
О А = 28 910 + 0,3 • 1,4 • 140 936 = 88 103	КЗ = 23 349 + 44 992 = 68 341
А = 84 553 + 1,4 • 140 936 - 281 863	

Та б л ица 116

Прогнозный бюджет развития компании (по результатам реализации модели (2)-(10))

ВА = 55 643 + 0,7 1,4 140 964 = 193 788	СК = 61 204 + 95 944 + 0,4 • 140 964 = 213 554
О А = 28 910 + 0,3 • 1,4 • 140 964 = 88 115	КЗ = 23 349 + 45 000 = 68 349
д - 84 + 1,4 . 140 936 = 281 903	

Таблица 117

Аналитическая оценка вариантов стратегии развития

Параметры стратегии развития	Критерии модели $F(x_1,x_2)$ (по курсу 30 руб./$)		Базовый период, млн руб. (по курсу 20 руб./$)
	$\min(x_1 + x_2)$	$\max[(0{,}42x_1 - 0{,}58x_2)]$	
Целевая функция $F_{0t} + 1(x_{10},x_{20})$, млн руб.($ млн)	140 935,8 (4698)	14 205	–
Доход $В_t + 1(x_{10},x_{20})$, млн руб.	283 022 (9434)	283 077 (9436)	79 642 (3982)
Инвестиции на цели развития X_{10}, млн руб.($ млн)	95 943,8 (3198)	95 964 (3199)	–
Инвестиции на обеспечение текущей деятельности X_{20}, млн руб.($ млн)	44 991,9 (1500)	4500 (1500)	–
Всего инвестиций $(X_{10} + X_{20})$, млн руб.($ млн)	140 936 (4698)	140 964 (4699)	–
Стоимость имущества (стратегический потенциал) $А_t + 1(x10,x20)$, млн руб.($ млн)	281 863 (9395)	197 350 (6578)	84 553 (4228)
Коэффициент текущей ликвидности $Ктл_t + 1 = ОА_t + 1/КЗ_t + 1$	1,29	1,28	1,24
Коэффициент обеспеченности собственными средствами $Косс = (СК_t + 1 - ВА_t + 1)/ОА_t + 1$	0,22	0,22	0,19
Оборачиваемость активов $ОА_t + 1 = В_t + 1/А_t + 1$	1	1	0,9
Чистая прибыль $ЧП_t + 1 = \alpha(x_{10} + x_{20})$, млн руб. ($ млн)	56 374,4 (1879)	56 386 (1879,5)	3057 (153)
Рентабельность продаж $RП_t + 1 = ЧПt + 1/В_t + 1$	0,2	0,2	0,04
Рентабельность активов $RА_t + 1 = ЧП_t + 1/А_t + 1$	0,2	0,2	0,03

обоснования направлений стратегического развития выводы. Прежде всего отметим, что при реализации любой из моделей, как в направлении минимизации суммарного объема инвестиционных ресурсов на цели стратегического развития и на обеспечение текущей деятельности, так и в направлении максимизации доли рынка (дохода), достигаемые финансовые результаты почти идентичны, т. е. оба направления стратегии развития сопоставимы и сопоставимы по своим результатам с прогнозными результатами деятельности ближайшего конкурента на мировом рынке нефти и нефтепродуктов.

К тому же, реализация любой из моделей обеспечивает существенное повышение эффективности деятельности, оцениваемой по таким показателям, как уровень платежеспособности (коэффициенты текущей ликвидности и обеспеченности собственными средствами), уровень деловой активности (оборачиваемость активов), эффективность управления (показатели чистой рентабельности продаж и активов).

Но все же предпочтение должно отдаваться направлениям стратегии развития по модели минимизации суммарных инвестиций (2)-(9), так как потребность в них при этом будет несколько меньше.

Таким образом, полученные результаты реализации оптимизационных моделей развития и их аналитические оценки означают, что при объеме суммарных инвестиций на период до 2003 г. $4700 млн создаются предпосылки формирования эффективного стратегического потенциала и обеспечения конкурентных преимуществ компании как транснациональной корпорации.

16.5. МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ НОВОВВЕДЕНИЯМИ: СТРАТЕГИЯ ДИВЕРСИФИКАЦИИ

В качестве критерия выбора нововведений чаще других используется ожидаемый прирост дохода, подлежащий максимизации. Этот критерий представляет собой естественный переход от строго детерминированной ситуации (от условий полной определенности) к ситуации с рисками, формально состоящий в переходе от потенциальных к ожидаемым эффектам. Этот критерий может использоваться, когда приходится отбирать единственный оптимальный вариант нововведения из имеющихся альтернатив.

При формировании портфеля нововведений интересы предприятия концентрируются вокруг немногих критериев — выручки, прибыли, качества продукции и затрат, вре-

мени на реализацию нововведений, рисков. Например, задачу максимизации прироста прибыли от реализации портфеля нововведений можно считать противоположной (но не прямо противоположной) задаче минимизации риска. Тогда формализацией известного принципа «риск против прибыльности» может служить биматричная игра, где за самостоятельных игроков принимаются два вида интересов управляющего органа: максимизация прироста прибыли и минимизация риска, а матрицы имеют вид:

$$\Delta\Pi = \begin{pmatrix} \Delta\Pi_{11} & \Delta\Pi_{12} & \dots & \Delta\Pi_{1n} \\ \Delta\Pi_{21} & \Delta\Pi_{22} & \dots & \Delta\Pi_{1n} \\ \dots & & & \dots \\ \Delta\Pi_{m1} & \Delta\Pi_{m2} & \dots & \Delta\Pi_{mn} \end{pmatrix}; \; R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ R_{m1} & R_{m2} & \dots & R_{mn} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В принятых обозначениях: $\Delta\Pi_{ij}$ — прирост прибыли от реализации i-го ($i = \overline{1,m}$) нововведения в j-м ($j = \overline{1,n}$) заказе из портфеля предприятия; R_{ij} — вероятность неполучения прироста прибыли в объеме $\Delta\Pi_{ij}$ при реализации i-го нововведения в j-м ($j = \overline{1,n}$) заказе; $\Delta\Pi_{ij}, R_{ij} \geq 0$. ($i = \overline{1,m}$)

Решение этой игры — значения цены игры V_1, V_2, а также оптимальные смешанные стратегии игроков:

$$\lambda^* = V_2 u R^{-1}; \; z^* = V_1 \cdot \Delta\Pi^{-1} u^{\mathrm{T}}; \quad (4)$$

$$V_1 = \frac{1}{u\Delta\Pi^{-1} \cdot u^{\mathrm{T}}}; \; V_2 = \frac{1}{uR_{-1} \cdot u^{\mathrm{T}}}, \quad (5)$$

где $\Delta\Pi^{-1}$, R^{-1} — обратные матрицы, соответствующие матрицам $\Delta\Pi$, R; $u = [1, 1 \dots, 1]$ — матрица строка; u^{T} — транспонированная матрица u.

Можно упростить биматричную игру, описываемую матрицами стратегий игроков (3). Для этого введем

$$\Delta\Pi_i = \sum_{j=1}^{n} \Delta\Pi_{ij}, \; R_i = \sum_{j=1}^{n} \Delta\Pi_{ij} R_{ij} \Big/ \sum_{j=1}^{n} \Delta\Pi_{ij} \; (i = \overline{1,m}).$$

В принятых обозначениях: $\Delta\Pi_i$ — прирост прибыли от реализации i-го ($i = \overline{1,m}$) нововведения; R_i — средневзвешенная вероятность риска от реализации i-го ($i = \overline{1,m}$) нововведения.

В результате этого получаем биматричную игру, описываемую матрицами

$$\Delta\Pi = \begin{pmatrix} \Delta\Pi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta\Pi_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta\Pi_n \end{pmatrix}; \; R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & & R_n \end{pmatrix}.$$

При предпочтительности первого критерия — максимизации прироста прибыли, оптимальная смешанная стратегия первого игрока находится как решение второго игрока, т. е.:

$$V_2 = 1 / \sum_{i=1}^{n} 1 / R_i; \quad \lambda_i^* = V_2 \cdot \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_i} \cdot \frac{1}{{}^{\,n}_{i-1}}, \tag{6}$$

где V_2 — гарантированный выигрыш первого игрока (как решение второго игрока), выраженный в общей величине риска портфеля нововведений; λ_i^* — вероятности, с которыми игроки применяют свои чистые стратегии, или пропорции, в которых смешивают их, т. е. это искомые коэффициенты интенсивности использования нововведений или пропорции распределения ресурсов.

На основе полученной стратегии игрока I можно определить потенциальный эффект (прибыльность) реализации портфеля нововведений:

$$\Delta\Pi_{\text{П}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \Delta\Pi_i \tag{7}$$

и риск реализации портфеля нововведений, характеризующий вероятность получения от их реализации прироста прибыли в размере $\Delta\Pi_{\text{П}}$:

$$R_{\text{П}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* R_i. \tag{8}$$

Формула (8) описывает разложение общей величины риска на различные нововведения, так как параметр $\lambda_i^* R_i$ есть доля риска, приходящаяся на i-е нововведение.

Теперь на основе реализации биматричной игры предприятие имеет возможность распределить свои ресурсы, выделенные на разработку нововведений. На каждое нововведение отводится такой объем ресурсов, который соответствует оценке его полезности, т. е.

$$K_i = K \cdot \lambda_i^*,$$

где K — общий объем средств, выделенных на реализацию нововведений.

Заметим, что параметр λ_i^*, характеризуя приоритетность нововведений, определяет одновременно и последовательность (предпочтительность) разработок нововведений во времени.

Согласно результату, описываемому формулами (6), следует, что ресурсы между отдельными нововведениями необходимо распределять в размере, обратно пропорциональном потенциальному приросту прибыли от реализации нововведения. Сразу же заметим, что в силу Парето-оптимальности

рассматриваемых нововведений больший прирост прибыли сопряжен с большими рисками. А это означает, что необходимо в большей степени поддерживать нововведения, которые могут принести не слишком значимый, но скорый прирост прибыли, одновременно уделяя внимание и тем инновациям, которые способны дать значимый прирост прибыли в длительной перспективе, создавая условия для «фонового» постоянного проведения исследований и разработок, связанных с внедрением нововведений. Такой подход позволяет наилучшим образом сочетать простые оперативные и сложные упреждающие нововведения. Первые дают скорый, но быстро угасающий прирост прибыли, вторые могут обеспечить менее скорый, но долговременный, высокий и нарастающий прирост прибыли. Их рациональное сочетание во времени позволяет осуществлять наращивание нововведенческого (инновационного) потенциала и одновременно высвобождать ресурсы для решения оперативных задач текущей хозяйственной деятельности.

Если в качестве приоритета своей деятельности предприятие принимает минимизацию рисков, то оптимальная смешанная стратегия второго игрока, отвечающая в большей мере интересам предприятия, находится как решение первого игрока, т. е.:

$$V_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} 1 / \Delta\Pi_i}}; \; z_i^* = V_1 \frac{1}{\Delta\Pi_i} = \frac{1}{\Delta\Pi_i} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} 1 / \Delta\Pi_i}, \tag{9}$$

где V_1 — гарантированный выигрыш второго игрока (как решение первого игрока), выраженный в общем приросте прибыли портфеля нововведений; z_i^* — вероятности, с которыми игроки применяют свои чистые стратегии, или пропорции, в которых смешивают их, т. е. это искомые коэффициенты интенсивности использования нововведений или пропорции распределения ресурсов.

Оценки потенциальной рискованности и потенциального эффекта (прибыльности) портфеля нововведений соответственно составят:

$$R_{\text{П}} = \sum_{i=1}^{n} z_i^* R_i; \; V_2 \cdot \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_i} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{i-1}^{n} 1 / R_i}.$$

В соответствии с реализацией игры средства предприятия распределяются пропорционально найденным интенсивностям использования нововведений:

$$K_i = K \cdot z_i,$$

где K — ресурсы предприятия; K_i — ресурсы предприятия, выделенные на реализацию i-го нововведения.

Пусть по исходным данным гипотетического предприятия сформированы матрицы прироста прибыли ($\Delta\overline{\Pi}$, тыс. руб.) и риска нововведений ($\overline{R}$, доли процента):

$$\Delta\overline{\Pi} = \begin{pmatrix} 1000 & 850 & 1200 \\ 800 & 1000 & 900 \\ 0 & 1000 & 800 \end{pmatrix}; \quad \overline{R} = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,10 & 0,20 \\ 0,12 & 0,10 & 0,18 \\ 0 & 0,25 & 0,20 \end{pmatrix}.$$

Преобразовав матрицы $\Delta\overline{\Pi}$ и $\overline{R}$ в матрицы $\Delta\Pi$ и R по формулам:

$$\Delta\Pi_i = \sum_{j-1}^{3} \Delta\Pi_{ij} \quad \text{и} \quad R_i = \sum_{j=1}^{3} \Delta\Pi_{ij} R / 3 \sum_{j=1} \Delta B \cdot \Pi_{ij},$$

получим:

$$\Delta\Pi = \begin{pmatrix} 3050 & 0 & 0 \\ 0 & 2700 & 0 \\ 0 & 0 & 1800 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} 0,156 & 0 & 0 \\ 0 & 0,206 & 0 \\ 0 & 0 & 0,228 \end{pmatrix}.$$

Отдавая предпочтение максимизации прироста прибыли, при формировании портфеля нововведений имеем:

$$V_2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{3} 1/R_1} = \frac{1}{\frac{1}{0,156} + \frac{1}{0,206} + \frac{1}{0,228}} = 0,0603;$$

$$\lambda_1^* = \frac{1}{R_1} \cdot V_2 = \frac{1}{0,156} \cdot 0,0603 = 0,386;$$

$$\lambda_2^* = \frac{1}{R_2} \cdot V_2 = \frac{1}{0,206} \cdot 0,0603 = 0,349;$$

$$\lambda_3^* = \frac{1}{R_3} \cdot V_3 = \frac{1}{0,228} \cdot 0,0603 = 0,265.$$

Потенциальный эффект (прирост прибыли) портфеля нововведений составит

$$\Delta\Pi_{\Pi} = 3050 \cdot 0,386 + 2700 \cdot 0,349 + 1800 \cdot 0,265 = 2596,6 \text{ тыс. руб.},$$

а потенциальный риск портфеля

$$R_{\Pi} = 0,156 \cdot 0,386 + 0,206 \cdot 0,349 + 0,228 \cdot 0,265 = 0,1809 \approx 18,09\%.$$

Общий риск реализации всего портфеля распределится между рисками составляющих его нововведений следующим образом:

дп = дп . дп . **о,0603 * 6,03%.**

Приведенный пример показал еще один важнейший результат биматричной игры: при предпочтительности критерия прироста прибыли, подлежащего максимизации, общий риск портфеля нововведений распределяется равномерно между отдельными нововведениями портфеля.

16.6. МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОДАЖАМИ И ТРАНСАКЦИЯМИ: СТРАТЕГИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ

Стратегия продаж определяет пути, по которым продукция предприятия-производителя попадает к конечному потребителю. В сущности, это выбор системы сбыта и конкретных каналов реализации продукции.

Система сбыта влияет не только на прибыль, получаемую предприятием-производителем от реализации продукции, но и на сами параметры ее сбыта. Своевременность сбыта продукции есть функция спроса на продукцию, ее качества, цены, рекламной и трансакционной политики, издержек и результатов этой политики.

Трансакционная политика, как составная часть стратегии продаж, включает в себя сбор и переработку информации о потенциальных сегментах и клиентах-потребителях продукции, конкурентах, группах стратегического влияния, проведение переговоров и принятие решений, контроль за соблюдением контрактов и принуждение к их выполнению, защиту прав собственности. Именно с трансакционными издержками и связана реализация этой политики.

Традиционная экономическая теория, уделяя основное внимание производственным (трансформационным) издержкам, обходилась без понятия трансакционных издержек. Это было равносильно предположению о том, что любые взаимодействия между экономическими субъектами совершаются моментально, без малейших потерь и издержек.

Трансакция (от лат. ***transactio*** — совершение, акт экономического взаимодействия, договор, сделка) является базовой единицей анализа в экономике трансакционных издержек. Категория «трансакции» охватывает как материальные, так и контрактные аспекты обмена, сопровождаемые взаимными уступками. Она понимается предельно широко и используется для обозначения как обмена товарами, так и различными услугами, сделок как долговременного, так и краткосрочного характера, как требующих детализированного документального оформления, так и предполагающих простое взаимопонимание сторон.

Каждая рыночная трансакция связана с определенными издержками. Трансакционные издержки — операционные издержки сверх основных затрат на производство и обращение, косвенные, сопряженные расходы. Их можно определить как издержки экономического взаимодействия, в каких бы формах оно ни протекало. Трансакционные издержки включают издержки сбора и переработки информации, проведения переговоров, контроля за соблюдением контрактов и принуждения к их выполнению. Таким образом, если уровень трансформационных издержек определяется, в основном, технологическими факторами производства, то уровень трансакционных издержек — в первую очередь правовыми и социальными нормами.

Снижение трансакционных издержек в значительной мере зависит от системного накопления информации о потенциальных клиентах, конкурентах, группах стратегического влияния, которых можно рассматривать в качестве потенциальных партнеров по рыночным трансакциям. Международный опыт поиска и анализа подобной информации свидетельствует о том, что игнорирование этой функции приводит к существенному росту транзакционных издержек и в конечном счете — к банкротству предприятия.

Мероприятия по снижению трансакционных издержек не всегда должны быть направлены на экономию издержек по подготовке и заключению непосредственно самой сделки. Принципиальным является обеспечение эффективности этих издержек, т. е. получение прибыли, реально оправдывающей эти издержки. Определяющим в снижении трансакционных издержек является предотвращение потенциально неэффективных издержек на совершение сделок.

Для этого также может быть использован игровой подход. Учитывается, что, с одной стороны, предприятие стремится обеспечить наибольшую выручку за счет своевременного сбыта продукции в полном объеме. С другой стороны, предприятие заинтересовано в минимизации производственных и трансакционных издержек. Эти интересы не противоположные, а различные. Наличие различных интересов игроков, а следовательно, и целей предприятия, позволяет рассматривать возникшую игровую ситуацию как биматричную игру. В этой игре как бы два менеджера предприятия, которые имеют различные интересы и цели функционирования. Значит, в этой игре стратегии игроков-менеджеров могут быть представлены в виде двух платежных матриц

$$B = \begin{pmatrix} P_1B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2B_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_nB_n \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} C_1 + y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 + y_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Здесь ***Bi*** — выручка от реализации i-го заказа; P* — вероятность поступления в установленный срок (три месяца) денежных средств от реализации i-го заказа; C_i — производственные издержки i-го заказа; y_i — искомые трансакционные издержки i-го заказа.

Вероятность поступления денежных средств от реализации заказа определяется, как любой коммерческий риск, одним из объективных методов расчета.

Среди объективных методов можно отметить несколько разновидностей. Например, прямой вероятностный метод, основанный на вычислении частоты случайного события; приближенный вероятностный метод, когда множество вариантов пытаются сознательно упростить или сузить в расчете на то, что полученная таким образом модель, хотя она и грубая, окажется практически полезной; косвенный (качественный) метод, ограниченный измерением каких-то других показателей, косвенно характеризующих определенный риск.

Сформулированная биматричная игра отличается тем, что в ней в стратегиях игрока II содержатся искомые переменные — трансакционные издержки, которые необходимо определить.

Известно, что реализация биматричных игр с платежными матрицами, в которых по диагонали проставлены только значимые элементы, а все остальные элементы равны нулю, при различных предпочтениях критериев оптимальности (выручки, подлежащей максимизации, или общих издержек, подлежащих минимизации) обеспечивают приблизительно одинаковые решения. Это означает, что полученные соотношения используемых стратегий принципиально одинаково определяют оптимальные пропорции распределения средств.

Пусть менеджмент предприятия отдал предпочтение минимизации производственных и трансакционных издержек.

Тогда оптимальная смешанная стратегия второго игрока находится как решение задачи первого игрока:

у_1_ В„ В, У. 1

i=l в i i=l °.

где В,- я р,В(, (i = 1,п).

Из решения биматричной игры можно найти ее цену, характеризующую гарантированную выручку предприятия, а также вероятности применения игроками своих чистых стратегий или пропорций, в которых смешиваются стратегии, т. е. получить искомые коэффициенты интенсивности заказов и пропорции распределения ресурсов (например, денежных средств, выделяемых на трансакционную деятельность предприятия).

Итак, из решения биматричной игры можно рассчитать:

ж потенциальную выручку от реализации портфеля заказов:

в„ = Zв,z,;
i=i

ш потенциальные общие издержки на портфель заказов:

С„ =

i=i

Эти соотношения можно использовать для нахождения величины издержек предприятия, связанных с его трансакциями. Для этого потребуется исследовать соотношение

э - в „

"п

которое характеризует эффективность использования предприятием ресурсов (объем выручки на рубль общих издержек, или оборачиваемость издержек). В этой формуле параметр В„ является найденной в результате реализации игры величиной, а параметр С„ — искомой.

Предположим, что эффективность использования портфеля трансакций (Э„) задана. Тогда из соотношений (12), (13) следует, что общие издержки на трансакционную деятельность предприятия составляют:

t=i о 1-1 i=l

где Y,t = !•
i=l

Следовательно, частные издержки по отдельным трансакциям будут равны:

$$y_i = З_{\text{т}} z_i \quad (i = \overline{1, n}).$$

Таким образом, при найденных значениях игры

$$z_i (i = \overline{1, n}),$$

задавая допустимые значения коэффициента эффективности трансакций (издержек), можно найти соответствующие им значения трансакционных издержек и их распределение по трансакциям. И, наоборот, по заданным трансакционным издержкам, найти их распределение по трансакциям и коэффициент эффективности издержек.

Разработанный игровой подход к оценке трансакционных издержек может быть проиллюстрирован на примере гипотетического предприятия по следующим исходным данным (табл. 118).

Таблица 118

Заказы	Плановые	
	выручка (В,)	производственные издержки
1	1000	900
2	800	700
4	500	450

Здесь значения выручки представлены с учетом прогнозируемых вероятностей продаж продукции в установленный срок и могут быть определены каким-либо из объективных методов оценки риска сбытовой деятельности предприятия.

Платежные матрицы биматричной игры для рассматриваемой ситуации:

$$B = \begin{pmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 500 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 900 + y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 700 + y_2 & 0 & 0 \\ 0 & & 1000 + y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 450 + y_4 \end{pmatrix}.$$

Отдавая предпочтение минимизации производственных и трансакционных издержек, можно получить следующие результаты биматричной игры:

- цена игры:

$$V_1 = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{800} + \frac{1}{500}} \approx 197;$$

и вероятности (пропорции) распределения средств:

$$z_1 = 197 \cdot \frac{1}{1000} = 0,197;$$

$$z_2 = 197 \cdot \frac{1}{800} = 0,243;$$

$$z_3 = 197 \cdot \frac{1}{1200} = 0,165;$$

$$z_4 = 197 \cdot \frac{1}{500} = 0,395.$$

Оценки портфеля продаж и издержек составят:

$$В_П = 1000 \cdot 0,197 + 800 \cdot 0,243 + 1200 \cdot 0,165 + 500 \cdot 0,395 \approx 788 \text{ тыс. руб.};$$

$$C_П = (900 + y_1) \cdot 0,197 + (700 + y_2) \cdot 0,243 + (1000 + y_3) \cdot 0,165 + (450 + y_4) \cdot 0,395 = 690 + (0,197y_1 + 0,243y_2 + 0,165y_3 + 0,395y_4).$$

Теперь предположим, что предприятие рассчитывает на получение эффективности издержек относительно выручки не менее чем Э = 1,1 или относительно прибыли 0,1, т. е. 10%. Тогда

$$З_т = \frac{1}{Э} \sum_{i=1}^{n} В_i z_i - \sum_{i=1}^{n} C_i z_i = 717,3 - 690 = 27,3 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно,

$$27,3 = 0,197y_1 + 0,243y_2 + 0,165y_3 + 0,395y_4,$$

т. е. при такой эффективности общих издержек предприятие может выделить на трансакционные издержки 27,3 тыс. руб., в том числе: на первый заказ — 27,3 · 0,197 ≈ 5,46 тыс. руб., второй заказ — 27,3 · 0,243 = 6,63 тыс. руб., третий заказ — 27,3 · 0,165 = 4,52 тыс. руб., четвертый заказ — 27,3 × × 0,395 = 10,92 тыс. руб.

Таким образом, задавая значения параметров Э и $З_т$, менеджер предприятия может выбрать рациональную стратегию продаж. Как только что было показано, эта стратегия во многом определяется возможностью предприятия выделять соответствующие средства на покрытие трансакционных издержек.

16.7. МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ РЕСУРСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ: СТРАТЕГИЯ «ОТСЕЧЕНИЕ ЛИШНЕГО»

Реализация стратегии предприятия, известной как «отсечение лишнего» и связанной с продажами части его активов, — весьма сложное мероприятие. Полученные в результате реализации стратегии размеры продаж активов,

обусловленные ориентацией предприятия на цели выживаемости, — это объемная характеристика. Необходимо знать, какие конкретные элементы ресурсного потенциала, т. е. виды внеоборотных и оборотных активов должны быть проданы и в каком количестве.

При решении этих вопросов необходимо учитывать множество факторов: важность различных активов для самого предприятия, спрос на них, затраты на хранение избыточных запасов готовой продукции, материалов, сырья, полуфабрикатов, незавершенного производства, ожидаемый эффект (выручка, прибыль) от продажи сверхнормативных запасов, риски, связанные с возможностью получения ожидаемого эффекта от их продажи.

Отсюда следует, что проблема управления ресурсным потенциалом предприятия является многовариантной и многокритериальной. Здесь может быть, как и в стратегиях диверсификации и дифференциации, использована теория игр.

Построению платежной матрицы игры в стратегии «отсечение лишнего» должен предшествовать отбор элементов (видов) активов, которые могут быть проданы предприятием. Порядок рассмотрения активов, подлежащих продаже, может быть таким:

1) краткосрочные финансовые вложения в облигации, займы и т. п.;

2) запасы сырья, материалов, полуфабрикатов, незавершенное производство, запасы готовой продукции;

3) дебиторская задолженность за товары, работы и услуги, авансы, выданные поставщикам;

4) незавершенное строительство;

5) основные средства (здания, сооружения, транспорт, оборудование).

После отбора видов имущества, подлежащего продаже, определяется, что получит предприятие в результате реализации части имущества. Так, при продаже запасов интересом предприятия может быть ожидаемая выручка, которая используется для погашения задолженности. В результате продажи части запасов уменьшатся затраты, связанные с хранением запасов.

Таким образом, у предприятия налицо два вида интересов: максимизация выручки от продажи имущества и минимизация затрат на хранение запасов.

Эти интересы различные. Для их согласования может быть использована биматричная игра, которая задается двумя матрицами:

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_m \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы характеризуют выручку от реализации запаса данного вида в ситуации ***(ij); Cj*** показывают затраты на хранение запаса того же вида в ситуации ***(Ij).*** Первый и второй игроки определяют две стороны деятельности предприятия — максимизацию выручки и минимизацию затрат. Выигрыш Ву первого игрока в ситуации ***(ij)*** и выигрыш второго игрока в ситуации ***(ij),*** нули вне главной диагонали обусловлены тем, что разноименные стратегии выбраны быть не могут.

Ясно, что эта биматричная игра с диагональными невырожденными матрицами В и С в экономически осмысленных ситуациях $B_y > 0$, $Cy > 0$ не имеет равновесия в чистых стратегиях. Однако, как и всякая биматричная игра, она имеет вполне смешанную и единственную ситуацию равновесия, определяемую формулами:

$$V_2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/C_i}, \quad \lambda^* = \frac{1}{C_i} \cdot V_2 = \frac{1}{C_i} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/C_i}$$

$$V_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/B_i}, \quad z_i = \frac{1}{B_i} \cdot V_1 = \frac{1}{B_i} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/B_i}.$$

В принятых обозначениях: V_1, V_2 — соответственно гарантированные выручка и затраты на хранение запасов товарно-материальных активов предприятия; ***X', z**** — соответственно вероятности (интенсивности) продаж и запасов товарно-материальных активов предприятия.

Так как всегда все ***X], z*** > 0 ***(i = 1,n),*** то с особой тщательностью необходимо относиться к отбору элементов ресурсного потенциала, выбираемых для продажи на рынке. Понятно, что запасы должны иметь спрос на товарном рынке и обеспечивать необходимую для предприятия выручку.

При распределении общего объема продаж запасов этих элементов необходимо учитывать приоритетность критериев для предприятия: максимизировать выручку или минимизировать затраты на хранение запасов. В соответствии с выбранным предприятием предпочтением осуществляется распределение общего объема ресурсов, выделяемых для реализации принятой стратегии. В качестве ресурсов, подлежащих распределению, могут выступать денежные средства, выделенные предприятием для успешной продажи запасов, общий объем запасов, подлежащих реализации (продаже), и другие ресурсы.

Формирование стратегии «отсечение лишнего» в оптимизации ресурсного потенциала гипотетического предприятия можно показать на примере следующей биматричной игры. Пусть в продажу товарно-материальных ценностей на основе предварительного отбора намечены четыре вида запасов, параметры которых для построения биматричной игры представлены в матрицах В и С (в тыс. руб.):

$$B = \begin{pmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4000 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 240 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 360 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 480 \end{pmatrix}$$

При предпочтительности максимизации выручки результаты реализации биматричной игры таковы:

$$V_2 = \frac{1}{1/120 + 1/240 + 1/360 + 1/480} = 57{,}6 \text{ руб.};$$

$$\lambda_1^* = 0{,}48; \quad \lambda_2^* = 0{,}24; \quad \lambda_3^* = 0{,}16; \quad \lambda_4^* = 0{,}12;$$

$$B_П = 1920 \text{ тыс. руб.}; \quad C_П = 230{,}4 \text{ тыс. руб.}$$

При предпочтительности минимизации затрат:

$$\frac{1}{1/1000 + 1/2000 + 1/3000 + 1/4000} = 480 \text{ тыс.руб.};$$

$$z_1^* = 0{,}48; \quad z_2^* = 0{,}24; \quad z_3^* = 0{,}16; \quad z_4^* = 0{,}12;$$

$$B_П = 1920 \text{ тыс. руб.}; \quad C_П = 230{,}4 \text{ тыс. руб.}$$

Сравнение результатов решения биматричной игры показывает, что оба критерия предпочтительности обеспечивают одинаковые решения. Это означает, что максимизация выручки тождественна минимизации затрат на хранение запасов, и наоборот, минимизация затрат на хранение запасов тождественна максимизации выручки. Этот вывод достаточно ясен, так как затраты на хранение запасов были взяты процентом от выручки.

Очевидно, в качестве первого предпочтительного критерия необходимо использовать прибыль от реализации запасов, так как при этом прибыль не пропорциональна выручке от их продажи.

Предположим теперь, что матрица прибылей от продажи запасов товарно-материальных активов имеет вид:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 300 \end{pmatrix}$$

Тогда при предпочтительности максимизации прибыли получим:

$$V_2 = 57{,}6 \text{ тыс. руб.}$$

$$\lambda_1^* = 0{,}48\ ;\ \lambda_2^* = 0{,}24;\ \lambda_3^* = 0{,}16;\ \lambda_4^* = 0{,}12;$$

$$\Pi_\Pi = 152{,}8 \text{ тыс. руб.};\ C_\Pi = 230{,}4 \text{ тыс. руб.}$$

При предпочтительности минимизации затрат на хранение запасов:

$$V_1 = 38{,}96 \text{ тыс. руб.};$$

$$z_1^* = 0{,}390;\ z_2^* = 0{,}325;\ z_3^* = 0{,}155;\ z_4^* = 0{,}130;$$

$$\Pi_\Pi = 156{,}95 \text{ тыс. руб.};\ C_\Pi = 214{,}0 \text{ тыс. руб.}$$

Очевидно, что минимизация затрат обеспечивает большую эффективность затрат на хранение запасов, так как 152,8/230,4 < 156,9/214,0.

ГЛАВА 17

МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО МЕНЕДЖМЕНТА

Ничто не приносит людям большей удовлетворенности содеянным, чем способность выполнить практически невозможное, даже если это делается крайне неудачно.

П. Ф. Драккер

Средний из трех вратьев старше младшего на ДВА года, а возраст старшего врата превышает сумму лет двух остальных вратьев четырьмя годами. Найти возраст каждого врата, если вместе им 96 лет.

Старинная задача

17.1. МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ

Модели формирования производственной программы предназначены для оптимизации распределения объемов производства по способам производства. Постановка задачи может выполняться с различными экономическими оценками.

Способ решения задачи зависит от математического вида целевой функции. При линейной целевой функции методом решения будет линейное программирование; при нелинейной — возможно привлечение метода множителей Лагранжа или динамического программирования.

17.1.1. ОДНОПРОДУКТОВАЯ МОДЕЛЬ

Предприятие производит продукцию одного наименования с помощью л технологических способов.

Известны нормы расхода (a_{ij}) i-го вида ресурса (i = 1, *m)* на изготовление единицы продукции у'-м способом производства (у* = 1, *n).* Запас i-го ресурса составляет b_i. Прибыль от реализации единицы продукции у-м способом равна *Cj.*

Требуется найти интенсивность применения способов производства (лг,), при которых прибыль наибольшая, т. е. сколько единиц продукции необходимо выпускать каждым технологическим способом, чтобы получить наибольшую прибыль, или в течение какого времени применять каждый способ, чтобы выпустить максимальное количество продукции.

Экономико-математическая модель задачи:

$$\max L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i; \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

Пример 1. Для изготовления продукции используются три вида сырья: C_1, C_2, C_3. При этом можно применять любой из 4 технологических способов производства T_1, T_2, T_3, T_4. Запасы сырья, его расход и количество производимой продукции за час работы по каждому способу приведены в таблице 119.

Таблица 119

Станки	Расход сырья за 1 час				Запас сырья
	Ti	T2	Тз	Ti	
С,	1	2	1	0	18
С₂	1	1	2	1	30
Сз	1	3	3	2	40
Выпуск продукции за 1 час	12	7	18	10	

Требуется составить производственную программу так, чтобы обеспечить максимальный выпуск продукции.

Решение. Обозначим через *,- — время использования у'-го технологического способа. Тогда оптимальное решение задачи $X = (18, 0, 0, 11)$, значение целевой функции при оптимальном решении $L = 326$.

17.1.2. МНОГОПРОДУКТОВАЯ МОДЕЛЬ

Предприятие выпускает n видов изделий, на которые расходуется m видов ресурсов. Запас i-го ресурса составляет Ьi. Известны нормы расхода ресурсов a_{ij}, которые показывают, сколько единиц i-го вида ресурса (i = 1, m) требуется для производства единицы изделия у'-го вида (у = 1, n). Нормы расхода всех ресурсов в совокупности образуют технологическую матрицу производства. Прибыль от реализации у'-го изделия равна c_j

Требуется составить производственную программу, обеспечивающую предприятию максимальную прибыль.

Обозначим объем выпуска продукции у'-го вида через x_j

Экономико-математическая модель задачи:

$$\max L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i; \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

Если выпускаемая предприятием продукция является неделимой, то появляются дополнительные ограничения: x_j — целые числа, и задача превращается в задачу целочисленного программирования.

Пример 2. Предприятие выпускает 3 вида родукции $П_1$, $П_2$, $П_3$. Ресурсы завода: 700 ед. оборудования, 800 ед. сырья и 600 ед. энергии. Запасы ресурсов, нормы расхода и цена продукции заданы в таблице 120.

Таблица 120

Ресурсы	Нормы расхода			Запасы ресурсов
	m	П2	Пз	
Оборудование	2	1	3	700
Материалы	3	4	4	800
Энергия	4	5	2	600
Цена	8	7	6	

Сколько нужно произвести изделий каждого вида, чтобы выручка была наибольшей?

Решение. Это задача линейного программирования. Обозначим объем выпуска продукции j-го вида через x_j. Экономико-математическая модель задачи:

$$\max L = 8x_1 + 7x_2 + 6x_3,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 \le 700, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 800, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 600, \\ x_{1,2,3} \ge 0. \end{cases}$$

Оптимальное решение задачи $X = (80; 0; 140)$.

Пример 3. На производственном участке выпускается два типа деталей. Исходная заготовка при изготовлении деталей первого типа проходит две операции (токарную и сверлильную) при трудоемкости 20 и 30 ч/шт. соответственно. При изготовлении детали второго типа необходимы три операции (токарная, сверлильная, шлифовальная) при трудоемкости 40, 30, 20 ч/шт. соответственно. Прибыль от продажи деталей равна 1,5 руб./шт. для деталей первого типа и 1 руб./шт. для деталей второго типа.

На плановый период ресурс рабочего времени по операциям составляет, ч: токарная — 1000 ч, сверлильная — 900 ч, шлифовальная — 400 ч.

Необходимо подобрать производственную программу выпуска деталей, обеспечивающую максимальную прибыль.

Решение. Обозначим количество деталей первого типа, принимаемых для выпуска, через x_1; второго типа — x_2. Экономико-математическая модель задачи:

$$\max L = 1{,}5x_1 + 1x_2;$$

$$\begin{cases} 20x_1 + 40x_2 \le 1000; \\ 30x_1 + 30x_2 \le 900; \\ 20x_2 \le 400; \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

17.1.3. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ЗАДАЧА Л. В. КАНТОРОВИЧА

Одна из первых математических моделей, разработанных Л. В. Канторовичем в 1939 г., была посвящена составлению производственной программы, включающей типовые ассортиментные комплекты.

Пусть имеется некий производственный процесс, предназначенный для выпуска n видов продукции. По каждому из видов продукции заданы ограничения на объем выпуска и нормы расхода привлекаемых ресурсов. Поставка продукции потребителю осуществляется комплектами.

Требуется сформировать плановый ассортимент выпуска продукции, обеспечивающий максимальное число комплектов поставки продукции.

Экономико-математическая модель задачи:

$$\max L = \sum_i \frac{x_i}{k_i};$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} \cdot x_j \le b_i; \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

Здесь k_i — количество единиц i-го продукта в комплекте. Решается задача методом линейного программирования, который фактически и появился как алгоритм решения этой математической задачи в 1939 г.

17.1.4. ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ

Пример 4. Предприятие выпускает обогреватели и кондиционеры, сбыт которых зависит от состояния погоды. По данным прошлых наблюдений, предприятие в теплую погоду реализует 1000 обогревателей и 6000 кондиционеров; в холодную погоду — 4000 обогревателей и 1200 кондиционеров. Себестоимость обогревателя 8 руб./шт.; кондиционера — 5 руб./шт. Цена обогревателя в месяц изготовления 12 руб./шт.; позже — 3 руб./шт. Цена кондиционера в месяц изготовления 8 руб./шт.; позже — 2 руб./шт. На реализацию всей продукции расходуется 2000 руб.

Определить оптимальную стратегию предприятия по выпуску продукции, обеспечивающую при любой погоде наибольшую прибыль.

Решение. Предприятие в этих условиях обладает двумя чистыми стратегиями: стратегия А с расчетом на теплую погоду и стратегия Б с расчетом на холодную погоду. Природа — второй игрок — обладает также двумя стратегиями: стратегия В — теплая погода, стратегия Г — холодная погода.

Если предприятие выберет стратегию А, то в случае теплой погоды (стратегия природы В) прибыль составит:

$$1000 \cdot (12 - 8) + 6000 \cdot (8 - 5) - 2000 = 20\,000 \text{ руб.},$$

а в случае холодной погоды (стратегия природы Г):

$$1000 \cdot (12 - 8) + 1200 \cdot (8 - 5) + \\ + (6000 - 1200) \cdot (2 - 5) - 2000 = -8800 \text{ руб.}$$

Если предприятие выберет стратегию Б, то в случае теплой погоды (стратегия природы В) прибыль составит:

$$1000 \cdot (12 - 8) + 1200 \cdot (8 - 5) + \\ + (4000 - 1000) \cdot (3 - 8) - 2000 = -9400 \text{ руб.},$$

а в случае холодной погоды (стратегия природы Г):

$$4000 \cdot (12 - 8) + 120 \cdot (8 - 5) - 2000 = 17\,600 \text{ руб.}$$

Следовательно, платежная матрица данной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 20\,000 & -8800 \\ -9400 & 17\,600 \end{pmatrix}.$$

Первая и вторая строки матрицы соответствуют стратегиям А и Б предприятия, а первый и второй столбцы — стратегиям природы В и Г.

В условиях неопределенности погоды наибольший гарантированный доход предприятие обеспечит, если будет применять смешанную стратегию. Оптимизация смешанной стратегии позволит предприятию всегда получать среднее значение выигрыша независимо от стратегии природы.

Пусть x — частота применения первым игроком стратегии А, $(1 - x)$ — частота применения стратегии Б. В случае оптимальной смешанной стратегии предприятие получит и при стратегии В (холодная погода), и при стратегии Г (жаркая погода) второго игрока одинаковый средний доход:

$$20\,000x - 8800 \cdot (1 - x) = -9400x + 17\,600 \cdot (1 - x).$$

Отсюда: $x = 0{,}48$; $(1 - x) = 0{,}52$.

Следовательно, предприятие, применяя чистые стратегии в соотношении 48 : 52, будет иметь оптимальную смешанную стратегию, обеспечивающую ему в любом случае среднюю прибыль в сумме:

$$20\,000 \cdot 0{,}48 - 8800 \cdot 0{,}52 = 4822 \text{ руб.}$$

Эта величина и будет ценой игры.

При оптимальной стратегии выпуск продукции составит:

$$(1000 \text{ обогревателей} + 6000 \text{ кондиционеров}) \cdot 0{,}48 +$$
$$+ (4000 \text{ обогревателей} + 1200 \text{ кондиционеров}) \cdot 0{,}52 =$$
$$= 2548 \text{ обогревателей} + 3522 \text{ кондиционеров}.$$

Следовательно, оптимальная стратегия предприятия заключается в выпуске 2548 обогревателей и 3522 кондиционеров, что обеспечит ему при любой погоде прибыль в сумме 4822 руб.

Аналогичный ответ получается при решении задачи линейного программирования:

$$\max L = x_1 + x_2,$$
$$\begin{cases} 20\,000x_1 - 8800x_2 \le 1, \\ -9400x_1 + 17\,600x_2 \le 1. \end{cases}$$

Ответ $x^0 = (0{,}001;\ 0{,}0011)$; $L = 0{,}00207$.

Отсюда $\upsilon = 1/L = 1/0{,}000207 = 4822$; $u^0 = \upsilon \cdot x_j^{\,0} = (0{,}48;\ 0{,}52)$.

17.1.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ ПО ПЕРИОДАМ

Распределение производственной программы по периодам влияет на недогрузку или перегрузку оборудования, площадей и рабочих. При систематической недогрузке возможна продажа или лизинг оборудования и площадей, сокращение рабочих мест. При перегрузке возникают дополнительные расходы ввиду оплаты сверхурочной работы,

увеличиваются потери от брака. Часть работы можно передать другим фирмам, докупить недостающее оборудование. В качестве целевой функции может использоваться: max прибыли, min недогрузки или перегрузки оборудования.

Пример 5. Рассмотрим производственную ситуацию, при которой начальный запас изделий 50 шт.; основная зарплата при изготовлении 50 руб./шт.; сверхурочная зарплата 65 руб./шт.; субподрядная плата 80 руб./шт.; затраты на хранение 1 руб./шт. в месяц; прочие исходные данные приведены в таблице 121.

Требуется распределить производственные мощности по интервалам времени так, чтобы удовлетворить спрос с минимальными затратами.

Решение. Задачи в транспортной постановке требуют, чтобы снабжение точно равнялось спросу, поэтому в матрицу добавляется столбец «Фиктивная мощность». Стоимость неиспользованной мощности можно принять равной + **со** при оптимизационном критерии на минимум, и равной 0 при оптимизационном критерии на максимум (табл. 122).

Таблица 121

Месяц	Источники производственной мощности, шт.			Спрос, шт.
	основное время	сверхурочные	субподряд	
1	300	50	200	450
2	400	50	200	550
3	500	50	200	750

Таблица 122

		Месяц 1	Месяц 2	Месяц 3	Фиктивная мощность	Суммарная доступная мощность
Начальный запас		50 0	1	2	1000	50
Месяц 1	Основное время	300 50	51	52	1000	300
	Сверхурочное	50 65	66	67	1000	50
	Субподряд	50 80	81	82	150 1000	200
Sooка	Основное время		400 80	51	1000	400
	Сверхурочное		50 66	66	1000	50
	Субподряд		100	81	100 1000	200
Месяц 3	Основное время			500 50	1000	500
	Сверхурочное			50 65	1000	50
	Субподряд			200 80	1000	200
Суммарный спрос		450	550	750	250	2000

Затраты на хранение составляют 1 руб./шт. в месяц, поэтому стоимость продукции, изготовленной в первом месяце и проданной во втором, будет больше на 1 руб.

Затраты по плану:

Месяц 1: $50 \cdot 0 + 300 \cdot 50 + 50 \cdot 65 + 50 \cdot 80 = 22\,250$ руб.

Месяц 2: $400 \cdot 50 + 50 \cdot 65 + 100 \cdot 80 = 31\,250$ руб.

Месяц 3: $500 \cdot 50 + 50 \cdot 65 + 200 \cdot 80 = 44\,250$ руб.

Итого: 97 750 руб.

17.1.6. МИНИМИЗАЦИЯ ОСТАТКОВ НЕЗАВЕРШЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

Пусть для каждого интервала времени планируемого периода ($t = 1, \ldots, T$) известен спрос на продукцию (a_t) и начальный запас продукции s_0. Запас на конец t-го интервала обозначим через s_t.

Выпуск продукции в t-м интервале является искомой величиной (x_t) и равен разности спроса на продукцию и изменения незавершенного производства:

$$x_t = a_t + (s_t - s_{t-1}).$$

Для производства важна равномерность выпуска, поэтому величина ($x_{t+1} - x_t$) не должна сильно изменяться от одного интервала к другому. Введем две переменные y_t — прирост производства, z_t — снижение производства. Тогда:

$$x_{t+1} - x_t = y_t - z_t,$$

т. е. если производство в ($t + 1$)-й интервал возросло по сравнению с t-м интервалом, то $y_t > 0$, $z_t = 0$; если же снизилось, то $y_t = 0$, $z_t > 0$.

Требуется свести к минимуму колебания графика выпуска продукции и минимизировать остатки незавершенного производства.

Экономико-математическая модель задачи:

$$\min L = \sum_{t=1}^{T} (y_t + s_t);$$

$$\begin{cases} x_t - a_t - s_t + s_{t-1} = 0, \quad t = 1, \ldots, T; \\ x_{t+1} - x_t - y_t + z_t = 0; \\ x_t, s_t, y_t, z_t \geq 0. \end{cases}$$

В приведенной выше модели предполагается, что равномерность и запасы имеют одинаковую важность. Если важнее минимизация незавершенного производства, то коэффициенты целевой функции при s_t должны быть больше единицы. Если важнее равномерность производства, то коэффициенты целевой функции при y_t должны быть больше единицы.

Пример 6. Планируется производство продукции на первый квартал. Спрос на продукцию: в январе — 10 т, в феврале — 20 т, в марте — 15 т. Начальный запас — 5 т.

Требуется свести к минимуму колебания графика выпуска продукции и минимизировать остатки незавершенного производства.

Как изменится выпуск продукции по месяцам, если для предприятия важнее сокращение запасов?

Решение. Экономико-математическая модель задачи:

$$\min L = y_1 + y_2 + y_3 + s_1 + s_2 + s_3,$$

$$\begin{cases} x_1 - s_1 = 5, \\ x_2 - s_2 + s_1 = 20, \\ x_3 - s_3 + s_2 = 15, \\ x_2 - x_1 - y_1 + z_1 = 0, \\ x_3 - x_2 - y_2 + z_2 = 0, \\ x_{1,2,3}; s_{1,2,3}; y_{1,2,3}; z_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

Оптимальное решение, полученное с помощью *QSB*: выпуск продукции в каждом месяце по 13,3 т; незавершенное производство в первый месяц составит 8,3 т, во второй — 1,7 т, в третий — 0 т; $\min L = 10$.

Если для предприятия важнее сокращение запасов, то целевая функция будет, например такой:

$$\min L = y_1 + y_2 + y_3 + 2(s_1 + s_2 + s_3).$$

В этом случае выпуск и запас продукции по месяцам: 10 т и 5 т; 15 т и 0 т; 15 т и 0 т; $\min L = 15$.

17.1.7. ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАГРУЗКИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ МОЩНОСТЕЙ

Пример 7. По плану производства требуется выпустить 360 единиц продукции П, 340 единиц $П_2$, 500 единиц $П_3$ на двух взаимозаменяемых станках разной производительности. Фонды времени каждого станка, производительность

Таблица 123

Станки	Производительность и стоимость изготовления			Фонд времени
	П.	Пз	Пз	
С	З 7	4 12	б 8	180
$С_2$	79	5 10	8 13	180

и стоимость изготовления продукции по видам заданы в таблице 123.

Требуется распределить изделия по станкам, так чтобы стоимость изготовления всей продукции была наименьшей.

Решение. Обозначим через x_{ij} — количество времени на изготовление j-й продукции на i-м станке. Экономико-математическая модель задачи:

$$\min L = 7x_{11} + 12x_{12} + 8x_{13} + 9x_{21} + 10x_{22} + 13x_{23};$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} < 180;$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 180;$$
$$3x_{11} + 7x_{21} = 360;$$
$$4x_{12} + 5x_{22} = 340;$$
$$6x_{13} + 8x_{23} = 500.$$

Пример 8. На предприятии имеется 4 агрегата различных типов, каждый из которых может выполнять 4 различные операции по обработке деталей. Время обработки деталей на каждой операции (минут) каждым агрегатом указано в таблице 124.

Таблица 124

Агрегаты	Операции			
	1	2	3	4
1	6	3	5	7
2	6	2	4	5
3	4	3	6	6
4	3	4	4	3

Необходимо закрепить операции за агрегатами так, чтобы общее время выполнения всех операций было минимальным, при условии, что за каждым модулем закреплена только одна операция.

Решение. Это задача о назначениях (см. § 6.2). Оптимальное решение задачи: $x_{11} = x_{22} = x_{33} = x_{44} = 1$; значение целевой функции при оптимальном решении $L = 17$.

17.2. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

17.2.1. МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧНОГО ЗАКАЗА

Управляя запасами, необходимо ответить на вопросы: когда заказать? сколько заказать? сколько иметь в резерве?

Чем меньше запас, тем меньше издержки хранения (арендная плата), но при этом больше издержки заказа (транспортировка материалов). Кроме того, возрастает риск сбоя производства из-за задержек в поставках.

Задача системы материально-технического снабжения предприятия заключается в том, чтобы обеспечить минимум затрат на транспортировку и хранение запасов при

одновременном бесперебойном обеспечении ими процесса производства.

Аналогичные рассуждения характерны и для партии выпускаемой продукции. Если производить продукцию мелкими партиями, издержки хранения готовой продукции будут минимальны, но возрастут издержки переналадки оборудования.

Наибольшее распространение получили четыре модели определения оптимального размера закупочной партии (Q^*):

- модель экономичного заказа (*EOQ*):

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot S}{H}};$$

- модель производственного заказа:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot S}{H \cdot \left(1 - \frac{D}{\text{M}}\right)}};$$

- модель заказа с резервным запасом:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot S}{H} \cdot \frac{H + B}{B}};$$

- модель заказа с дисконтом:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot S}{h \cdot \text{Ц}}},$$

где D — годовой спрос, S — затраты заказа, H — затраты хранения, М — мощность производителя, B — затраты резервирования, Ц — закупочная цена, h — затраты хранения в процентах от цены.

Модель экономичного заказа используется при коротком цикле изготовления партии поставки. Модель производственного заказа — при длительном цикле. Модель заказа с резервным запасом — при создании резервного запаса на случай сбоя в поставках. Модель заказа с дисконтом — при наличии скидок с цены за покупку большой партии.

В модели экономичного заказа *(EOQ)* размер закупочной партии — величина постоянная, запасы расходуются равномерно, очередные поставки осуществляются через равные интервалы времени. Заказ на поставку очередной партии дается при уменьшении размера запаса до установленного критического уровня — «точки заказа», и как только размер запаса доходит до нуля, мгновенно поступает новая партия.

Пример 9. Компания ежегодно закупает D = 8000 шт. деталей по цене Ц = 10 руб./шт. и использует их на сборке. Затраты хранения одной детали в течение года H = = 3 руб./шт. Затраты заказа S = 30 руб./заказ. Эффективный фонд времени работы за год Ф = 200 рабочих дней. Доставка заказа от поставщиков занимает L = 2 рабочих дня. Производственная мощность поставщика — 10 670 транзисторов в год. Затраты резервирования — 7 руб./шт. в год.

Построить график изменения запаса во времени и определить, используя модель экономичного запаса *(EOQ)*: Q^* — оптимальный размер закупочной партии; N — число заказов за год; T — время между заказами; d — интенсивность потребления запаса (дневную потребность); *ROP* — точку перезаказа; C — общие затраты.

Решение. Рассмотрим влияние размера закупочной партии на суммарные затраты хранения и запаса (табл. 125).

Если все 8000 деталей закупаются одновременно, то время между заказами — 1 год, общие затраты — 12 030 руб., максимальный запас — 8000 шт., среднегодовой запас:

$$Q_{ср} = (Q^{max} - Q^{min})/2 = (8000 - 0)/2 = 4000 \text{ шт.}$$

Если детали закупаются двумя партиями, то время между заказами — полгода, общие затраты составляют 6060 руб.,

Таблица 125

Размер закупочной партии	Затраты хранения	Затраты заказа	Затраты хранения и заказа
8000	8000/2 - 3 = 12 000	8000/8000 - 30 = 30	12 030
4000	6000	60	6060
500	750	480	1230
400	600	600	1200
300	450	800	1250
200	300	1200	1500
100	150	2400	2550

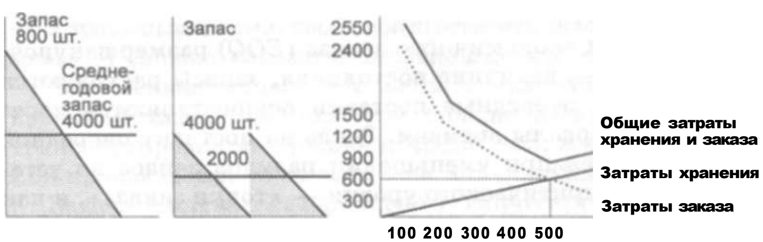


Рис. 54

максимальный запас — 4000 шт., среднегодовой запас $Q_{ср}$ = (4000 – 0)/2 = 2000 шт. (рис. 54).

Общие затраты хранения и заказа минимальны, если затраты хранения (CH) равны затратам заказа (CS), т. е. общие затраты хранения зависят от величины затрат хранения одной штуки и размера среднегодового запаса:

$$CH = H(Q^{max} - Q^{min})/2 = HQ^*/2.$$

Общие затраты заказа зависят от величины удельных затрат заказа и количества заказов за год:

$$CS = SD/Q^*.$$

Затраты хранения равны затратам заказа при условии:

$$HQ^*/2 = SD/Q^*.$$

Отсюда оптимальный размер закупочной партии (формула Уилсона):

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot S}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8000 \cdot 30}{3}} = 400 \text{ шт.}$$

Количество заказов за год:

$$N = D/Q^* = 8000/400 = 20.$$

Время между заказами:

$$T = Ф/N = 200/20 = 10 \text{ дней.}$$

Интенсивность потребления:

$$d = D/Ф = Q^*/T = 8000/200 = 400/10 = 40 \text{ шт. в день.}$$

Точка перезаказа — критический уровень запаса, по достижении которого нужно сделать перезаказ, тогда новая партия поступит вовремя:

$$ROP = dL = 40 \cdot 2 = 80 \text{ шт.}$$

Общие затраты на хранение, заказ и закупку запасов составляют:

$$C = C_H + C_S + C_Ц = \frac{Q^*}{2} \cdot H + \frac{D}{Q^*} \cdot S + Ц \cdot D =$$

$$= \frac{400}{2} \cdot 3 + \frac{8000}{400} \cdot 30 + 10 \cdot 8000 = 81\,200 \text{ руб.}$$

График изменения запаса во времени приведен на рисунке 55.

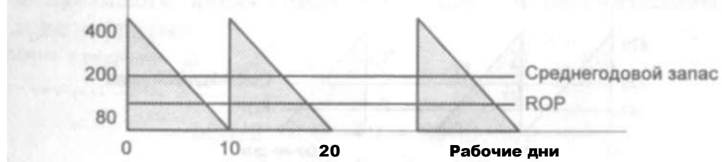


Рис. 55

17.2.2. МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ЗАКАЗА

Как изменятся параметры примера 6, если запас пополняется по мере изготовления партии? Каков при этом максимальный уровень запаса и интенсивность его пополнения?

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot S}{H \cdot \left(1 - \frac{D}{M}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8000 \cdot 30}{3 \cdot \left(1 - \frac{8000}{10670}\right)}} = 800 \text{ шт.}$$

$N = D/Q^* = 8000/800 = 10$ заказов в год;
$T = Ф/N = 200/10 = 20$ дней между заказами;
$p = P/Ф = 10670/200 = 53$ шт. в день производится.

На производство всей партии потребуется:

$$T_1 = Q^*/p = 800/53 = 15 \text{ дней.}$$

Если бы запас одновременно с пополнением не потреблялся, то максимальный запас был бы 800 шт., а так:

$Q^{max} = 800$ шт. $- 15$ дней $\cdot$ 40 шт. в день $= 200$ шт.
$C = 200/2 \cdot 3 + 8000/800 \cdot 30 + 10 \cdot 8000 = 80\ 600$ руб.

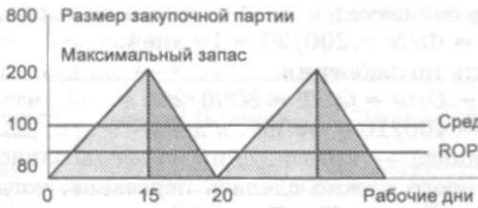


Рис. 56

График изменения запаса во времени приведен на рисунке 56.

17.2.3. МОДЕЛЬ ЗАКАЗА С РЕЗЕРВНЫМ ЗАПАСОМ

Обычно запас расходуется неравномерно, а время между подачей заказа и поступлением очередной партии колеблется, поэтому на случай сбоя в поставках создается резервный запас (рис. 57).

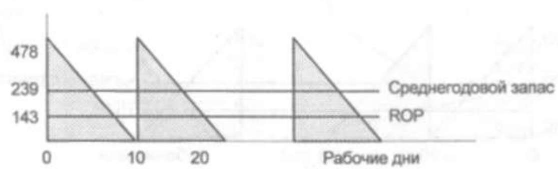


Рис. 57

Как изменятся параметры примера 15.1 (модель *EOQ*), если часть закупочной партии расходуется на создание резервного запаса? Каков при этом оптимальный размер резервного запаса?

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot S}{H} \cdot \frac{H + B}{B}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8000 \cdot 30}{3} \cdot \frac{3 + 7}{7}} = 478 \text{ шт.}$$

$$Q^{рез} = Q^* \cdot \left(1 - \frac{B}{B + H}\right) = 478 \cdot \left(1 - \frac{7}{7 + 3}\right) = 143 \text{ шт.}$$

— резервный запас.

Превышение резервного запаса $= 478 - 143 = 335$ шт.

$N = D/Q^* = 8000/478 = 17$ заказов.
$T = Ф/N = 200/17 = 12$ дней.

$$C = C_H + C_S + C_B + C_Ц = \frac{Q^*}{2} \cdot H + \frac{D}{Q^*} \cdot S + Q^{рез} \cdot B + Ц \cdot D =$$

$$= 478/2 \cdot 3 + 8000/478 \cdot 30 + 143 \cdot 7 + 10 \cdot 8000 = 82\ 221 \text{ руб.}$$

17.2.4. МОДЕЛЬ ЗАКАЗА С ДИСКОНТОМ

Как изменятся параметры примера 1 (модель *EOQ*): оптимальный размер закупочной партии и общие затраты, если поставщики установили дисконтные скидки для оптовых покупателей: партия 400 штук по 10 руб./шт.; 600 штук — 9,5 руб./шт.; 2000 штук — 9,3 руб./шт.? Затраты на хранение 30% от цены.

Какое заказываемое количество минимизирует общие затраты?

$$Q^*_{500} = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot S}{h \cdot Ц}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8000 \cdot 30}{0{,}3 \cdot 10}} = 400 \text{ шт.}$$

$$Q^*_{600} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8000 \cdot 30}{0{,}3 \cdot 9{,}5}} = 410 \text{ шт.}$$

$$Q^*_{2000} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8000 \cdot 30}{0{,}3 \cdot 9{,}3}} = 415 \text{ шт.}$$

Корректируем в сторону увеличения Q^*, которые ниже допустимого дисконтного диапазона, и рассчитываем общие затраты.

$$C_{500} = C_H + C_S + C_Ц = \frac{Q^*}{2} \cdot h \cdot Ц + \frac{D}{Q^*} \cdot S + Ц \cdot D =$$

$$= 500/2 \cdot 0{,}3 \cdot 10 + 8000/500 \cdot 30 + 10 \cdot 8000 = 81\ 230 \text{ руб.}$$

$$C_{600} = 600/2 \cdot 0{,}3 \cdot 9{,}5 + $$
$$+ 8000/600 \cdot 30 + 9{,}5 \cdot 8000 = 77\ 255 \text{ руб.}$$

$$C_{2000} = 2000/2 \cdot 0{,}3 \cdot 9{,}3 + $$
$$+ 8000/2000 \cdot 30 + 9{,}3 \cdot 8000 = 77\ 310 \text{ руб.}$$

17.2.5. МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ПРИ СЛУЧАЙНОМ СПРОСЕ

Пусть в целые моменты времени 1, 2, ..., n, ... поступают заявки на некоторый товар. Размеры этих заявок носят случайный характер: спрос в момент k есть случайная величина ξ_k. Будем считать, что величины ξ_k при разных k независимы и одинаково распределены с плотностью $p(x)$, которую мы считаем положительной при $x > 0$.

Для удовлетворения спроса мы имеем возможность запастись некоторым количеством товара заранее, т. е. в момент 0, и, кроме того, в каждый момент k можем сделать дополнительный заказ $u(k)$, который мы получим в момент $k + 1$. Товар, заказанный заранее, который доставляют через единицу времени после заказа, обходится в h денежных единиц за единицу товара.

Если в какой-то момент спрос превышает имеющееся количество товара, то мы имеем возможность получить товар тотчас же и тем самым удовлетворить спрос. Однако в этом случае товар поступает по цене H за единицу товара. Естественно, $H > h$. Наша задача состоит в выборе такой политики предварительных заказов $u_0, u_1, ..., u_{N-1}$ в течение N единиц времени, чтобы удовлетворить спрос с наименьшими общими затратами.

Решение. Обозначим x_n количество товаров, оставшееся после удовлетворения n-й заявки ξ_n. Тогда $x_{n+1} = x_n + u_n$, если только правая часть этого равенства положительна. Если спрос ξ_{n+1} в момент $n + 1$ превышает количество товаров $x_n + u_n$, имеющихся к моменту $n + 1$, то недостаток товаров покрывается за счет немедленной закупки по штрафной цене, и в этом случае $x_{n+1} = 0$. Если условиться обозначить $f(x)$ функцию, равную $f(x)$ при $f(x) > 0$ и нулю при $f(x) \le 0$, то связь x_{n+1} и x_n можно записать так:

$$x_{n+1} = (x_n + u_n - \xi_{n+1})^+.$$

При фиксированной последовательности $u = (u_0, u_1, ..., u_{N-1})$ предварительных закупок наши затраты составят следующую сумму:

$$h \sum_{k=0}^{N-1} u_k + H \sum_{k=0}^{N-1} (\xi_{k+1} - x_k - u_k)^+ = l_N[u].$$

Первое слагаемое этой суммы есть плата за предварительно заказанные товары, второе слагаемое — стоимость штрафных закупок. Вся сумма 1^[u] — случайная величина. В качестве характеристики последовательности u естественно принять среднее значение этой случайной величины TN[U] = Ml_N[u], Наша цель состоит в выборе такого допустимого управления u = (щ, u, u_{N-1}), чтобы минимизировать среднюю стоимость товаров за время [0, N],

Поясним, какие управления считаются допустимыми. Прежде всего, все компоненты вектора u — неотрицательные величины, так как заказ не может быть отрицательным. Далее, величина заказа в момент k - u_k вычисляется только по ходу процесса до момента k включительно, т. е. по X\, x_2, x_k. Это последнее требование очень существенно, ведь ход процесса после момента k определяется величинами £, $_{fe+2}$, которые до момента k невозможно определить, поэтому управление, которое вычисляется с учетом будущего, не может быть физически осуществлено.

Переходим к вычислению оптимального управления. Для этого рассмотрим чуть более общую задачу. Будем допускать, что в начальный момент уже было некоторое количество x товаров. Обозначим $f_n(x)$ ожидаемую стоимость товаров за n этапов при начальном количестве x, если используется оптимальная /г-этапная стратегия. Таким образом, 1[ü] = /дг(0). Используя принцип оптимальности, для функций $f_n(x)$ можно получить следующие соотношения:

$$f_1(x) = \min_{y \ge x} \left[h(y-x) + H \int_y^\infty (s-y)p(s)ds \right],$$

$$f_{n+1}(x) = \min_{y \ge x} \left[h(y-x) + H \int_y^\infty (s-y)p(s)ds + f_n(0) \int_y^\infty p(s)ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^y f_n(y-s)p(s)ds \right].$$

Поясним эти равенства. Предположим, что заказ в момент 0 есть $u_0 = y - x$. Его стоимость $h(y - x)$. Если спрос ξ_1 превзойдет y, то мы должны еще приобрести единиц товара $\xi_1 - y$ единиц товара по штрафной стоимости; на это в среднем мы тратим:

$$H \int_y^\infty (s-y)p(s)ds.$$

Итак, мы получили для $f_n(x)$ функциональные уравнения. Прежде чем приступать к их исследованию, сделаем простое замечание относительно соотношений вида:

$$u(x) = \min_{y;y\geq x} G(x, y).$$

Если минимум достигается во внутренней точке полупрямой $y \geq x$ и $G(x, y)$ — гладкая функция, то при минимизирующем значении y частная производная $G_y(x, y) = 0$. Это последнее равенство определяет функцию $y^* = y^*(x)$, которая доставляет $\min G(x, y)$ по второму аргументу на множестве $y \geq x$. При этом $u(x) = G(x, y^*)$ и

$$u'(x) = G'_x + G'_y \frac{dy^*}{dx} = G'_x(x, y^*),$$

так как $G(x, y^*) = 0$. Итак, функция $y^* = y^*(x)$, доставляющая минимум $G(x, y)$, удовлетворяет уравнению $G'_y(x, y^*) = 0$, а $u'(x) = G'_x(x, y^*)$.

Применим это замечание к нашей задаче. Покажем, что существующая убывающая последовательность a_0, a_1, ..., a_{N-1} такая, что оптимальная стратегия на k-м этапе $\widehat{u}_k$ устроена так: если количество товаров x, оставшееся после удовлетворения $(k - 1)$-го требования, больше a_k, то ничего заказывать не надо ($\widehat{u}_k = 0$), если же $a_k - x > 0$, то нужно сделать заказ $\widehat{u}_k = a_k - x$.

Начнем рассмотрение с последнего этапа. Если после удовлетворения $(N - 1)$-го требования остается x единиц товара, то при оптимальном заказе $\widehat{u}_{N-1}$ наши средние затраты на последнем этапе составят $f_1(x)$. Применяя к этому равенству приведенное выше замечание, получим, что минимум достигается или при $y = x$, или же при некотором y, для которого частная производная по y от выражения, стоящего в квадратных скобках, обращается в нуль. Таким образом, для минимизирующего значения y получим уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[h(y-x) + H\int_y^\infty (s-y)p(s)ds \right] = h - H\int_y^\infty p(s)ds = 0.$$

Легко проверить, что это уравнение имеет единственное решение. Обозначим его $y = a_{N-1}$. Это число и есть то критическое количество товаров, которое нужно иметь перед последним этапом, чтобы минимизировать затраты на последнем этапе. Поэтому

$$\widehat{u}_{N-1} = (a_{N-1} - x)^+,$$

где x — количество товаров, оставшееся после удовлетворения предпоследней заявки. Используя наше замечание, можно выписать выражение для $f_1(x)$.

Для определения a_{N-2} нужно рассмотреть последние два этапа. Оптимальные средние затраты на последних двух этапах $f_1(x)$. Минимум в этом соотношении достигается или при $y = x$, или при $y = a_{N-2}$, где a_{N-2} — корень уравнения

$$h - H\int_y^\infty p(s)ds - \int_0^y f_1'(y-s)p(s)ds = 0.$$

Можно показать, что это уравнение также имеет единственное решение $y = a_{N-2}$; при этом $a_{N-2} > a_{N-1}$. Остальные числа a_{N-k} определяются последовательно из уравнений:

$$h - H\int_y^\infty p(s)ds - \int_0^y f_{N-k+1}'(y-s)p(s)ds = 0.$$

С увеличением k эти числа возрастают.

Таким образом, оказалось, что в нашей задаче существует простая оптимальная стратегия предварительных заказов. На основе интуитивных соображений довольно просто прийти к выводу, что оптимальное управление должно иметь ту структуру, которую мы получили путем вычислений — существует свой на каждом этапе критический уровень запасов, и политика заказов должна сводиться к поддержанию этого уровня. Критический уровень тем ниже, чем ближе к заключительному этапу. Однако величины оптимальных запасов a_k, конечно, нельзя найти без вычислений.

17.2.6. ВЫБОР МОМЕНТА ЗАКУПКИ ЗАГОТОВКИ

Рассмотрим процесс принятия решения о реализации хозяйственных мероприятий при условии, что они теряются, если не принимаются к реализации. Проиллюстрируем пример принятия решения о закупке партии заготовки на открытом рынке в условиях колебания цен. Предпочтительным является приобретение заготовки по минимальной цене.

Предположим, что для приобретения заготовки имеется T дней. Цена заготовки в каждый интервал времени x характеризуется плотностью распределения вероятностей $f(x)$. Если заготовка не приобретена до дня $(T - 1)$, то ожидаемая цена при условии выбора лучшей стратегии в $(T - 1)$-й и T-й дни будет равна:

$$Ц_{T-1} = \int \min(x, Ц_T) f(x)dx = \int_s^{Ц_T} xf(x)dx + \int_{Ц_T}^\infty Ц_T f(x)dx.$$

Из этого соотношения следует, что если до $(T - 1)$-го дня не приобретена заготовка, то следует приобрести заготовку, если цена, назначенная на этот день, меньше $Ц_T$. На день $T - 2$ приемлемая цена равна $Ц_{T-1}$. Например, для случая равномерного закона плотности распределения вероятностей $f(x)$ в интервале 100-200 руб./т и будем иметь $Ц_r$ = 150, $Ц_{r-1}$ = 137,5, $Ц_{r-2}$ т 130,4 руб./т и т. д.

Таким образом, стратегия принятия решения о приобретении заготовки на свободном рынке основывается на уменьшении допустимого уровня цены с увеличением срока до окончания планового периода.

Задание 1. Закупочный агент компании, продающей промышленные вентили, установил, что годовой спрос на вентили стоимостью 90 руб./шт. равен 4000 ед. Затраты хранения оцениваются в 10% от стоимости каждого вентиля. Средняя стоимость заказа составляет 25 руб. Потребуется около 8 дней, чтобы заказ прибыл от поставщика. В году есть 200 рабочих дней.

Определить размер экономичного заказа, точку перезаказа, число заказов за год, число дней между заказами, общие затраты.

Ответ: Q' = 149 штук; ROP =160 штук; N = 27 заказов; T = 7,4 дня; С = 361 345,5 руб.

Задание 2. Предприятие использует 1500 сборочных единиц в год. Хранение одной сборочной единицы в течение года 45 руб./шт. Затраты на один заказ обходятся в 150 руб. Предприятие обеспечивает 300 рабочих дней в году и считает, что поставщик затрачивает 6 рабочих дней на доставку заказа.

Определить размер экономичного заказа, годовые затраты хранения, годовые затраты заказа, точку перезаказа.

Ответ: Q^* = 100 шт. C = 2250 руб. С = 2250 руб. ROP = = 30 шт.

Задание 3. Владелец малого предприятия, производящего ножи, определил годовой спрос 8000 штук, производство которых организовано партиями. В среднем предприятие может произвести 150 ножей в день. В течение производственного процесса спрос на ножи составил 40 ножей в день. Затраты на переналадку оборудования составляют 100 руб. и затраты хранения одного ножа в течение года равны 0,8 руб./шт.

Сколько ножей нужно производить в каждой партии?

Ответ: Q^* = 1651 шт.

Задание 4. Годовой спрос на запчасти равен 3000 шт. Затраты на 1 заказ — 25 руб и затраты хранения 4 руб./шт. в год. Затраты на резервирование оцениваются 75 руб./шт.

Сколько запчастей нужно заказывать одновременно? Сколько из них будут в резерве?

Ответ: Q^* = 199 шт.; $Q_{рез}$ = 10 шт.

17.3. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ОБОРУДОВАНИЕМ

17.3.1. ЗАДАЧА ОБНАРУЖЕНИЯ РАЗЛАДКИ ОБОРУДОВАНИЯ

Предположим, что автоматическая линия выпускает одну деталь в единицу времени, и эта деталь характеризуется каким-то одним параметром, скажем, диаметром цилиндрической части. Если линия хорошо отлажена, то этот диаметр в среднем равен некоторой постоянной величине, но за счет случайных ошибок возможны небольшие отклонения от среднего, так что диаметр детали естественно считать случайной величиной, имеющей некоторую плотность $p_0(x)$. Для разных деталей эти величины независимы.

В случайный момент времени 0 происходит разладка автоматической линии. Это может, например, вызвать систематическое отклонение размеров деталей от стандарта или же при сохранившемся среднем вызвать увеличение разброса. Мы будем считать, что разладка приводит к тому, что диаметры деталей, выпущенных в момент 9 и позже, уже имеют распределение, отличное от $p_0(x)$. Пусть $p_1(x)$ — плотность нового распределения. Таким образом, диаметр n-й детали имеет плотность $p_0(x)$ $n < 0$ и $p_1(x)$, если $n > 0$.

Наша задача состоит в том, чтобы наблюдениями за размером деталей как можно скорее обнаружить разладку. Если мы объявляем, что произошла разладка, то автоматическую линию останавливают и производят переналадку.

Отклонения размеров деталей от стандарта могут объясняться не разладкой линии, а случайными ошибками, поэтому объявление о разладке может быть ложной тревогой; разладки к этому времени на самом деле может и не быть. С другой стороны, если мы будем слишком осторожны, то пропустим момент разладки, и линия будет долго работать в разлаженном режиме. Мы сможем выбрать «золотую середину», если будем иметь возможность оценить относительную стоимость переналадки линии и ущерба за единицу времени работы разлаженной линии.

Уточним постановку задачи. Это уточнение можно производить по-разному. Приведем так называемую байесовскую постановку. Предположим, что случайный момент 0 с некоторой вероятностью л равен нулю, т. е. с вероятностью κ мы с самого начала наблюдаем за разлаженной линией. Если бы в начальный момент разладки не было, то $P\{0 = п/0 > 0\} = p(1 - p)^{n-1}$, где $p > 0$. Такое распределение, называемое геометрическим, является дискретным аналогом показательного распределения. Оно возникает, по существу, при тех же качественных условиях, которые в непрерывном случае приводят к показательному закону.

Объясним, какие управления в нашей задаче являются допустимыми. Марковским моментом, или правилом остановки, является неотрицательная целочисленная случайная величина τ, которая не зависит от будущего. Это значит, что при произвольном целом t мы можем ответить на вопрос $\tau = t$ или нет по ходу процесса до момента t включительно, т. е. по значениям, принятым величинами ξ_1, ξ_2, ..., ξ_t. Типичным примером марковского момента служит случайная величина, равная номеру первого члена последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, который превосходит некоторый фиксированный уровень d: $\tau = \min[n{:}\xi_n > d]$. Допустимые управления в нашей задаче — это как раз и есть марковские моменты. Такое определение допустимого управления соответствует естественному требованию, что решение об объявлении разладки в момент t мы должны принять только по результатам измерений деталей, выпущенных в моменты 1, 2, ..., t.

Теперь поясним, как устроена плата при той или иной допустимой стратегии. Предположим, что стоимость переналадки оценивается в одну денежную единицу, а денежное выражение ущерба от работы разлаженной линии в течение единицы времени равно c. Если мы выбрали стратегию $\tau = \tau(\omega)$, то с вероятностью $P\{\tau < \theta\}$ будет объявлена ложная тревога, и тогда наши потери равны стоимости переналадки, т. е. 1. Потери от работы разложенной линии равны 0, если $\tau \le \theta$, и $c \cdot (\tau - \theta)$. Поэтому средние потери от работы разлаженной линии равны $c \cdot M\max(0, \tau - \theta)$. Таким образом, общие средние потери при стратегии τ составят

$$\rho(\pi, \tau) = 1 \cdot P\{\tau < \theta\} + c \cdot M \max(0, \tau - \theta).$$

Стратегия τ^* называется π оптимальной, если она доставляет минимум $\rho(\pi, \tau)$ по всем допустимым стратегиям τ. Этот минимум обозначим $\rho(\pi)$: $\rho(\pi) = \rho(\pi, \tau^*)$.

Здесь π — вероятность того, что линия разлажена в момент 0. Обозначим π_n условную вероятность того, что линия разлажена в момент n при условии, что значения ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n известны: $\pi_n = p\{\theta \le \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Вероятность π_n называется апостериорной вероятностью разладки в момент n от априорной вероятности $P\{\theta \le n\}$. Апостериорная вероятность π_n разладки в момент n есть функция от случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и от числа π, поэтому π_n сама является случайной величиной $\pi_n = \pi_n(\pi, \omega)$.

Покажем, что последовательность $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n, \ldots$ — марковская. Из формулы Байеса получим:

$$\pi_{n+1} = \frac{\pi_n p_1(\xi_{n+1}) + (1 - \pi_n) p \cdot p_1(\xi_{n+1})}{\pi_n p_1(\xi_{n+1}) + (1 - \pi_n) p \cdot p_1(\xi_{n+1}) + (1 - \pi_n)(1 - p) p_0(\xi_{n+1})}.$$

Отсюда следует, что для вычисления π_{n+1}, кроме π_n, нужно знать еще только ξ_{n+1}, так как ξ_{n+1} не зависят от $\xi_1, \ldots, \xi_n$, а стало быть, и от $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1}$, которые вычисляются по величинам ξ_k при $k < n$. Следовательно, π_0, $\pi_1, \ldots, \pi_n, \ldots$ — марковский процесс. Используя то, что τ — марковский момент, нетрудно подсчитать, что

$$\rho(\pi, \tau) = M\left[(1 - \pi_\tau) + c\sum_{k=1}^{\tau-1} \pi_k\right.$$

Интуитивно ясно, и это можно строго доказать, что для того, чтобы судить о том, произошла разладка в момент n или нет, нужно знать $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$. Значения ξ_k при $k \le n$ не несут ничего нового.

Таким образом, наша задача свелась к следующей. Есть марковская цепь $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n, \ldots$ и функция

$$(1 - \pi_\tau) + -\sum_{k=1}^{\tau-1} \pi_k$$

от траектории этой цепи момента τ. Нужно выбрать правильно остановки τ так, чтобы математическое ожидание указанной функции было бы минимальным.

Пример 1. Пусть некоторый станок может находиться в одном из двух состояний — рабочем (состояние 1) или нерабочем (состояние 2). Если в настоящее время станок работает, то он может сломаться за малое время Δ с вероятностью, скажем, $5\Delta + o(\Delta)$. Если же станок не работает, то с вероятностью $4\Delta + o(\Delta)$ он будет за время Δ отремонтирован.

Таким образом, мы получаем процесс с двумя состояниями. Матрица A в этом случае имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Из условий задачи можно вывести, что время τ между двумя поломками имеет показательное распределение: $P\{\tau > t\} = e^{-5t}$. Показательное распределение имеет и случайная величина β — время пребывания во втором состоянии, т. е. время, необходимое для ремонта: $P = \{\beta > t\} = e^{-4t}$. При этом среднее время между поломками

$$M\tau = \frac{1}{5}, \text{ а } M\beta = \frac{1}{4}.$$

Так что практически интенсивности могут назначаться на основе оценки средних значений случайных величин τ и β.

Предположим, что в начальный момент станок работал. Это значит, что к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)A$$

нужно приписать начальное условие $\pi_0 = (1, 0)$. Решая это уравнение, получим

$$\pi_1(t) = \frac{4}{9} + e^{-9t}\frac{5}{9}; \quad \pi_2(t) = \frac{5}{9} - e^{-9t}\frac{5}{9}.$$

Если при $t = 0$ станок не работал, то распределение $\overline{\pi}(t)$ в момент t будет иметь вид:

$$\overline{\pi}_1(t) = \frac{4}{9} - \frac{4}{9}e^{-9t}; \quad \overline{\pi}_2(t) = \frac{5}{9} + \frac{4}{9}e^{-9t}.$$

Из этих формул мы видим, что с ростом t распределения $\pi(t)$ и $\overline{\pi}(t)$ экспоненциально быстро приближаются к распределению

$$\pi = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right).$$

Это и есть не зависящее от начального состояния предельное распределение нашего процесса.

17.3.2. ЗАДАЧА О ЗАМЕНЕ ОБОРУДОВАНИЯ

Рассмотрим процедуру управления средствами, которые будут вложены в обновление оборудования (замену агрегата). Возраст агрегата и его годовой доход связаны соотношением (табл. 126):

Таблица 126

Возраст, t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Доход, $d(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Если имеется агрегат возраста t лет и осталось отработать $(n+1)$ год, то суммарный доход при сохранении машины равен доходу в очередной год $d(t)$ и суммарному доходу от машины возраста $(t + 1)$ при оставшихся n годах; при замене машины равен доходу в очередной год от использования новой машины и суммарному доходу от машины возраста в 1 год при оставшихся n годах.

Математически это можно записать в виде:

$$f_{n+1}(t) = \max\begin{cases} d(t) + f_n(t+1) \\ d(0) + f_n(1) - Ц \end{cases}.$$

Здесь Ц — цена агрегата, $f_n(t)$ — суммарный доход от использования агрегата с возрастом t при оставшемся периоде в n лет.

Используя рекуррентное соотношение, можно построить последовательность $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$. Примем Ц = 10 и $n = 10$, тогда $f_i(t)$ имеет вид (табл. 127):

Таблица 127

Доход,	Возраст										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
№	19	11	15	13	11	9					
№	27	24	21	18	17	17	17	17			
№)	34	30	26	24	24	24	24	24	24	24	24
hit)	40	35	32	31	30	30	...30—	30	30	30	
ш	45	41	39	37	36	35	' 35	35	Щ	35 '	35
№	51	48	45	43	41	• 4T	ш .	[тг			Ш
W)	58	54	51	48	48	48	18 '	48	48	48	48
№	64	60	56	55	54	54		54	54	54	54
Ш	70	65	63	61	60	60	60	60	00	60	60 '
	Пс ле сохранения						Поле замены				

Например:

$$f_2(6) = \max\begin{cases} d(6) + f_1(7) = 4 + 3 = 7, \\ d(0) + f_1(1) - Ц = 10 + 9 - 1 = 9. \end{cases}$$

Имея построенную таблицу, можно выделить стратегию вложения средств на замену агрегата. Например, если имеется агрегат возраста 7 лет и осталось работать 10 лет, то: $f_{10}(7)$ → замена → $f_9(1)$ → сохранение → $f_8(2)$ → сохранение → $f_7(3)$ → сохранение → $f_6(4)$ → сохранение → $f_5(5)$ → → замена → $f_4(1)$ → сохранение → $f_3(2)$ → сохранение → → $f_2(3)$ → сохранение → $f_1(4)$.

Агрегат следует заменить сразу, а потом через пять лет.

17.4. ОПТИМИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОСТИ ПЕРСОНАЛА

Требуется определить оптимальное число работников в каждый из n месяцев. Пусть известно, что идеальное число работников в j-м месяце m_j. Однако существуют еще затраты по найму и увольнению, которые выражаются функцией $f_j(x_j - x_{j-1})$. В зависимости от знака разности $x_j - x_{j-1}$ эта функция определяет затраты по найму или увольнению при переходе от $(j-1)$-го месяца к j-му. Отклонение числа работников от идеального приводит к затратам $g_j(x_j - m_j)$. Если $x_j > m_j$, то $g_j(x_j - m_j)$ является затратами на содержание неработающих работников, в противном случае — на сверхурочные работы.

Оптимальное значение x_j — это неотрицательные целые числа, минимизирующие выражение:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \left(f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(x_j - m_j) \right),$$

где $*_0$ = *то-*

17.5. МОДЕЛИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ ПРОИЗВОДСТВА

17.5.1. ЗАДАЧА О РАСКРОЕ

Проблема оптимального раскроя возникает во многих производствах. В машиностроении, деревообработке, швейном производстве возникает необходимость раскроя материала. Простейшие задачи раскроя связаны с порезкой линейного материала (прутки), более сложная математическая задача имеет место при раскрое листового и объемного материала.

Из материала определенного размера необходимо выкроить m видов деталей i-го вида в количестве b_i штук. Эти детали могут выкраиваться n способами. При j-м варианте раскроя единицы материала выкраивается a_{ij} деталей i-го вида, а стоимость отходов при данном способе раскроя равна c_j.

Задача состоит в том, чтобы путем наиболее рационального раскроя имеющихся материалов свести эти отходы к минимуму.

Обозначим через x_j — количество единиц материала, раскраиваемых j-м способом. Экономико-математическая модель задачи:

$$\min L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad (i=1, \ldots, m); \\ x_j \ge 0 \quad (j=1, \ldots, n). \end{cases}$$

Пример 1. Раскрой одномерного материала. Фирма получает от поставщиков прутки стального проката длиной 600 см. Согласно заявкам потребителей, требуются заготовки трех видов в количестве: 150 тыс. шт. длиной 250 см, 140 тыс. шт. длиной 190 см, 48 тыс. шт. длиной 100 см.

Таблица 128

Вариант	Количество заготовок, шт., длиной			Отходы, см
	250 см	190 см	100 см	
1	2	–	1	—
2	1	1	1	60
3	–	3	–	30
4	–	2	2	20
5	–	1	4	10
6	–	–	6	

Таблица 129

Вариант	Количество заготовок, шт.			Отходы, м
	А	Б	В	
1	1	0	7	0
2	0	4	3	0
3	0	3	5	0,5
4	0	0	15	0

Возможные варианты раскроя представлены в табл. 128.

Необходимо так разрезать прутки, чтобы обеспечить минимум отходов.

Решение. Это задача целочисленного программирования. Обозначим через x_j — количество прутков, раскраиваемых по j-му варианту. Экономико-математическая модель задачи:

$$\min L = 60x_2 + 30x_3 + 20x_4 + 10x_5,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 = 150\,000, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 1x_5 = 140\,000, \\ x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_5 + 6x_6 = 48\,000, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0. \end{cases}$$

Пример 2. Раскрой листового материала. Фирма получила от поставщиков 100 листов фанеры размером 2,5 × 1,5 м, которую нужно раскроить на прямоугольные заготовки А, Б, В размерами: А — 2 × 1 м, Б — 1 × 0,75 м, В — 0,5 × 0,5 м, в ассортименте 1:4:12 (табл. 129).

Возможные варианты раскроя представлены на рис. 58.

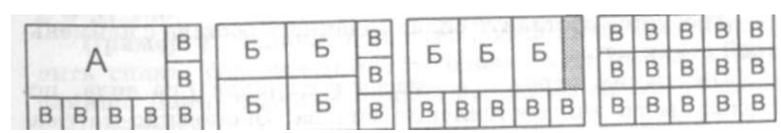


Рис. 58

Необходимо разработать оптимальный план раскроя фанеры.

Решение. Это задача целочисленного программирования. Обозначим через x_j — количество листов, раскраиваемых по j-му варианту. Соотношение заготовок в ассортименте 1:4:12, следовательно, должно выполняться равенство:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{4x_2 + 3x_3}{4} = \frac{7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 15x_4}{12}.$$

Экономико-математическая модель задачи:

$$\min L = 0{,}5x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100, \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 15x_4 = 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Оптимальное решение задачи: $X = (47,\ 37,\ 0,\ 6)$, т. е. для сокращения отходов нужно раскроить первым способом 47 листов, вторым — 37, четвертым — 6.

Задание 5. Прутки длиной 700 см необходимо разрезать на заготовки длиной 200 см, 180 см, 100 см в количествах 80, 50 и 300 шт. Требуется построить таблицу вариантов раскроя и разработать оптимальный план раскроя.

Задание 6. Из листов фанеры размером 2000 × 1200 мм необходимо выкроить заготовки размером 800 × 1200, 400 × 800 и 600 × 200 мм в количестве 1200, 2100 и 2500 шт.

17.5.2. ЗАДАЧА О СМЕСЯХ

К группе задач составления смесей относятся задачи составления рациона, состава шихты при выплавке стали, состава цементной смеси.

Пусть проектируется состав сплава из n различных видов материалов, каждый из которых содержит m видов элементов. Известны количество i-го элемента в у-м виде материала *a$* цены на материал каждого вида *Cj(j* = 1, *n); i* = 1, *m); b*, *Bi* — наименьшее и наибольшее допустимые количества i-го элемента в сплаве; *M*, — имеющееся в наличии количество материала у'-го вида.

Требуется составить сплав заданного состава с наименьшей стоимостью.

Обозначим через * — массу материала у'-го вида, используемого для составления сплава. Экономико-математическая модель задачи:

$$\min L = \sum_{j=1} c_j x_j;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i & (i=1, \ldots, m); \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le B_i & (i=1, \ldots, m); \\ 0 \le x_j \le M_j & (j=1, \ldots, n). \end{cases}$$

Пример 3. В бензине А-76 октановое число должно быть не ниже 76, а содержание серы не более 0,3%. Данные об используемых компонентах приведены в таблице ***16U.***

Таблица 130

Показатель	Компоненты бензина			
	1	2	3	4
Октановое число	68	72	80	90
Содержание серы, %	0,35	0,35	0,3	0,2
Ресурсы, т	700	600	500	300
Себестоимость	40	45	60	90

Требуется определить, сколько тонн каждого компонента нужно взять для получения 1000 т бензина А-76, чтобы при этом его себестоимость была минимальной.

Решение. Это задача линейного программирования. Обозначим x_j — количество j-го компонента. Экономико-математическая модель задачи:

$$\min L = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4,$$

$$\begin{cases} 68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \ge 76 \cdot 1000, \\ 0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 \le 0{,}3 \cdot 1000, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000, \\ x_1 \le 700; x_2 \le 600; x_3 \le 500; x_4 \le 300, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Оптимальное решение задачи: $X = (571;\ 0;\ 143;\ 286)$, значение целевой функции при оптимальном решении $L = 57\,160$.

Пример 4. Задача о шихте. Пусть требуется изготовить сплав, содержащий 15% олова, 55% цинка и 30% свинца. Данные об имеющихся исходных сплавах заданы в таблице 131.

Таблица 131

Показатель	Исходные сплавы				
	1	2	3	4	5
Содержание свинца, %	40	30	25	15	35
Содержание цинка, %	40	60	45	65	60
Содержание олова, %	20	10	30	20	5
Себестоимость	5	4	7	5	3

Требуется определить, в каких количествах нужно использовать исходные сплавы для получения 1 т требуемого сплава, чтобы суммарные затраты были минимальны.

Решение. Обозначим x_j — количество j-го исходного сплава. Экономико-математическая модель задачи:

$$\min L = 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5,$$

$$\begin{cases} 40x_1 + 30x_2 + 25x_3 + 15x_4 + 35x_5 = 30, \\ 40x_1 + 60x_2 + 45x_3 + 65x_4 + 60x_5 = 55, \\ 20x_1 + 10x_2 + 30x_3 + 20x_4 + 5x_5 = 15, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

17.5.3. ЗАДАЧА О РАНЦЕ

Задача о ранце — задача о загрузке ограниченного объема — возникает при загрузке самолета, грузового автомобиля, термической печи, контейнера.

Пусть имеется некоторый объем V, который необходимо заполнить различными предметами. Предметов имеется несколько видов, отличающихся объемом v_i и ценностью c_i.

Требуется определить вариант заполнения предметами объема V, чтобы их суммарная ценность оказалась наибольшей. Неизвестные переменные задачи — это x_i — число предметов i-го вида, выбранных для размещения в ранце.

Экономико-математическая модель задачи:

$$\max L = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \le V, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

Пример 2. В автомобиль грузоподъемностью 3000 кг требуется загрузить четыре вида предметов массой 2, 5, 7, 10 кг и стоимостью 12, 15, 14, 20 руб./шт. так, чтобы их суммарная стоимость была максимальной. При этом нужно загрузить не менее 100 шт. предметов первого вида, 50 шт. — второго вида, 40 шт. — третьего вида, 20 шт. — четвертого вида.

Решение. Обозначим x_i — число предметов i-го вида, загружаемое в автомобиль.

Экономико-математическая модель:

$$\max L = 12x_1 + 15x_2 + 14x_3 + 20x_4,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 10x_4 \le 3000, \\ x_1 \ge 100, \\ x_2 \ge 50, \\ x_3 \ge 40, \\ x_4 \ge 20. \end{cases}$$

С помощью QSB получили оптимальное решение: $X = (1135, 50, 40, 20)$, $\max L = 15\,330$ руб.

ГЛАВА 18

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Великие личности всегда подвергаются ожесточенным нападкам со стороны посредственных умов.

А. Эйнштейн

ЗА 25 i;укликов ЗАПЛАТИЛИ СТОЛЬКО руклей, сколько кувликов можно купить ЗА рувль. Сколько стоит один кувлик?

СТАРИННАЯ ЗАДАЧА

МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗОН (ОБЪЕКТОВ) И СРЕДСТВ ЗАЩИТЫ ПРЕДПРИЯТИЯ ОТ УГРОЗ

Современная концепция безопасности предприятия основное внимание уделяет, прежде всего, исследованию возможностей по профилактике, предотвращению и локализации угроз криминальных структур его экономической безопасности в виде хищений и повреждений имущества, запасов, конфиденциальной коммерческой документации с целью обогащения, наживы или получения конкурентных преимуществ.

Защита от угроз и угрозы есть явления, в которых участвуют две противоположные стороны со своими экономическими интересами, целями и путями их достижения. В качестве одного из игроков (игрока И) определим предприятие как коллектив, имеющий некоторые общие интересы (цели). В качестве другого игрока (игрока I) — криминальную структуру, имеющую свои интересы (цели). Если интерес одной стороны состоит в защите от угроз, в создании условий для эффективной производственной и хозяйственной деятельности, то интерес другой — прямо противоположен — хищения и дезорганизация (дестабилизация) работы предприятия.

Конфликт между этими двумя сторонами является антагонистическим и может моделироваться антагонистической игрой, исход (результат) которой оценивается вещественным числом. Значение исхода одна из сторон стремится максимизировать (игрок I), а другая (игрок II) — минимизировать. Отсюда выигрыш (в самом широком смысле) одной из сторон в таком конфликте составляет проигрыш противоположной стороны.

Реализацию общей игровой ситуации рассмотрим на примере гипотетического предприятия. На этом предприятии имеются три склада готовой продукции, которые находятся на разных его территориях. Предприятие не имеет возможности приобретения средств защиты этих складов от посягательств криминальных структур. Поэтому оно прибегает к услугам специализированной охранной организации. Пусть рассчитаны прогнозируемые затраты (с,) на содержание специализированной службы (подразделения), оснащенной техническими средствами, и известны из предыдущих опытов объемы ущербов, причиняемых хищениями (табл. 132).

Таблица 132

Виды (объекты) угроз	Прогнозируемые затраты и ущерб предприятия, млн руб.		
	от хищения со склада № 1	от хищения со склада № 2	от хищения со склада № 3
Хищение со склада № 1	**3**	**4 + 20 = 24**	**5 + 20 = 25**
Хищение со склада № 2	**3 + 15= 18**	**4**	**5 + 15 = 20**
Хищение со склада № 3	**3 + 10 = 13**	**4+ 10= 14**	**5**

Для игрока I (криминальная структура) антагонистическая игра имеет вид:

$$\begin{cases} 3x_1+18x_2+13x_3 \geq v; \\ 24x_1+4x_2+14x_3 \geq v; \\ 25x_1+20x_2+5x_3 \geq v; \\ x_1+x_2+x_3=1. \end{cases}$$

Для игрока II (предприятие):

$$\begin{cases} 3y_1+24y_2+25y_3 \leq v; \\ 18y_1+4y_2+20y_3 \leq v; \\ 13y_1+14y_2+5y_3 \leq v; \\ y_1+y_2+y_3=1. \end{cases}$$

Как пара двойственных задач линейного программирования, эта игра запишется:

для криминальной структуры:

$$f(z)=z_1+z_2+z_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3z_1+18z_2+13z_3 \geq 1, \\ 24z_1+4z_2+14z_3 \geq 1, \\ 25z_1+20z_2+5z_3 \geq 1, \\ z_1,z_2,z_3 \geq 0, \end{cases}$$

где $z_1+z_2+z_3=v$, $vz_i=x_i$ $(i=1,2,3)$;

для предприятия:

$$f(p) = p_1 + p_2 + p_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3p_1 + 24p_2 + 25p_3 \le 1, \\ 18p_1 + 4p_2 + 20p_3 \le 1, \\ 13p_1 + 14p_2 + 5p_3 \le 1, \\ p_1, p_2, p_3 \ge 0, \end{cases}$$

где $p_1 + p_2 + p_3 = v$, $vp_j = y_j$ $(j = 1, 2, 3)$.

Были получены результаты решения линейных задач:

$$Z^* = \left(\frac{1197}{1830}; \frac{19}{1830}; \frac{1015}{1830}\right);$$

$$P^* = \left(\frac{7}{166}; \frac{5}{166}; \frac{1}{166}\right),$$

а игровой задачи:

$$X^* = \left(\frac{1197}{4755}; \frac{513}{4755}; \frac{3045}{4755}\right);$$

$$Y^* = \left(\frac{7}{13}; \frac{5}{13}; \frac{1}{13}\right);$$

$$v = 166/13 \approx 12{,}8 \text{ млн руб.}$$

Смешанная стратегия предприятия Y^* задает вероятность, с которой оно выбирает чистую стратегию $j \in Y^*$. В данном примере предприятие с вероятностью 7:13 организует охрану склада № 1; с вероятностью 5:13 — склада № 2 и вероятностью 1:10 — склада № 3.

Для выбора конкретного защищаемого объекта (склада) из таблицы случайных чисел случайным образом выбирается число. Если оно окажется в пределах от 0 до 21, то выбрать следует склад № 1; если оно попадет в диапазон от 22 до 27, то — склад № 2; наконец, если это число окажется в диапазоне от 28 до 29, то выбору подлежит склад № 3. Если же число находится в пределах от 30 до 99, то оно отбрасывается и из таблицы выбирается следующее число (выше или ниже первого в соответствии с заранее принятым условием).

Реализация решения построенной игры с помощью «физической силы» стратегий состоит в том, что случайный выбор одной из трех чистых стратегий предприятия заменяется применением одной из них в отношении 7:5:1. Такая замена будет гарантировать при всех вариантах организации защиты получение убытков на сумму не больше 12,8 млн руб.

При оптимальной смешанной стратегии предприятия выполнение охранных мероприятий службой безопасности распределится в течение квартала так: охрана склада № 1 — 90 · 7/13 ~ 48 дней; охрана склада № 2 — 90 · 5/13 * 35 дней; охрана склада №3 — 90 · 1/13 * 7 дней. Соответственно, выделяемые предприятием денежные средства на охрану всех складов составят 3 · 7/13 + 4 · 5/13 + 5 · 1/13 я 3,54 млн руб., которые распределяются на охранные мероприятия по каждому из складов: склад № 1 — 3 · 7/13 « 1,62 млн руб.; склад № 2 — 4 · 5/13 ~ 1,54 млн руб.; склад № 3 — 5 · 1/13 » « 0,38 млн руб.

Отклонения от оптимальных стратегий, как предприятия, так и криминальных структур, приводят к убыткам той и другой стороны.

18.2. МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗОН (ОБЪЕКТОВ) ЗАЩИТЫ ПРЕДПРИЯТИЯ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОСТИ СРЕДСТВ

Пусть одно из исследуемых предприятий, на котором имеются n защитных зон (объектов) и которое может подвергнуться нападению криминальных структур, располагает ограниченным количеством средств, которые могут использоваться для защиты только одной зоны (объекта). Ценность (полезность) зоны (объекта) может быть выражена, например, в ее (его) остаточной стоимости, стоимости хранящейся на складах продукции, и составляет величину $b_i (i = \overline{1, n})$.

Тогда математическое ожидание ущерба, наносимого предприятию, при выборе различными сторонами зон (объектов) i и $j (i, j = \overline{1, n})$ можно рассчитать:

$$z_{ij} = \begin{cases} b_i(1 - p), \text{если } i = j \ (i, j = \overline{1, n}); \\ b_i, \text{ если } i \ne j \ (i, j = \overline{1, n}), \end{cases}$$

где p — вероятность неуничтожения (незащищенности) зоны (объекта), $p < 1$.

Очевидно, что криминальная структура (игрок I) будет стремиться максимизировать величину z_{ij}, а предприятие (игрок II) — минимизировать ее, т. е. интересы сторон прямо противоположны и их взаимодействие составляет содержание антагонистического конфликта. Рассматриваемый конфликт моделируется конечной антагонистической игрой, матрица выигрышей которой

$$H = \begin{pmatrix} (1-p)b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & (1-p)b_2 & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_n & \dots & (1-p)b_n \end{pmatrix}.$$

Для игрока II (предприятие) эта игра формулируется в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} (1-p)b_1y_1 + b_1y_2 + \ldots + b_1y_n \le v; \\ b_2y_1 + (1-p)y_2 + \ldots + b_2y_n \le v; \\ \ldots \\ b_ny_1 + b_ny_2 + \ldots + (1-p)b_ny_n \le v; \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1. \end{cases}$$

Эта антагонистическая игра как задача линейного программирования примет вид:

$$t_1 + t_2 + t_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} (1-p)b_1t_1 + b_1t_2 + \ldots + b_1t_n \le v; \\ b_2t_1 + (1-p)b_2t_2 + \ldots + b_2t_n \le v; \\ \ldots \\ b_nt_1 + b_nt_2 + \ldots + (1-p)b_nt_n \le v; \\ t_1, t_2, \ldots, t_n \ge 0. \end{cases}$$

Максимальная месячная стоимость продукции и материальных ресурсов, хранимых на складах, составляет: $b_1 = 150$, $b_2 = 120$, $b_3 = 100$ тыс. руб. (здесь b_1 — стоимость готовой продукции на первом складе, а b_2, b_3 — стоимость материальных ресурсов на втором и третьем складах). Предполагается, что вероятность незащищенности объектов — складов составляет $p = 50\% = 0{,}5$.

Тогда платежная матрица примет вид:

$$H = \begin{pmatrix} 75 & 150 & 150 \\ 120 & 60 & 120 \\ 100 & 100 & 50 \end{pmatrix},$$

Для игрока I (криминальная структура) антагонистическая игра описывается системой неравенств:

$$\begin{cases} 75x_1 + 120x_2 + 100x_3 \ge v, \\ 150x_1 + 60x_2 + 100x_3 \ge v, \\ 150x_1 + 120x_2 + 50x_3 \ge v, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Для игрока II (предприятие) игра имеет вид:

$$\begin{cases} 75y_1 + 150y_2 + 150y_3 \le v, \\ 120y_1 + 60y_2 + 120y_3 \le v, \\ 100y_1 + 100y_2 + 50y_3 \le v, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

Их решением будут оптимальные векторы и цена этих игр:

$X^* = (4/9;\ 5/9;\ 0)$; $Y^* = (2/3;\ 1/3;\ 0)$; $v = 100$ тыс. руб.

Таким образом, игрок II (предприятие) должен с вероятностью 2:3 защищать склад готовой продукции, с вероятностью 1:3 — второй объект (первый склад материальных ресурсов) и не защищать — третий объект (второй склад материальных ресурсов) вовсе. Игрок I должен с вероятностью 4:9 угрожать складу готовой продукции, с вероятностью 5:9 — второму объекту (первому складу материальных ресурсов) и не угрожать третьему объекту (второму складу материальных ресурсов).

На первый взгляд, оптимальная стратегия игрока I выглядит несколько странной, так как она не рекомендует криминальной структуре угрожать третьему объекту, который не защищается игроком И. Однако ничего удивительного здесь на самом деле нет, так как значение игры равно ценности незащищаемого объекта ($v = b_3 = 100$), и поэтому в результате применения своей оптимальной стратегии игрок I гарантирует себе математическое ожидание выигрыша, равное ценности третьего объекта. В сущности, этот склад как раз потому и не защищается, что нападающему невыгодно тратить на него усилия. В соответствии с решением игры предприятие выбирает для реализации первую стратегию. При этой стратегии вероятность необходимости защиты склада готовой продукции составляет 2:3, или 66,6%. Таким образом, из решения игр можно предложить конкретные рекомендации по организации защиты объектов данного предприятия: при плановом периоде, равном 30 дням, склад готовой продукции защищается 20 дней, а первый склад материальных ресурсов — 10 дней.

18.3 МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЪЕКТОВ ЗАЩИТЫ В УСЛОВИЯХ НЕЗАВИСИМОСТИ УЩЕРБОВ

Здесь будем рассматривать основные производственные подразделения промышленного предприятия: поточные и автоматические линии, гибкие производственные системы и другие производства, в которых их звенья (блоки) технологически взаимосвязаны. Выход из строя (отказ) одного из звеньев приводит к прекращению производственной деятельности всего объекта. Отказ одного из звеньев объекта возможен не только по техническим причинам, но и по причинам криминального характера. Например, в силу заинтересованности криминальных структур в ликвидации данного предприятия как наиболее опасного конкурента или хотя бы в утрате им конкурентных преимуществ.

Предполагается, что средства защиты j-го вида нейтрализуют j-ю стратегию криминальной структуры. Следовательно, ущерб звена объекта защиты будет $r_{jj} = 0$. В остальных случаях ущерб не зависит от того, выполнено ли мероприятие по защите отдельного звена объекта, или нет. Для j-й стратегии криминальной структуры положим величину ущерба, который она причиняет предприятию, равной l_j. Для удобства будем считать, что $l_1 > l_2 > \ldots > l_n$. Кроме того, положим $c_j = 0$. Такая ситуация характерна для моделей конфликтов, в которых затраты на защиту звена (блока) пренебрежимо малы по сравнению с возможным ущербом.

Тогда платежная матрица примет вид

$$H = \begin{pmatrix} 0 & l_1 & l_1 \ldots & l_1 \\ l_2 & 0 & l_2 \ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_n & l_n & l_n \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что игрок II (предприятие) будет стремиться минимизировать свой ущерб и, рассчитывая на худший случай, должен считать, что игрок I (криминальная структура) ему антагонистичен.

Для игрока II (предприятие) стратегии его поведения определятся реализацией антагонистической игры вида:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \to \max;$$

$$\begin{cases} 0p_1 + l_2 p_2 + \ldots + l_n p_n \le 1; \\ l_1 p_1 + 0p_2 + \ldots + l_n p_n \le 1; \\ \ldots \\ l_1 p_1 + l_2 p_2 + \ldots + 0p_n \le 1; \\ p_1, p_2, \ldots, p_n \ge 0, \end{cases}$$

где y;/u = pj (j = hn%

Пусть технологическая структура предприятия включает пять технологически взаимосвязанных агрегатов, выход из строя одного из которых вследствие возможного повреждения приводит к простою всей производственной системы. Для предотвращения возможных повреждений и простоев производственной системы необходимо, чтобы перед началом работы агрегаты были проверены на исправность. Расходы на предупреждение аварий существенно меньше, чем убытки, которые причиняют всей производственной системе простои агрегатов в отказах. Величина убытков зависит от степени загрузки и ремонтной сложности агрегата, который выводится из строя, и складываются в основном из затрат на их ремонт или замену. Эти затраты на устранение отказов могут быть существенно бо́льшими, чем на этапе профилактических осмотров. Кроме того, в величину убытков следует включить и потери от недовыпуска продукции предприятием вследствие простоя производственной системы в целом. Такими статистическими данными об убытках предприятия, как правило, не располагают и, по-видимому, их вообще невозможно получить. Поэтому показатель «убытки» от выхода из строя каждого агрегата заменим на экспертную оценку влияния выхода его из строя на убытки производственной системы в целом, т. е. на экспертную оценку «важности» объекта защиты по отношению к причиняемым убыткам. При определении такой оценки учитывались стоимость каждого агрегата и время (возможность) его замены. Разумеется, стоимость агрегата должна быть скорректирована с учетом фактора времени замены. Допустим, что такие экспертные оценки важности агрегатов получили значения: l_1=30/87; l_2=20/87; l_3=15/87; l_4=12/87; l_5=10/87 (эти оценки агрегатов расположены в порядке убывания), значение $c_i = 0$, сумма оценок равна единице.

Принимая производственную систему предприятия за игрока II, криминальную структуру за игрока I, получаем платежную матрицу игры:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 30/87 & 30/87 & 30/87 & 30/87 \\ 20/87 & 0 & 20/87 & 20/87 & 20/87 \\ 15/87 & 15/87 & 0 & 15/87 & 15/87 \\ 12/87 & 12/87 & 12/87 & 0 & 12/87 \\ 10/87 & 10/87 & 10/87 & 10/87 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для игрока II (предприятие) игра описывается соотношениями вида:

$$0y_1 + y_2 30/87 + y_3 30/87 + y_4 30/87 + y_5 30/87 \le v;$$
$$y_1 20/87 + 0y_2 + y_3 20/87 + y_4 20/87 + y_5 20/87 \le v;$$
$$y_1 15/87 + y_2 15/87 + 0y_3 + y_4 15/87 + y_5 15/87 \le v;$$
$$y_1 12/87 + y_2 12/87 + y_3 12/87 + 0y_4 + y_5 12/87 \le v;$$
$$y_1 10/87 + y_2 10/87 + y_3 10/87 + y_4 10/87 + 0y_5 \le v;$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1.$$

Оптимальное решение для игрока II соответствует вектору $Y^* = (5/9;\ 3/9;\ 1/9;\ 0;\ 0)$ и цене этой игры $v = 2/9$.

«Физическая» интерпретация может быть такой: 30 x x 5/9 = 16; 30 · 3/9 = 10 дней и 30 1/9 = 3 дня в течение месяца защищаются соответственно агрегаты 1, 2 и 3.

Денежные средства или материально-технические ресурсы, или то и другое, могут быть распределены пропорционально выделяемым ресурсам на защиту производственной системы.

18.4. МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАБОТ СЛУЖБЫ БЕЗОПАСНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Задачей службы безопасности предприятия является не только организация защиты (обороны) его зон (объектов) от криминальных акций, но и организация поиска возможных вариантов нападений.

Пусть на предприятии имеются n зон (объектов) возможного нападения криминальных структур с целью их ограбления. Предполагается, что в одной из зон (объектов) организована криминальная группа. Для ее выявления в организационной структуре предприятия предусмотрено специальное подразделение из L человек, оснащенных современными техническими средствами. Численность подразделения делима, максимально возможное число таких подгрупп равно L. Если в группу входит по / человек, то число таких подгрупп равно г = $L/1$. Для общности рассуждений будем считать, что число таких подгрупп соответствует г. Эти подгруппы службы безопасности могут быть распределены по зонам (объектам) защиты различным образом. Например, все г подгрупп могут действовать в первой зоне (объекте) или в первую зону (объект) можно послать (г - 1) подгруппу, во вторую зону (объект) — одну подгруппу, в остальные — ни одной и т. д.

Очевидно, что вероятность обнаружения криминальной структуры одной подгруппой в ;'-й зоне (объекте) зависит от многих условий, характеризующих эту зону (объект). Обозначим эту вероятность через Wj и будем считать, что обнаружение действия криминальной структуры каждой подгруппой службы безопасности являются независимыми событиями.

Обычно противоборствующие стороны располагают априорной информацией о значениях $Wj(j = 1,п)$, и поэтому каждая из них может определить вероятность обнаруже-

ния криминальной структуры в j-й зоне (объекте) по формуле:
$$h_j = 1 - (1 - w_j)^{q_j}; \quad (j = \overline{1,n}),$$
где q_j — число подгрупп службы безопасности, действующих в j-й зоне (объекте).

Игрок I (предприятие) распределяет подгруппы службы безопасности по зонам (объектам) с расчетом максимизировать вероятность обнаружения действий криминальной структуры. Игрок II (криминальная структура) выбирает зону (объект) нападения с расчетом минимизировать эту вероятность. Очевидно, что игроки преследуют прямо противоположные цели, и поэтому конфликт антагонистичен, т. е. выигрыш игрока I в точности равен проигрышу игрока II.

Таким образом, математической моделью распределения поисковых усилий подгрупп службы безопасности и выбора зоны (объекта) возможных действий криминальной структурой является конечная антагонистическая игра, которую можно задать матрицей выигрышей:
$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & & & \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix},$$
где m — число чистых стратегий предприятия (игрок I); n — число чистых стратегий криминальной структуры (игрок II); $h_{ij} = H(i, j)$ — выигрыш игрока I в ситуации (i, j).

Чистой стратегией игрока I является вектор $i = (q_1^i, q_2^i, \dots, q_n^i)$, компоненты которого $q_j^i \in [0, r]$ — целые неотрицательные числа, число подгрупп службы безопасности, направляемых в j-ю зону (объект) согласно i-й чистой стратегии:
$$\sum_{j=1}^{n} q_j^i = r;\ 1 \le i \le m.$$

Чистой стратегией игрока II является выбор зоны (объекта) нападения. Полезностью нападающей стороны (игрока I), очевидно, будет вероятность обнаружения криминальной структуры в j-й зоне (объекте), которая определяется по формуле:
$$h_j^i = 1 - (1 - w_j)^{q_j^i}.$$

Пусть на гипотетическом предприятии, в котором имеют место хищения продукции в массовом количестве внутрипроизводственной криминальной структурой, имеются три склада готовой продукции. Функционирует подразделение службы безопасности численностью в 6 человек, которое

Таблица 133

Стратегии игрока I	Стратегии игрока II (конкурентная структура)			Стратегии игрока I	Стратегии игрока II (конкурентная структура)		
	1	2	3		1	2	3
1 = (3, 0, 0)	0,875	0	0	6 = (0, 2, 1)	0	0,510	0,200
2 = (0, 3, 0)	0	0,657	0	7 = (1, 2, 0)	0,500	0,510	0
3 = (0, 0, 3)	0	0	0,488	8 = (1, 0, 2)	0,500	0	0,360
4 = (2, 1, 0)	0,750	0,300	0	9 = (0, 1, 2)	0	0,300	0,360
5 = (2, 0, 1)	0,750	0	0,200	10 = (1, 1, 1)	0,500	0,300	0,200

может быть разделено, например, на три группы — численностью по 2 человека. Вероятность обнаружения криминальной структуры одной группой службы безопасности задается экспертными оценками параметров $w_1 = 0{,}5$; $w_2 = 0{,}3$; $w_3 = 0{,}2$.

Рассматриваемую ситуацию распределения поисковых усилий можно систематизировать (табл. 133).

Оптимальные стратегии игроков определятся:

$X^* = (0;\ 0;\ 0{,}38;\ 0{,}32;\ 0;\ 0{,}30;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0)$;
$У^* = (0{,}15;\ 0{,}31;\ 0{,}54)$; цена игры $v = 0{,}265$.

Таким образом, с вероятностью 0,38 в третьей зоне осуществляют поиск три подразделения; с вероятностью 0,32 в первой зоне осуществляют поиск два подразделения и во второй зоне — одно подразделение и, наконец, с вероятностью 0,3 во второй зоне осуществляют поиск два подразделения и в третьей зоне — одно подразделение. В свою очередь, криминальная структура с вероятностью 0,15 выбирает для хищения первую зону, с вероятностью 0,31 — вторую зону и с вероятностью 0,54 — третью. В результате вероятность обнаружения криминальной структуры будет равна 0,265. Если считать период планирования равным 30 дням, то осуществляют поиск: $30 \cdot 0{,}38 = 12$ дней три подразделения в третьей зоне; $30 \cdot 0{,}32 = 9$ дней два подразделения в первой зоне и одно подразделение во второй зоне; $30 \cdot 0{,}3 = 9$ дней два подразделения во второй зоне и одно подразделение в третьей зоне.

Отклонение предприятия от приведенного оптимального распределения групп службы безопасности может уменьшить эту вероятность, а отклонение криминальной структуры от оптимального выбора склада для осуществления злоумышленных действий может привести к увеличению этой вероятности.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ МЕНЕДЖМЕНТА

Гений мыслит и создает. Человек обыкновенный приводит в исполнение. Дурак пользуется и не благодарит.

К. Прутков

ГЛАВА 19

МОДЕЛИ ТОПЛИВНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА

Нужно иметь храбрость поверить в свои убеждения, иначе самое интересное, что могло прийти вам в голову, заберут другие.

Н. Винер

Два человека хотят купить корову. Говорит первый второму: бели ты дашь л\не 2/3 твоих денег, то я смогу ЗАПЛАТИТЬ ее цену. А второй отвечдет первому: Ддй мне 3/4 твоих денег, ТОГДА и я здплдчу ее цену. Сколько у КАЖДОГО ИЗ НИХ денег, если коровд стоит 24 РУБЛЯ?

СТАрННИАЯ ЗАДАЧА

19.1. ОПТИМИЗАЦИЯ ТОПЛИВНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО БАЛАНСА ЭКОНОМИЧЕСКОГО РЕГИОНА

В настоящее время наиболее часто употребляемым при оптимизации топливно-энергетического баланса методом является линейное программирование.

В самой элементарной постановке данная задача формулируется следующим образом. Целевая функция — минимум суммарных затрат в добычу, магистральный транспорт, промышленный транспорт и энергоиспользование:

$$\min L = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \lambda_{ij},$$

где c_{ij} — удельные суммарные по стадиям производства и использования затраты при использовании единицы i-го энергоресурса у j-го потребителя; x_{ij} — объем годового поступления i-го энергоресурса к j-му потребителю; λ_{ij} — коэффициент полезного энергоиспользования (необходим для оптимизации топливно-энергетического баланса на уровне полезного объема, а не подведенного объема энергоиспользования).

Ограничения обусловлены: верхними пределами A_i добычи топлива каждого месторождения и верхними пределами производства других видов энергоресурсов; необходимостью обеспечения какими-либо энергоресурсами заданной производственной потребности в них B_j каждого потребителя региона; неотрицательностью неизвестных величин:

$$\begin{cases} \sum_j x_{ij} \le A_i, \\ \sum_j x_{ij} \lambda_{ij} = B_i, \\ x_{ij} \ge 0. \end{cases}$$

Расчет двойственных оценок энергоресурсов данной задачи позволяет выявить топливно-энергетические ресурсы, которые не полностью используются в оптимальном топливно-энергетическом балансе, т. е. так называемые «замыкающие» виды топлива (двойственная оценка «замыкающего» топлива равна нулю). Топливо является «замыкающим» в том смысле, что оно «замыкает» топливно-энергетический баланс региона: при увеличении потребности региона в топливно-энергетических ресурсах по сравнению с принятой при оптимизации топливно-энергетического баланса потребностью именно «замыкающее» топливо втягивается в качестве дополнительного в топливно-энергетический баланс региона; напротив, при уменьшении потребности региона в энергоресурсах именно «замыкающее» топливо в первую очередь «выталкивается» из топливно-энергетического баланса региона.

Двойственные оценки потребителей данной задачи, связанные со второй группой ограничений, позволяют определить изменение величины целевой функции по сравнению с рассчитанной при оптимальном топливно-энергетическом балансе, если потребность потребителя изменится на единицу энергоресурса в «полезном исчислении».

В более адекватных реальной ситуации моделях учитывается:

1) непостоянство удельных суммарных по стадиям производства и использования затрат; при достаточно сильной зависимости этих затрат от неизвестных величин необходим переход к методам нелинейного программирования;

2) значительно большее число реально существующих ограничений, например: учет обязательной потребности данного региона в некоторых конкретных видах топлива; возможность переработки некоторых видов топлива в данном регионе различными способами; учет возможности передачи некоторых видов топлива в другие регионы; учет наиболее характерных режимов электропотребления; возможность перетоков электроэнергетической мощности из одного региона в другой; учет общехозяйственных ограничений (например, по объему капитальных вложений, по расходу труб, по расходу металлов и т. д.). В качестве примера приведено одно из ограничений стадии добычи i-го вида топлива в более близкой к действительности постановке задачи:

$$\sum_f x_{if} + \sum_n \sum_k q_{ikn} x_{ikn} = A_i + \sum_r x_{ikr} + \sum_n \sum_l x_{ikl} + \sum_j b_{ij} x_{ij},$$

где x_{if} — годовой объем добычи i-го вида топлива на j-м месторождении; x_{ikn} — годовой объем поставки топлива от других k-х районов в данный экономический район n-м транспортом; x_{ikr} — годовой объем переработки топлива, поступающего из других районов по r-му способу; x_{iln} — годовой объем передачи топлива в другие l-е районы; x_{ij} — годовой объем взаимозаменяемой потребности в данном виде топлива j-м потребителем; q_{ikn} — коэффициент транспортных потерь топлива; A'_i — годовой объем обязательной потребности района в энергоресурсе; b_{ij} — удельный расход топлива. Таким образом, указанное ограничение является балансовым уравнением: приход i-го вида энергоресурса в данный экономический район равен его расходу;

3) неполная взаимозаменяемость некоторых энергоресурсов, например, энергетический уголь не может быть использован в технологических установках; если практически любое топливо может сжигаться на конденсационных электростанциях, то в плавильных печах может сжигаться только природный газ и мазут. Расход топлива, которое не может быть использовано в некоторой установке в модели заранее, приравнивается нулю;

4) неопределенность прогнозной информации по объемам энергопотребления и затратам;

5) связь данного экономического региона с другими регионами страны.

19.2. МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ТОПЛИВНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО БАЛАНСА ПРЕДПРИЯТИЯ

При построении такой модели может быть использована известная в линейном программировании задача на составление смесей. Неизвестные задачи x_{pq} — интенсивность (доля от единицы) использования производства на предприятии p-го продукта по q-му способу.

Под «способом» здесь понимается набор различных энергоресурсов в различном соотношении, который может использоваться при производстве данного продукта предприятия. Например, для продукта «сталь» ($p = 1$) реально использование набора (способ) энергоресурсов: доменный газ — 45%, коксовый газ — 45%, мазут — 10% ($q = 1$); для этого же продукта возможен другой «способ»: коксовый газ — 100% и т. д. В таблице 134 приведены примеры технологических способов для отдельных продуктов.

Целевая функция задачи:

$$\max L = \sum_p \sum_g \Pi_{pg} x_{pg},$$

где Π_{pg} — прибыль предприятия при производстве всего заданного годового объема p-го продукта только по g-му способу.

Ограничения определяют: верхние лимиты по каждому i-му виду электроресурсов A_i; лимиты по капитальным вложениям, необходимым для перехода на использование того или иного «способа» от существующего (до оптимизации) «способа»; равенство единицы интенсивностей для каждого производимого на предприятии продукта; неотрицательность неизвестных:

$$\begin{cases} \sum_p \sum_g A_{ipg} x_{pg} \le A_i, \\ \sum_p \sum_g K_{pg} x_{pg} \le K, \\ \sum_g x_{pg} = 1, \\ x_{pg} \ge 0, \end{cases}$$

Таблица 134

Продукт	Технологические способы							
	обозначения	Соотношения видов топлива, %						кислород, м³/т
		доменный газ	коксовый газ	природный газ	кокс	уголь	мазут	
P= 1	Xп	45	45				10	
	X12		100					
	X13	18	75				7	
	X14			100				
	X15	4	40	40			16	
	X16		40	60				
	Xn			70			30	
	Xlfi	18	75				7	30
	X19	20		50			30	
	Xno		100					30
p = 2	X21	9	5		86			
	X22	5		27	68			
	X23	6			47		47	
	X24	6		11	66	17		
	X25	7		32	61			137
P = 3	X31	90	10					
	X32	80	20					
	X33	60	40					
	X34	40	60					
	X35	90		10				
	X36	80		20				

где A_{ipg} — годовой расход i-го энергоресурса при производстве всего заданного годового объема р-го продукта только по £-му «способу»; K_{pg} — капитальные вложения, необходимые для производства всего заданного годового объема р-го продукта только по *g-му* «способу».

Определенным недостатком данной модели является предположение о прямо пропорциональном уменьшении показателей **U.,g,** A_{ipg}, K_{pg} при уменьшении значений неизвестных x_{pg} от 1 до 0. Однако этот недостаток может быть уменьшен путем проведения последовательных итеративных расчетов, при которых значения указанных выше показателей последовательно приближают к реальным в зависимости от найденных оптимальных значений неизвестных.

19 3 МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ УРОВНЯ ЭЛЕКТРИФИКАЦИИ

Оптимальный уровень электрификации представляет собой наилучшее с точки зрения некоторого критерия отношение объема используемой электроэнергии к объему потребления всех топливно-энергетических ресурсов. Оптимальный уровень электрификации может быть определен в результате оптимизации топливно-энергетического баланса страны, региона или предприятия путем расчета указанного выше соотношения. Однако, во-первых, в этих задачах заранее задаются верхние пределы возможного объема использования электроэнергии и других топливно-энергетических ресурсов и таким образом в определенной мере уровень электрификации получается заданным; во-вторых, в таких моделях обычно невозможно в значительной мере учесть фактор научно-технического прогресса, что для указанной задачи имеет первостепенное значение.

С учетом разнонаправленности и неоднозначности влияния электрификации на научно-технический прогресс в различных отраслях производства очевидно, данную задачу следует ставить как отраслевую. Последующие действия — объединение оптимальных уровней электропотребления по отраслям (или по видам технологий) и получение заданного для задачи оптимизации топливно-энергетического баланса значения верхнего предела использования электроэнергии. Таким образом, рассматриваемая задача является первичной по отношению к задаче оптимизации топливно-энергетического баланса.

Рассмотрим одну из моделей определения оптимального уровня электрификации на примере машиностроительного производства, точнее, части этого производства — термических процессов. Задача является, по сути, межотраслевой, поскольку эти процессы имеют место в самых разнообразных отраслях промышленности.

Целевая функция:

$$\max L = \sum_h \sum_m \Pi_{hm} V_{hm} x_{hm},$$

где Π_{hm} — удельная (на единицу продукции) прибыль предприятий, получаемая от использования электротермического h-го процесса по m-й технологии; V_{hm} — годовой объем производства соответствующей продукции; x_{hm} — доля электротермического h-го процесса m-й технологии.

Ограничения обусловлены необходимостью соблюдать: предельные объемы расхода материальных ресурсов М, в том числе предельные объемы электроэнергии; лимит капитальных вложений K; максимально возможный выпуск электротермического оборудования N; необходимость роста (или хотя бы не снижения) доли электротермических процессов:

$$\begin{cases} \sum_h \sum_m V_{hm} b_{hm}^{w} x_{hm} + \sum_h \sum_m V_{hm} b_{hm}^{T} (1 - x_{hm}) \le \text{M}, \\ \sum_h \sum_m V_{hm} k_{hm} \Delta x_{hm} \le K, \\ \sum_h \sum_m V_{hm} u_{hm} \Delta x_{hm} \le N, \\ x_{hm} \ge x_{hm}^{0}, \end{cases}$$

где, кроме ранее обозначенных величин, b_{hm}^{w}, b_{hm}^{T} — удельные расходы материальных ресурсов (в том числе электроэнергии) соответственно по электрическому и топливному вариантам технологий; Δx_{hm} — прирост доли электротермического h-го процесса m-й технологии; k_{hm}, u_{hm} — удельные (соответственно) капитальные затраты и количество электротермического оборудования; x_{0hm} — существующая доля электротермического h-го процесса m-й технологии.

19.4. МОРСКОЙ ПОРТ ДЛЯ РАЗГРУЗКИ СУДОВ КАК СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЖИДАНИЕМ И НЕОГРАНИЧЕННЫМ ПОТОКОМ ТРЕБОВАНИЙ

Эти системы отличаются следующими особенностями функционирования: система обслуживания состоит из ограниченного числа n аппаратов; каждый аппарат способен одновременно обслуживать только одно требование, каждое вновь поступающее требование, застав все аппараты уже занятыми, становится в очередь и находится в ней до тех пор, пока один из аппаратов не освободится. Если требование поступает в систему, когда есть свободный аппарат, оно сразу же принимается на обслуживание.

Функционирование системы рассматривается при условии поступления в нее пуассоновского потока требований. Источник потока требований не ограничен по своим возможностям (например, пассажиры в метро, покупатели в магазинах и др.), хотя плотность потока λ имеет конечное значение. Время обслуживания каждого требования $t_{обс}$ является случайной величиной, которая подчиняется показательному закону распределения с параметром μ. Все приборы системы обладают одинаковой производительностью.

В качестве основных показателей работы системы предлагается вероятность того, что все аппараты свободны или заняты, математическое ожидание длины очереди, коэффициенты занятости и простоя приборов обслуживания. Возможные состояния такой системы массового обслуживания в процессе ее функционирования описываются системой дифференциальных уравнений:

$$p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_k'(t) = -(\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t) + \lambda p_{k-1}(t),$$
$$\text{при } 1 \le k < n,$$

$$p_k'(t) = -(\lambda + n\mu)p_k(t) + n\mu p_{k+1}(t) + \lambda p_{k-1}(t),$$
$$\text{при } k \ge n,$$

где p_0 и p_k — вероятности состояний, когда в системе соответственно ни одного или k требований. Рассмотрим стационарное состояние системы, при котором $t \to \infty$, а $p'_k(t) \to 0$ и $p_k(t) \to p_k$.

В этом случае уравнение состояний запишем в таком виде:

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-(\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1}(t) + \lambda p_{k-1} = 0 \text{ при } 1 \le k < n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-(\lambda + n\mu)p_k + n\mu p_{k+1} + \lambda p_{k-1} = 0 \text{ при } k \ge n.$$

Нормирующее условие:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Не останавливаясь на выводе зависимостей для определения всех перечисленных показателей, полученных для стационарного состояния системы, приводим лишь расчетные формулы.

1. Параметр
$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu},$$
где λ — плотность входящих потоков требований; μ — параметр показательного закона времени обслуживания требований в системе.

2. Вероятность того, что все обслуживающие приборы свободны:
$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{(n-1)!(n-\alpha)}}, \quad \text{при } \frac{\alpha}{n} < 1,$$
где n — число обслуживающих приборов в системе.

3. Вероятность того, что занято обслуживанием k приборов (k требований в системе):
$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0, \qquad \text{при } 1 \le k < n.$$

4. Вероятность того, что все приборы системы заняты ($k \ge n$):
$$\pi = \frac{\alpha^n P_0}{(n-1)!(n-\alpha)}, \quad \frac{\alpha}{n} < 1.$$

5. Вероятность того, что все аппараты заняты обслуживанием и s требований находится в очереди:
$$P_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n!\,n^s} P_0, \quad \text{при } s > 0.$$

6. Вероятность того, что время пребывания требования в очереди больше некоторой величины t:
$$p(\tau > t) = \pi e^{-\mu(n-\alpha)t}.$$

7. Среднее время ожидания требования начала обслуживания в системе:
$$\bar{t}_{ср} = \frac{\pi \bar{t}_{обс}}{(n-\alpha)}, \quad \text{при } \frac{\alpha}{n} < 1,$$
где $\bar{t}_{обс} = \dfrac{1}{\mu}$ — среднее значение обслуживания требований в системе.

8. Средняя длина очереди:
$$M_{ож} = \frac{\alpha P_n}{n\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2}.$$

15'

9. Среднее число требований, находящихся в системе:

$$M = M_{\text{ож}} + \frac{nP_n}{1-\dfrac{\alpha}{n}} + P \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{(k-1)!}.$$

10. Среднее число свободных от обслуживания приборов:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \alpha^k P_0.$$

11. Коэффициент простоя приборов:

$$K_n = \frac{N_0}{n}.$$

12. Среднее число занятых обслуживанием приборов:

$$N_з = n - N_0.$$

13. Коэффициент загрузки приборов:

$$K_з = \frac{N_з}{n}.$$

14. Экономический показатель для выбора лучшего варианта системы обслуживания при ее проектировании:

$$G_{\Pi} = \left(\lambda q_{\text{ож}} + q_{\Pi k} N_0 + N_з q_{\text{ож}}\right) \cdot \overline{t}_{\text{ож}},$$

где G_{Π} — величина потерь в системе за время $\overline{t}_{\text{ож}}$; $q_{\text{ож}}$ — стоимость потерь, связанных с простаиванием требований в очереди в течение единицы времени; $q_{\Pi k}$ — стоимость единицы времени простоя обслуживающего прибора системы; q_k — стоимость эксплуатации прибора при обслуживании в единицу времени.

Пример 1. Морской порт имеет $n = 5$ причалов для разгрузки сухогрузных судов. В среднем в течение месяца в порт прибывает с грузами около 20 судов большого тоннажа. Поступление судов в порт носит случайный характер, так как они выходят из различных портов и покрывают различные расстояния до пункта разгрузки. Кроме того, на скорость движения судов влияет погода. Проведенная статистика частоты прихода судов в порт показала, что поступающие на разгрузку суда образуют пуассоновский поток. Время разгрузки каждого судна является также случайной величиной, которая зависит от тоннажа судов, особенности груза и многих других причин. В среднем на разгрузку судна тратится на причале 6 рабочих дней. Требуется оценить работу порта. Необходимо также рассмотреть возможность увеличения пропускной способности порта за счет увеличения числа причалов. При решении этой задачи нужно исследовать экономическую целесообразность расширения возможности порта по разгрузке и погрузке судов.

Решение.

1. Следует определить параметр

$$\alpha = \lambda t_{\text{раз}} = 20 \cdot 0,2 = 4.$$

2. Вероятность того, что все причалы свободны и ожидают суда под разгрузку:

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{(n-1)!(n-\alpha)}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{4} \dfrac{4^k}{k!} + \dfrac{4^5}{(5-1)!(5-\alpha)}} = 0,13.$$

3. Вероятность того, что все причалы заняты судами под разгрузку:

$$\pi = \frac{\alpha^n P_0}{(n-1)!(n-\alpha)} = 0,13 \frac{4^5}{(5-1)!(5-4)} = 0,555.$$

Это означает, что приблизительно 56% времени все причалы полностью заняты разгрузочными работами.

4. В среднем время ожидания каждым судном начала разгрузки равно:

$$\overline{t}_{\text{ож}} = \frac{\pi \overline{t}_{\text{ож}}}{(n-\alpha)} = 0,555 \frac{6}{5-4} \approx 3,3 \text{ суток}.$$

5. Определим среднее число судов, которое будет находиться в порту, ожидая своей очереди для разгрузки:

$$M_{\text{ож}} = \frac{\pi\alpha}{n\left(1-\dfrac{\alpha}{n}\right)^2} = \frac{0,555 \cdot 4}{5\left(1-\dfrac{4}{5}\right)^2} = 11,1 \text{ судна}.$$

6. Вероятность того, что в порту на обслуживании находится шесть судов ($n = 6$ судов):

$$P_n = \frac{\alpha^n}{n!} P_0 = \frac{4^6}{6!} 0,013 = 0,074.$$

7. Среднее число судов, находящихся в порту:

$$M = M_{\text{ож}} + \frac{nP_n}{1-\dfrac{\alpha}{n}} + P \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{(k-1)!} =$$

$$= 11,1 + \frac{5 \cdot 0,074}{1-\dfrac{4}{5}} + 0,013 \cdot \sum_{k=1}^{4} \frac{4^k}{(k-1)!} = 12,53 \text{ судна}.$$

8. Определим среднее количество простаивающих причалов:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \alpha^k P_0 = 0,013 \sum_{k=0}^{4} \frac{5-k}{k!} 4\alpha^k \approx 1.$$

9. Коэффициент простоя причалов

$$K_{\text{п}} = \frac{N_0}{n} = \frac{1}{5} = 0,20.$$

Это означает, что каждый причал будет простаивать 20% времени. Для уменьшения времени простоя судов решено порт расширить. При этом необходимо рассмотреть увеличение плотности потока судов X в порт, исходя из тенденции развития судоходства в этом районе, а также увеличение скорости движения судов и т. д. Пусть для примера плотность захода судов в порт сохраняется прежней. Сколько нужно иметь причалов в порту, чтобы существенно уменьшить число ожидающих разгрузки судов и время их простоя? Для решения этого вопроса проделаем весь комплекс расчетов для числа причалов n = 5, 6, 7, 8.

Результаты расчетов приведены в таблице 135.

Таблица 135

Характеристики	Число причалов			
	5	6	7	8
Ро	0,013	0,017	0,018	0,0182
7	0,555	0,29	0,136	0,058
$T_{ож}$ (суток)	3,3	0,87	0,27	0,09
Мож (суток)	11,1	1,74	0,42	0,12
м	12,6		4,42	3,76
No	1	2	3	3,96
Кп	0,2	0,3	0,43	0,48

Анализируя результаты расчетов, которые приведены в таблице 135, можно сделать вывод о том, что увеличением числа причалов сл = 5 д о п = 6 удается существенно снизить время ожидания судов (почти в 4 раза), а число судов, ожидающих разгрузки, — в 6,4 раза. Дальнейшее увеличение числа причалов приводит к уменьшению значения $t_{ож}$ и М, но сами эти величины уже достаточно малы. Чтобы принять окончательное решение, целесообразно проделать элементарный экономический анализ. Пусть простой каждого судна в течение суток обходится государству ***Яож*** =100 ед. стоимости. В то же время месячный простой причала порта из-за несвоевременного прихода судов обходится государству $q_{ож}$ = 1000 ед. стоимости. Стоимость месячной эксплуатации причала q_n = 1000 ед. стоимости. Приведенные исходные данные по стоимости отнюдь не претендуют на действительное соответствие реально существующим издержкам в работе конкретного порта, а взяты лишь для иллюстрации порядка проведения расчетов. Для проведения экономического анализа воспользуемся формулой, по

Таблица 136

Характеристики	Число причалов			
	5	6	7	8
(~ж (суток)	3,3	0,87	0,27	0,09
Аfож?ож	6600	1740	540	180
Кп	0,2	0,3	0,43	0,48
ТЩп	5000	6000	7000	8000
Кп nq$_n$	1000	1800	ЗОЮ	3840
Сумма издержек	12600	9540	10550	12020

которой определяется сумма издержек за $T = 1$ месяц. При выборе оптимального варианта необходимо выбрать тот, для которого эти издержки минимальны:

$$G = \lambda \bar{t}_{ож} q_{ож} + K_n n q_n + n p_k.$$

Результаты расчетов приведены в таблице 136

Расчеты показывают, что наиболее экономичным вариантом является порт с шестью ($n = 6$) причалами.

Приведенный пример показывает возможность выбора оптимального варианта проектирования порта или других транспортных пунктов обслуживания.

19.5. СИСТЕМА АВТОЗАПРАВКИ КАК СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ ПОСТУПЛЕНИИ СМЕШАННОГО ПОТОКА ТРЕБОВАНИЙ

Очень часто в системы массового обслуживания поступают потоки требований, которые имеют разный приоритет в обслуживании. Например, в первую очередь в стоматологической поликлинике обслуживаются пациенты с острой болью, на аэродроме принимаются на посадку самолеты при наличии в них неисправностей, на телефонных станциях в первую очередь соединяются международные линии связи и т. д. Во всех этих случаях поток поступающих требований является смешанным. Рассмотрим случай функционирования n-канальной системы массового обслуживания, в которую поступает поток требований, состоящий как бы из двух потоков с плотностями λ_1 и λ_2. Особенностью этих требований является то, что требования второго типа, застав все приборы уже занятыми обслуживанием, уходят из системы, теряются, а требования первого типа могут ожидать своей очереди. Пусть приборы системы обслуживают требования как первого, так и второго типа с одинаковой производительностью, которая характеризуется параметром μ. Схема такой системы может быть описана системой уравнений:

$$p_k'(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + k\mu)p_k(t) + (\lambda_1 + \lambda_2)p_{k-1}(t) + p_{k+1}(t)(k+1)\mu,$$

при $0 < k \le n$.

....

$$p_n'(t) = -(\lambda_1 + n\mu)p_n(t) + (\lambda_1 + \lambda_2)p_{n-1}(t) + n\mu p_{n+1}(t),$$

$$p_k'(t) = (\lambda_1 + n\mu)p_k(t) + \lambda_1 p_{k-1}(t) + n\mu p_{k+1}(t), \text{ при } k > n.$$

Нормирующее условие:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Для стационарных условий (при $t \to \infty$) получены следующие формулы для определения вероятности состояний системы:

1. Вероятность состояния, при котором все приборы свободны от обслуживания:

$$P_0 = \frac{n - \alpha_1}{\left[n - \alpha_1 + \alpha_1 E_n(\alpha_1 + \alpha_2)\right] N_n(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}, \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\mu}.$$

2. Вероятность состояния, при котором k приборов занято обслуживанием требований при условии $0 < k \le n$:

$$P_k = \frac{n - \alpha_1}{n - \alpha_1 + \alpha_2 E_n(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{\dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2)^k}{k!}}{N_n(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

3. Вероятность состояния, при котором k приборов занято обслуживанием требований при условии $k > n$:

$$P_k = \frac{(n - \alpha_1)E_n(\alpha_1 + \alpha_2)}{n - \alpha_1 + \alpha_1 E_n(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{(\alpha_1)^{k-n}}{n},$$

$$N_n(\alpha_1 + \alpha_2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{k!};$$

$$E_n(\alpha_x \quad + a_2) \quad = \quad \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^n}{n!}.$$

$X,$

а, = а$_9$ =

4. Вероятность потери требования равна:

$$P_{\text{ож}} = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \frac{nE_n(\alpha_1 + \alpha_2)}{n - \alpha_1 + \alpha_1 E_n(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

5. Вероятность того, что время ожидания требования первого типа больше времени t:

$$P_{(>t)} = P_{\text{отн}} e^{-(n-\alpha_1)\mu t}.$$

6. Среднее время ожидания требований первого типа:

$$T_{\text{ож}} = \frac{P_{\text{отн}}}{\mu(n - \alpha_1)}.$$

7. Среднее число занятых приборов:

$$N_з = \sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} nP_k.$$

8. Среднее число свободных приборов:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n} (n - k)P_k.$$

9. Коэффициент простоя приборов:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n} (n - k)P_k.$$

10. Коэффициент загрузки приборов:

$$K_з = \frac{N_з}{n}.$$

Пример 2. В одном из районов большого города работает автозаправочная станция. Естественно, что появление клиентов в автозаправочной станции случайно и взаимонезависимо. Поэтому можно считать, что они образуют пуассоновский поток. Однако клиенты могут быть разбиты на два вида. Одни из них, застав все колонки занятыми, становятся в очередь и ожидают. Другие, наоборот, не могут ждать, они спешат и, если все колонки уже заняты обслуживанием, уходят. Пусть клиенты первого вида составляют поток плотностью Xi = 10 клиентов в час, а второго вида — X_2 = 2 клиента в час. Время, которое необходимо для обслуживания клиента, случайно. Оно зависит от объема обслуживания и многих других причин. В среднем на каждую машину необходимо 15 мин, т. е. средняя плотность обслуживания машины равна р = 4 шт. в час. На автозаправочной станции работают л = 4 колонок.

Требуется оценить работу автозаправочной станции.

Таблица 137

k	P_k	kP_k	$(n-k)P_k$
0	0,010	0	0,040
1	0,030	0,030	0,090
2	0,046	0,092	0,092
3	0,046	0,138	0,046
4	0,034	0,136	0
Сумма	0,166	0,396	0,268

Решение.

1. Определение параметров:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} = \frac{10}{4} = 2,5,$$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} = 0,5.$$

2. Вероятность состояния, при котором все колонки свободны от обслуживания:

$$P_0 = \frac{4-2,5}{\left[4-2,5+2,5\cdot 0,205\cdot 3\right]16,37\cdot 3} = 0,01;$$

$$N_n(\alpha_1+\alpha_2) = \sum_{k=0}^{4}\frac{(2,5+0,5)^k}{k!} = 16,57;$$

$$E_n(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{\dfrac{(2,5+0,5)^k}{4!}}{16,37} = 0,205.$$

3. Вероятность состояния, при котором k колонок заняты обслуживанием машин. Вычисленные вероятности P_k представлены в таблице 137.

4. Вероятность потерь для машин второго вида равна:

$$P_{\text{отн}} = \frac{4\cdot 0,205(2,5+0,5)}{4-2,5+2,5\cdot 0,205\cdot 3} = 0,83.$$

Вероятность ухода клиентов второго вида очень велика.

5. Среднее число занятых колонок:

$$N_з = P_0\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^k}{(k-1)!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} nP_k = 0,396 + 4\cdot 0,834 = 3,73 \text{ мастера.}$$

6. Среднее число свободных колонок:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n}(n-k)P_k = 0,268 \text{ мастера.}$$

7. Коэффициент простоя колонок:

$$K_п = \frac{N_0}{n} = \frac{0,268}{4} = 0,064.$$

Это означает, что в среднем только немного более 6% времени каждая колонка будет свободна во время работы.

8. Коэффициент загрузки колонок в течение рабочего времени очень высок и равен:

$$K_з = \frac{N_з}{n} = \frac{3,73}{4} = 0,94.$$

9. Среднее время ожидания для машин первого вида:

$$P_{\text{ож}} = \frac{P_{\text{отн}}}{\mu(n-\alpha_1)} = \frac{0,834}{4(4-2,5)} = 0,122 \text{ час.}$$

Время ожидания машинами первого вида обслуживания невелико.

19.6. НЕФТЕНАЛИВНОЙ ПРИЧАЛ КАК СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ ГРУППОВОМ ПОСТУПЛЕНИИ ЗАЯВОК

Примеров систем массового обслуживания с ожиданием при поступлении групповых заявок можно привести очень много. Например, прибытие товарных составов на сортировочные железнодорожные станции, караванов барж в порты для погрузочно-разгрузочных работ и др. В общем случае для подобных систем массового обслуживания постановку задачи по оценке их функционирования можно сформулировать так.

Имеется система массового обслуживания с ожиданием, состоящая из n однотипных приборов. Все приборы обладают одинаковой производительностью, которая характеризуется параметром μ. Время обслуживания требования приборами подчиняется показательному закону распределения, а его среднее значение равно:

$$\bar{t}_{\text{обс}} = \frac{1}{\mu}.$$

В систему поступает пуассоновский поток с плотностью λ групп требований в единицу времени. В каждой группе содержится m требований. Если поступившие в систему требования застанут все приборы занятыми обслуживанием предыдущих требований, то они становятся в очередь. Требуется оценить эффективность функционирования системы.

Решение. Обозначим вероятности соответствующих состояний системы:

- P_0 — вероятность того, что все приборы свободны от обслуживания;
- P_k — вероятность того, что k приборов заняты обслуживанием при $0 \le k \le n$;
- P_n — вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием;
- P_{n+s} — вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием, а s требований ожидают очереди.

Вероятности возможных состояний системы описываются системой дифференциальных уравнений:

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),$$
$$p_1'(t) = -(\lambda + \mu) p_1(t) + 2\mu p_2(t),$$
$$p_m'(t) = -(\lambda + m\mu) p_m(t) + \mu(m+1) p_{m+1}(t) + \lambda p_0(t),$$
$$p_{m+1}'(t) = -[\lambda + (m+1)\mu] p_{m+1}(t) + \mu(m+2) p_{m+2}(t) + \lambda p_1(t),$$
$$p_n'(t) = -[\lambda + n\mu] p_n(t) + n\mu p_{n+1}(t)\mu + \lambda p_{n-m}(t),$$
$$p_{n+s}'(t) = -[\lambda + n\mu] p_{n+s}(t) + n\mu p_{n+s+1}(t)\mu + \lambda p_{n+s-m}(t).$$

Для установившегося процесса при $t \to \infty$ эта система дифференциальных уравнений превращается в систему алгебраических уравнений:

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0,$$
$$-(\lambda + \mu) P_1 + 2\mu P_2 = 0,$$
$$-[\lambda + m\mu] P_m + (m+1)\mu P_{m+1} + \lambda P_0 = 0,$$
$$-[\lambda + (m+1)\mu] P_{m+1} + (m+2)\mu P_{m+2} + \lambda P_1 = 0,$$
$$-[\lambda + n\mu] P_n + n\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-m} = 0, \quad \text{при } n \geq m,$$
$$-[\lambda + n\mu] P_{n+m} + n\mu P_{n+m+1} + \lambda P_n = 0,$$
$$-[\lambda + n\mu] P_{n+s} + n\mu P_{n+s+1} + \lambda P_{n+s-m} = 0, \quad \text{при } s \to \infty.$$

К этой системе добавляется еще одно очевидное условие:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\mu, \lambda) = 1.$$

Отсюда

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(\mu, \lambda)}.$$

Величину $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(\mu, \lambda)$ можно получить из рекуррентных формул системы алгебраических уравнений.

Пример 1. В порту имеется $n = 6$ причалов, которые оснащены оборудованием для слива нефти с нефтеналивных барж. Производительность оборудования каждого причала такова, что в среднем в течение рабочего дня разгружается две баржи ($\mu = 2$ баржи).

Баржи в порт на разгрузку поступают караванами, каждый из которых состоит из $m = 3$ однотипных (одинаковых по тоннажу) барж. Так как пункты отправления находятся далеко от порта, то вследствие многих не зависимых друг от друга причин, караваны барж поступают неравномерно. Опыт работы многочисленных стран мира показывает, что поток поступления судов близок к пуассоновскому. Пусть плотность поступления барж в порт в среднем равна

^ = 3 караванам в день. Требуется оценить работу порта, если каждая из барж каравана может разгружаться на любом из свободных причалов.

Решение. Так как не получено формульных зависимостей для определения параметров функционирования системы массового обслуживания с ожиданием при поступлении в нее групп требований, вероятность состояний системы определяется рекуррентными зависимостями. В нашем примере они получаются в таком виде:

$$-3P_0 + 2P_1 = 0,$$
$$-(3+2)P_1 + 2 \cdot 2 \cdot P_2 = 0,$$
$$-(3 + 2 \cdot 2)P_2 + 3 \cdot 2 \cdot P_3 = 0,$$
$$-(3 + 3 \cdot 2)P_3 + 4 \cdot 2 \cdot P_4 + 3P_0 = 0,$$
$$-(3 + 4 \cdot 2)P_4 + 5 \cdot 2 \cdot P_5 + 3P_1 = 0,$$
$$-(3 + 5 \cdot 2)P_5 + 6 \cdot 2 \cdot P_6 + 3P_2 = 0,$$
$$-(3 + 6 \cdot 2)P_6 + 6 \cdot 2 \cdot P_7 + 3P_3 = 0,$$
$$-(3 + 6 \cdot 2)P_7 + 6 \cdot 2 \cdot P_8 + 3P_4 = 0 \text{ и т. д.}$$

При проведении расчетов необходимо определять значения P_k с заданной точностью. Если наметилась тенденция быстрого убывания P_k с некоторого значения P_i и величины P_k очень малы, то можно по закономерности их убывания оценить сумму отброшенных значений $P_k = f(P_0)$, после чего необходимо воспользоваться нормирующим условием

$$\sum_{k=0}^{k\to\infty} P_k = 1.$$

В нашем примере получены такие значения величины P_k (табл. 138).

$$\sum_{k=0}^{k\to\infty} \frac{P_k}{P_0} \approx \sum_{k=0}^{k=8} \frac{P_k}{P_0} = 9{,}32.$$

Откуда

$$P_0 = \frac{1}{9{,}32} \approx 0{,}107.$$

Соответственно остальные значения p; приведены в таблице 139.

Таблица 138

к	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Po	1	1,5	1,88	1,72	1,37	0,93	0,58	0,27	0,07

Таблица 139

к	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Pk	0,107	0,16	0,20	0,18	0,15	0,10	0,06	0,03	0,01

1. Среднее число барж, находящихся в порту (под разгрузкой или ожидающих разгрузки):

$$M = \sum_{k=0}^{k=\infty} kP_k \approx 2,8 \text{ баржи.}$$

2. Среднее число барж, ожидающих разгрузки из-за занятости причалов:

$$M_{\text{ож}} = \sum_{k=7}^{\infty}(k-n)P_k \approx 0,05 \text{ баржи,}$$

т. е., ожидающих барж практически не будет.

3. Среднее число барж, находящихся на разгрузке:

$$M_{\text{обс}} = \sum_{k=0}^{K=6} kP_k \approx 2,5 \text{ баржи.}$$

4. Среднее число занятых причалов:

$$N_{\text{з}} = \sum_{k=0}^{6} kP_k + \sum_{k=7}^{\infty} 6P_k \approx 2,74 \text{ причала.}$$

5. Коэффициент загрузки причалов:

$$K_{\text{з}} = \frac{N_{\text{з}}}{n} = \frac{2,74}{6} \approx 0,46.$$

6. Коэффициент простоя причалов:

$$K_{\text{п}} = \frac{N_0}{n} = \frac{n - N_{\text{з}}}{n} = 0,54.$$

7. Коэффициент простоя барж, который равен вероятности отказа в обслуживании барж из-за занятости всех причалов:

$$K_{\text{п}} = \sum_{k=6}^{\infty} P_k = 0,04, \text{ очень мал.}$$

19.7. ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

Производство топлива на НПЗ включает в себя следующие технологические процессы: первичную переработку нефти, при которой из нефти выделяют бензин, керосин, дизельное топливо, мазут; риформинг узких фракций бензина, крекинг, гидроочистку дизельного топлива, фракционирование газов и др.

Основные товарные продукты — бензин, дизельное топливо и мазут — получают путем смешения из нескольких компонентов. Керосин получают на установках первичной переработки без последующего смешения.

Отдельные установки являются достаточно сложными технологическими объектами, но при планировании их модели принимаются в виде математической зависимости «вход–выход». Установки описываются линейными моделями с переменными коэффициентами (коэффициентами отбора). Множество допустимых значений этих коэффициентов определяется через граничные режимы.

Искомые переменные задачи объединяются в две группы. Первая группа x_k характеризует количество сырья, планируемое к переработке по k-му режиму, вторая x_j — количество компонента j, планируемое для получения соответствующего вида топлива.

Все ограничения, формализуемые в виде линейных математических соотношений относительно плановых переменных, можно разбить на следующие группы:

- по ресурсам перерабатываемого сырья;
- по условиям материального баланса по промежуточным продуктам;
- по мощности (производительности) технологических установок;
- по качеству готовых продуктов (бензинов, дизельного топлива), получаемых путем смешивания;
- по плану выпуска готовых продуктов;
- по планируемым экономическим показателям.

В качестве критерия для задач управления комплексом может фигурировать прибыль, производительность, валовой выпуск, затраты на функционирование всех установок и др. Наиболее общим критерием является прибыль, которая зависит как от входных и выходных потоков комплекса, так и от затрат на функционирование. Применение в качестве критерия прибыли предполагает знание цен входных и выходных продуктов комплекса.

Интенсивность использования каждого режима:

$$\lambda_k = x_k \,/\, x_o.$$

Ограничения на производительность каждой установки записываются в виде: $\sum_k x_k \le b,$

где b — максимальная производительность.

Для бензина при планировании наиболее важны ограничения на октановое число, упругость паров и содержание серы. Они записываются в следующем виде:

- по октановому числу:

$$\sum_{j=1}^{n_1}(a_{1j}^{*} - a_{\text{ГОСТ}})x_j \ge 0;$$

■ по упругости паров (для летних марок):

$$\sum_{j=1}^{n_1}(a_{2j}-500)x_j \le 0,$$

где n_1 — число компонентов в смеси; $a_{\text{гост}}$ — октановое число бензина по ГОСТ; a^*_{1j} — эквивалентное октановое число компонента; a_{2j} — приведенная упругость паров компонента.

Ограничение на максимальное содержание серы для дизельных топлив имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n_1}(s_j - s_{\text{ГОСТ}})x_j \le 0,$$

где $s_{\text{ГОСТ}}$ — допустимое по ГОСТ содержание серы; s_j — содержание серы для j-го компонента.

19.8. ЗАДАЧА ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИГОТОВЛЕНИЕМ КОТЕЛЬНЫХ И ДИЗЕЛЬНЫХ ТОПЛИВ

Задача приготовления котельных и дизельных топлив представляет собой типовую операцию смешения ряда исходных продуктов с целью получения товарных продуктов (смесей), которые по своим параметрам (вязкости, плотности и т. д.) удовлетворяют требованиям стандарта или технических условий и могут быть приготовлены при данном плане и запасах компонентов.

Можно рассматривать две возможности:

1) исходные компоненты могут вовлекаться во все конечные продукты, т. е. они не закреплены за данным видом товарного продукта;

2) исходные компоненты могут вовлекаться только в определенные товарные продукты на основе заранее заданных технологических вариантов.

Технологические линии современных НПЗ позволяют реализовать, как правило, лишь вторую возможность, поэтому в дальнейшем будет рассматриваться только этот случай. Все конечные продукты можно разделить на группы (котельные, дизельные топлива, бензины, масла, спецтоплива и т. д.) или даже на отдельные марки внутри групп и рассматривать подсистемы и алгоритмы смешения (компаундирования) каждой группы в отдельности.

Как показала практика смешения, обычно только некоторые параметры товарных продуктов имеют тенденцию к

отклонению от ГОСТ, тогда как остальные параметры, как правило, автоматически укладываются в допуск. Для каждой группы топлив можно выделить основные параметры (критичные к рецептуре), которые и рассматриваются как ограничения в задаче смешения.

Котельные топлива (КТ) выпускаются двух видов: обычные КТ нескольких марок и экспортные. Основными параметрами для обычных КТ являются: условная вязкость при определенной температуре, содержание серы и механических примесей, температура вспышки. Для экспортных КТ, кроме этих параметров, вводятся температура застывания и плотность.

В качестве основных параметров дизельных топлив (ДТ) принимаются: содержание серы, температура вспышки в закрытом тигле, температура застывания, плотность, кинематическая вязкость, температура отгона 10% и 50%-й смеси и температура конца кипения, определяемая по выкипанию 96% или 98%-й смеси.

Задачей оптимального смешения КТ и ДТ является подбор такого соотношения между имеющимися компонентами, при котором получается товарный продукт с допустимыми по ГОСТ значениями основных параметров и минимизируется (максимизируется) заданный критерий оптимизации. При этом учитываются ограничения на запасы компонентов при смешивании в резервуарах или на допустимые расходы при использовании автоматических станций смешения и на план выпуска готовых продуктов.

Обычно желательно максимизировать использование базовых компонентов, что приводит к наибольшему экономическому эффекту. В этом случае в качестве критерия оптимальности принимается максимум общего расхода базовых компонентов. Если компоненты существенно отличаются по себестоимости, то ставится задача нахождения оптимального рецепта, обеспечивающего минимальную себестоимость либо максимальную прибыль от реализации готовой продукции.

Перейдем к строгой формулировке математической модели компаундирования КТ и ДТ.

Используем модель смесительной операции

Xt* = *щу*, *i* = 1, *n;

где ***Xi*** — масса i-го сырьевого компонента; ***у*** — масса товарного продукта; *n* — число компонентов. Переменную и, можно рассматривать как долю i-го компонента в товарном продукте.

Множество допустимых рецептов определяется равенством

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$$

и ограничениями на качественные показатели готового продукта.

Введем следующие обозначения: α_j — значение j-го основного параметра смеси; ρ_t — плотность смеси при температуре t, °С, т/м^3; ν_t — кинематическая вязкость при t, °С, сСт; $t_в$ — температура вспышки смеси, °С; $t_з$ — температура застывания, °С; $t_{10\%}$ — температура отгона 10%-й смеси, °С; $t_{50\%}$ — температура отгона 50%-й смеси, °С; $t_{к.к}$ — температура конца кипения смеси (96%-й и 98%-й), °С; M — содержание механических примесей в смеси, %; S — содержание серы в смеси, %; d_{ij} — значение j-го основного параметра для i-го исходного компонента (для обозначения конкретного основного параметра к условному обозначению соответствующего параметра добавляется индекс i, например, M_i, $t_{зi}$, и т. д.); $b_{j\max}$ и $b_{j\min}$ — предельные максимальное и минимальное значения j-го параметра смеси по ГОСТ; φ_j — функциональная зависимость, связывающая значение j-го основного параметра смеси со значениями j-го параметра для каждого компонента и количествами исходных компонентов в смеси.

Таким образом, область допустимых рецептов определяется системой

$$\begin{cases} \varphi_j(u_1, \ldots, u_n, d_{j1}, \ldots, d_{jn}) \le b_{j\max}; \\ \sum_{i=1}^{n} u_i = 1, \quad u_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Рассмотрим конкретный вид функции φ_j, $j = 1, \ldots, m$.

Для расчета вязкости смеси предварительно необходимо перевести условную вязкость в кинематическую по формулам или таблицам и пересчитать к одной температуре по формуле Вальтера:

$$\lg \lg(\nu t + 0{,}8) = A + B \lg T,$$

где A, B — константы, задаваемые для каждого данного компонента; T — абсолютная температура.

В качестве базовой формулы для определения вязкости смеси была выбрана формула Виноградова. Для n компонентов эта формула имеет вид:

$$\lg \lg(\nu t + 0{,}8) = \sum^{n} u_i \lg \lg(\nu t_i + 0{,}8).$$

Обозначая

$$\lg \lg(\nu t + 0{,}8) = \alpha_1; \quad \lg \lg(\nu t_i + 0{,}8) = \alpha_{1i}, \ i = 1, \ldots, n,$$

можно записать:

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{n} u_i \, \alpha_{1i}.$$

Для определения температуры вспышки за основу принята формула Тиле и Кадерма для двухкомпонентной смеси, распространенная на многокомпонентный случай:

$$t_в = -100 \lg \sum_{i=1}^{n} u_i \, 10^{-t_{вi} h_i / 100},$$

где h_i — поправочный экспериментальный коэффициент для каждого i-го компонента.

Преобразуя

$$10^{-t_в/100} = \sum_{i=1}^{n} u_i \, 10^{-t_{вi} h_i / 100}$$

и вводя обозначения

$$10^{-t_в/100} = \alpha_2, \ 10^{-t_{вi} h_i / 100} = \alpha_{2i}, \ i = 1, \ldots, n,$$

можно записать в виде

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^{n} u_i \, \alpha_{2i}.$$

Зависимость по температуре застывания смеси рассчитывается с использованием экспериментальных нормированных смесительных характеристик по следующей итерационной формуле:

$$\begin{cases} t_з^0 = t_{зs}^k = t_{зl}^{k-1} + (t_{зs}^{k-1} - t_{зl}^{k-1}) \varphi_{sl} \left(u_l \Big/ \sum_{i=1}^{l} u_i \right); \\ l = 1, \ldots, n-1, \quad k = 1, \ldots, n-1; \\ t_{з1} \ge t_{з2} \ge \ldots \ge t_{зl} \ge \ldots \ge t_{зn}, \end{cases}$$

где $t_{зs}^{k-1}$ и $t_{зl}^{k-1}$ — эквивалентные температуры застывания компонентов s и l ($l = n - k + 1$) перед k-й итерацией; φ_{sl} — нормированные смесительные зависимости компонентов s и l ($s \ne l$).

Для определения температуры застывания в некоторой области изменения рецептов может применяться формула:

$$t_з = \sum_{i=1}^{n} d_i t_{зi} u_i + \sum_{i=1}^{n} d_{ii} t_{зi} u_i^2 + \sum_{k=1}^{n} d_{ki} (t_{зk} - t_{зi}) u_k u_i,$$

где d_i, d_{ii}, d_{ki} — коэффициенты, определяемые экспериментально.

Зависимость по плотности имеет вид:

$$\rho^t = 1 \Big/ \left[\sum_{i=1}^{n} u_i (1/\rho_i^t) \right].$$

Эту формулу можно преобразовать:

$$1/\rho^t = \left[\sum_{i=1}^{n} u_i (1/\rho_i^t)\right].$$

Для определения содержания серы и механических примесей в смеси, температуры отгона 10% и 50%-й смеси и температуры конца кипения используется линейная зависимость вида:

$$d_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ji} u_i .$$

Теперь рассмотрим обобщенную задачу оперативного управления для моделей смешения КТ и ДТ при ограничениях на запасы сырья $x_i \le x_{i\max}$. Здесь $x_{i\max}$ — максимальный запас i-го компонента.

Рассмотрим достаточно распространенный на практике случай, когда по условиям отгрузки готовой продукции $y = y_{пл}$ ($y_{пл}$ — плановое задание). Вводя обозначения:

$$u_{i\max} = x_{i\max}/y_{пл},\ i = 1, \ldots, n,$$

можно обобщенную задачу сформулировать только относительно переменных u_i, $i = 1, \ldots, n$.

Ограничения на запасы отдельных компонентов можно учесть с помощью неравенств вида $u_i \le u_{i\max}$.

В качестве критерия можно принять себестоимость, сумма которой минимизируется:

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i,$$

где c_i — себестоимость i-го компонента, или максимум расхода базовых компонентов

$$F_2 = \sum_{k=1}^{l} d_k u_k, \quad (l \le n),$$

где

$$d_k = u_{k\max} / \sum_{i=1}^{l} u_i .$$

Систему ограничений для обычного котельного топлива можно записать в виде

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} u_i \chi_{1i} - \alpha_{1\max} \le 0; & \sum_{i=1}^{n} u_i s_i - s_{\max} \le 0; \\ -\sum_{i=1}^{n} u_i \alpha_{1i} + \alpha_{1\min} \le 0; & \sum_{i=1}^{n} u_i M_i - M_{\max} \le 0; \\ \sum_{i=1}^{n} u_i \alpha_{2i} - \alpha_{2\min} \le 0; & \sum_{i=1}^{n} u_i - 1 = 0,\ u_i - u_{\max} \le 0; \\ u_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots, n. & \end{cases}$$

Для экспортного КТ необходимо учитывать ограничения по плотности:

$$\frac{1}{\rho_{\max}^t} - \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{1}{\rho_i^t} \le 0$$

и по температуре застывания

$$t_з(u_i, t_{зi}) - t_{з\max} \le 0.$$

Так как зависимость по температуре застывания для КТ обычно является выпуклой функцией в области наиболее употребляемых рецептов, то задача оптимального смешения видов экспортного КТ относится к классу задач нелинейного программирования.

Система ограничений для задачи оптимального компаундирования дизельного топлива имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} u_i \alpha_{1i} - \alpha_{1\max} \le 0; & -\sum_{i=1}^{n} u_i (1/\rho_i^t) + (1/\rho_{\max}^t \le 0; \\ -\sum_{i=1}^{n} u_i \alpha_{1i} + \alpha_{1\min} \le 0; & -\sum_{i=1}^{n} u_i t_{10\%i} + t_{10\%\min} \le 0; \\ \sum_{i=1}^{n} u_i \alpha_{2i} - \alpha_{2\min} \le 0; & \sum_{i=1}^{n} u_i t_{50\%i} - t_{50\%\max} \le 0; \\ \sum_{i=1}^{n} u_i s_i + s_{\max} \le 0; & -\sum_{i=1}^{n} u_i t_{к.к.} - t_{к.к.\max} \le 0; \\ t_з(u_i, t_{зi}) - t_{з\max} \le 0; & \\ \sum_{i=1}^{n} u_i - 1 = 0; & u_i - u_{i\max} \le 0, \quad i = 1, \ldots, n; \\ u_i \ge 0, \qquad i = 1, \ldots, n. & \end{cases}$$

Функция температуры застывания $t_з(Ui,\ t_{зi})$ в данном случае является нелинейной, поэтому задача расчета рецепта ДТ является задачей нелинейного программирования с линейным критерием.

19.9. ЗАДАЧА ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИГОТОВЛЕНИЕМ БЕНЗИНОВ

Задача приготовления бензинов ставится аналогично задаче приготовления котельных и дизельных топлив. Отличия связаны с качественными показателями, определяющими множество допустимых рецептов. В качестве основных параметров для бензинов выбираются: pi — плотность смеси при температуре t, °С, т/м³; s — содержание серы в смеси, %; фракционный состав, определяемый:

- либо температурами начала $t_{н.к.}$ и конца кипения $t_{к.к.}$, °C, вместе с температурами отгона 10%, 50% и 90%-й смесей ($t_{10\%}$, $t_{50\%}$, $t_{90\%}$), °C;
- либо отгоном (выкипаемостью) при соответствующих температурах, полученных с учетом поправки на так называемые «истинные» температуры кипения [$C_0(t_{н.к.})$, $C_{10}(t_{10\%})$, $C_{50}(t_{50\%})$, $C_{90}(t_{90\%})$, $C_к(t_{к.к.})$], %.

Кроме того, для бензинов необходимо учитывать детонационную стойкость смеси: I — исследовательское октановое число, M — моторное октановое число и Q — сортность. В число основных показателей также включаются: P — упругость паров, мм рт. ст.; A — содержание ароматических веществ, %; z — содержание тетраэтилсвинца (ТЭС), г/кг или мл/кг.

В последующих формулах будут также использоваться следующие параметры: O — содержание олеинов (непредельных углеводородов), %; J — йодные числа; $\Delta_i = I_i - M_i$ — чувствительность i-го компонента по октановому числу; μ — молекулярная масса; υ_i — объемная доля i-го компонента, связанная с u_i с помощью формулы:

$$\upsilon_i = (u_i / p_i^t) / \sum_{i=1}^{n} (u_i / p_i^t).$$

Упругость паров рассчитывается по формуле:

$$P = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j P_j u_j / \mu_j) \Big/ \sum_{j=1}^{n} (u_j / \mu_j),$$

где α_j — коэффициент, определяемый экспериментально.

Ограничение по упругости паров имеет вид:

$$P_{\max} \geq P \geq P_{\min},$$

где $P_{\max}$, $P_{\min}$ определяются стандартом.

Для расчета октановых чисел можно применять формулы:

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i \upsilon_i + (a_{11} + a_{12}z + a_{13}z^2) \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \upsilon_i (I_i - \sum_{k=1}^{n} I_k \upsilon_k) + (a_{21} + a_{22}z + a_{23}z^2) \left[\sum_{i=1}^{n} O_i^2 \upsilon_i - \left(\sum_{k=1}^{n} O_k \upsilon_k \right)^2 \right] + (a_{31} + a_{32}z + a_{33}z^2) \left[\sum_{i=1}^{n} A_i^2 \upsilon_i - \left(\sum_{k=1}^{n} A_k \upsilon_k \right)^2 \right]$$

или в сокращенной записи:

$$I = \bar{I} + B_1(z)B(z, \Delta) + B_2(z)B(O) + B_3(z)B(A);$$

по моторному методу:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i \upsilon_i + (b_{11} + b_{12}z + b_{13}z^2) \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \upsilon_i (M_i - \sum_{k=1}^{n} M_k \upsilon_k) + (b_{21} + b_{22}z + b_{23}z^2) \left[\sum_{i=1}^{n} O_i^2 \upsilon_i - \left(\sum_{k=1}^{n} O_k \upsilon_k \right)^2 \right] + (b_{31} + b_{32}z + b_{33}z^2) \left[\sum_{i=1}^{n} A_i^2 \upsilon_i - \left(\sum_{k=1}^{n} A_k \upsilon_k \right)^2 \right]$$

или в сокращенной записи:

$$M = \bar{M} + B_4(z)B(\Delta, M) + B_5(z)B(O) + B_6(z)B(A);$$

для расчета сортности:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i \upsilon_i + (d_{11} + d_{12}z + d_{13}z^2) \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \upsilon_i (Q_i - \sum_{k=1}^{n} Q_k \upsilon_k) + (d_{21} + d_{22}z + d_{23}z^2) \left[\sum_{i=1}^{n} O_i^2 \upsilon_i - \left(\sum_{k=1}^{n} O_k \upsilon_k \right)^2 \right] + (d_{31} + d_{32}z + d_{33}z^2) \left[\sum_{i=1}^{n} A_i^2 \upsilon_i - \left(\sum_{k=1}^{n} A_k \upsilon_k \right)^2 \right]$$

или в сокращенной записи:

$$Q = \bar{Q} + B_7(z)B(\Delta, Q) + B_8(z)B(O) + B_9(z)B(A).$$

Во всех приведенных формулах коэффициенты a_{11}, a_{12}, ..., a_{33}, b_{11}, b_{12}, ..., b_{33}, d_{11}, d_{12}, ..., d_{33} определяются экспериментальным путем.

Непосредственное использование приведенных зависимостей по октановым числам приводит к нелинейной задаче, что существенно затрудняет решение. Однако, учитывая достаточную «гладкость» этих зависимостей и тот факт, что изменение соотношений компонентов относительно некоторых средних рецептур обычно невелико, можно в ряде случаев для заданной области изменения переменных заменить нелинейные зависимости более простыми эквивалентными линейными:

$$\alpha_j^э = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}^э u_i, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Эквивалентное значение j-го параметра i-го компонента можно рассчитывать по формуле:

$$\alpha_{ji}^{э} = d_{ji}\alpha_{ji},\ j = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n,$$

где d_{ji} — измеряемый j-й параметр i-го компонента; α_{ji} — коэффициент влияния i-го компонента по j-му параметру.

Коэффициенты α_{ji} обычно определяются экспериментально, путем приготовления пробных смесей.

С учетом линеаризации зависимостей для октановых чисел при фиксированном содержании ТЭС можно записать:

$$\begin{cases} I^{э} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{Ii} I_i u_i \geq I_{\min}; \\ M^{э} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{Mi} M_i u_i \geq M_{\min}; \\ Q^{э} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{Qi} Q_i u_i \geq Q_{\min}, \end{cases}$$

где $I_{\min}$, $M_{\min}$, $Q_{\min}$ — минимальные значения соответствующих параметров.

Если содержание ТЭС меняется, то может использоваться следующая зависимость для исследовательского октанового числа:

$$I^{э} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{Ii} I_i u_i + B_I^{э}(z)$$

и аналогичные зависимости для моторного октанового числа и сортности, где функции $B(z)$ характеризуют приемистость смеси к ТЭС.

Обычно эти функции для заданной области могут быть аппроксимированы полиномами второго порядка:

$$e(z) = a_1^{э} z + a_2^{э} z^2,$$

где a_1, a_2 — экспериментальные коэффициенты.

Используются также нелинейные модели, в которых приемистость к ТЭС задается не для марки в целом, а по компонентам.

Если $B(z)$ задана в виде полинома или графика, удобно применить δ-метод кусочно-линейной аппроксимации, позволяющий свести задачу к линейной.

Приведенные выше зависимости для основных параметров бензинов позволяют построить модели смешения для конкретных марок. Обычно учитываются зависимости для октанового числа по моторному и исследовательскому методам, содержания серы, упругости паров, фракционного состава, плотности, содержания тетраэтилсвинца и содержания ароматики.

Кроме этого, в ряде случаев вводятся дополнительные ограничения, прямо не предусмотренные ГОСТ, но вводи-

мые на основе многолетнего опыта технологов, такие, например, как предельное содержание определенных компонентов.

В качестве критерия оптимальности работы производства, как уже указывалось в случае КТ и ДТ, могут быть приняты максимизация прибыли, минимизация суммарных издержек при ограничениях по плану выпуска, максимизация выпуска отдельных готовых продуктов и т. д. Переменные u_i, z входят в любой из перечисленных критериев линейно. Например, если принять в качестве критерия F минимум себестоимости смеси, получим:

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i + c_э z,$$

где c_i — цена (или себестоимость) компонента; $c_э$ — цена этиловой жидкости в пересчете на ТЭС.

Выше задача смешения бензина была сформулирована для относительных количеств u_i компонентов. При линейных ограничениях не представляет затруднений переход к задаче для абсолютных значений расходов компонентов $x_i = u_i y$, где y — количество смеси.

19.10. ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ НЕФТИ

При первичной переработке нефти происходит разделение смеси с непрерывным фракционным составом (нефти) на ряд целевых продуктов (бензин, керосин, дизельное топливо и мазут).

На показатели качества каждого продукта заданы ограничения, которые сводятся к ограничениям на фракционный состав. В пределах заданных ограничений распределение фракций между целевыми продуктами неоднозначно и среди возможных распределений можно выбрать такое, которое максимизирует (или минимизирует) некоторый экономический критерий, например выпуск продуктов в стоимостном выражении.

Состав смеси с непрерывными фракциями предполагается известным в виде суммарной характеристики, так называемой кривой истинных температур кипения (ИТК) нефти. Характеристики ИТК нефти получаются путем суммирования характеристик отдельных продуктов. При разделении смеси с непрерывным фракционным составом необходимо учитывать следующие ограничения: по условиям материального баланса по фракциям, по четкости разделения и показателям качествам продуктов.

При разделении смеси уравнения материального баланса должны выполняться по каждой узкой фракции с температурой выкипания от t_s до $t_s + \Delta t$. Однако удобнее записать уравнения баланса в интегральном виде для интервалов температур $0 - t_s$. Например, для перекрывающихся фракций первого и второго продуктов уравнения материального баланса для интервалов температур $0 - t_s$, $0 - t_s + 1$ примут следующий вид:

$$\begin{cases} \upsilon_{s1}u_1 + \upsilon_{s2}u_2 = \bar{\upsilon}_s; \\ \upsilon_{s+1,1}u_1 + \upsilon_{s+1,2}u_2 = \bar{\upsilon}_{s+1}, \end{cases}$$

где u_j — объемное количество целевого продукта j, получаемого из исходной смеси ($j = 1, 2$); υ_{sj} — относительное объемное количество продукта j, отгоняемое до температуры $t_s(\upsilon_{sj} \le 1)$; $\bar{\upsilon}_s$ — относительное объемное количество исходной смеси, отгоняемой до температуры $t_s(\bar{\upsilon}_s \le 1)$.

Достижимую для данной установки четкость разделения продуктов j и $j+1$ при постоянной производительности можно охарактеризовать крутизной кривой фракционного состава продукта $j+1$ в области конца кипения (или в области начала кипения продукта j). Поэтому ограничения на допустимую четкость выписываются в виде:

$$\upsilon_{s+1,j} - \upsilon_{sj} \le \upsilon_j^*,$$

где υ_j^* — заданное значение.

Каждый показатель качества целевого продукта определяется по фракционному составу или по назначениям выхода (отгона) υ_{sj} при заданных температурах t_s, поэтому ограничения на показатели качества можно записать:

$$\varphi_j^{(k)}(\upsilon_{sj}) \ge \varphi_{j0}^{(k)},$$

где $\varphi_{j0}^{(k)}$ — заданное значение.

При переработке нефти обычно задаются ограничения на следующие показатели качества целевых продуктов: температура конца кипения бензина, температура перегонки 50%, 90% и 96%-го ДТ, температура вспышки керосина, температура вспышки ДТ, температура застывания ДТ.

В качестве критерия оптимизации процесса разделения можно рассмотреть прибыль, однако при первичной переработке нефти стоимости целевых продуктов — бензина, керосина и ДТ, как правило, равны, а стоимость мазута существенно меньше. Поэтому в качестве критерия оптимизации выбирается суммарный выход светлых нефтепродуктов:

$$F = \sum_{j=1}^{3} p_J(\upsilon_{sj})u_j,$$

где ρ_j — плотность j-го целевого продукта, зависящая от фракционного состава.

Ограничения на показатели качества целевых продуктов выразим через объемные относительные количества фракций, выкипающих до температуры t_s (это значения υ_{sj} по характеристике ИТК), и через количества тех же фракций по разгонке флегмы (обозначим их s_j):

- конец кипения бензина: $\tilde{\upsilon}_{12} \ge 0,98$;
- перегонка 90% керосина: $\tilde{\upsilon}_{23} \ge 0,90$;
- перегонка 50% ДТ: $\tilde{\upsilon}_{35} \ge 0,5$;
- перегонка 90% ДТ: $\tilde{\upsilon}_{36} \ge 0,9$;
- перегонка 96% ДТ: $\tilde{\upsilon}_{37} \ge 0,96$;
- температура вспышки керосина: $t^{к} = t_0^{к} + k_2\upsilon_{22} \ge 28°C$;
- температура вспышки ДТ: $t^{д} = t_0^{д} + k\upsilon_{34} \ge 65°C$;
- температура застывания ДТ: $t^{з} = t_0^{з} + k_3\upsilon_{34} - k_3'\upsilon_{37} \le -11°C$.

Коэффициенты k_2, k, k_3, k_3' определяются на основе статистических данных.

Зависимость $\tilde{\upsilon}_{sj}(\upsilon_{sj})$ нелинейна, однако в требуемом диапазоне изменений (υ_{sj}) ее можно линеаризовать:

$$\tilde{\upsilon}_{sj} = \beta_{sj} + (1 + \alpha_{sj})\upsilon_{sj}.$$

Линеаризуя зависимости $\rho_j(\upsilon_{sj})$, получаем для функционала:

$$F = (\rho_{10} - \Delta\rho_1\upsilon_{11}) + (\rho_{20} - \Delta\rho_2\upsilon_{12} + \Delta\rho_2'\upsilon_{32})u_2 + \\ + (\rho_{30} - \Delta\rho_3\upsilon_{43} + \Delta\rho_3'\upsilon_{63})u_3 \to \max,$$

где ρ, $\Delta\rho$ — коэффициенты.

Полученная линейная задача с переменными коэффициентами стандартным образом сводится к задаче линейного программирования.

19.11. КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВА БЕНЗИНОВ

В каждый планируемый интервал времени товарный цех НПЗ, производящий компаундирование бензинов, получает от поставщиков некоторое количество исходных компонентов. Их этих компонентов путем смешивания получаются автомобильные и авиационные бензины различных марок.

Для оценки качества выпускаемых бензинов и множества различных параметров по ГОСТ и ТУ выбираются основные контролируемые параметры.

В качестве критериев оптимальности работы производства могут быть приняты: максимизация прибыли работы цеха, минимизация суммарных издержек при ограничениях по плану выпуска, максимизация выпуска определенных готовых продуктов и т. д.

Рассмотрим несколько вариантов постановки задачи календарного планирования.

1. Для заданного графика поставок сырьевых компонентов с заданными усредненными (или прогнозируемыми) качественными показателями при определенных плановых заданиях на выпуск готовых продуктов по временным интервалам планирования определить оптимальные (по заданному критерию) соотношения количеств вовлекаемых в производство каждого готового продукта компонентов и выпускаемых готовых продуктов на каждом интервале планирования.

2. Для заданного графика поставок сырьевых компонентов с заданными усредненными (или прогнозируемыми) качественными показателями при плановых заданиях на выпуск готовых продуктов, отнесенных на конец периода планирования, определить оптимальные соотношения количеств вовлекаемых в производство каждого готового продукта компонентов и распределение плановых заданий по интервалам планирования.

3. Для заданного выпуска готовых продуктов на каждом временном интервале при определенных качественных показателях сырьевых компонентов определить оптимальный график поставок компонентов по интервалам планирования.

В качестве примера рассмотрим задачу планирования выпуска трех марок бензинов, приготовляемых из восьми сырьевых компонентов. Период планирования разбит на четыре временных интервала.

В качестве основных параметров, характеризующих марки бензинов, будем рассматривать октановое число и содержание серы. Соответствующие предельные значения октанового числа и содержания серы, а также отпускные цены (условные) каждой из марок бензинов указаны в таблице 140.

Значения октановых чисел, содержание серы в исходных компонентах и их себестоимость представлены в таблице 141. Предполагается, что эти значения являются усредненными и не изменяются на протяжении всего периода планирования.

В таблице 142 даны графики поступления исходных компонентов в период каждого из четырех временных интервалов. Предполагается, что начальные запасы компонентов равны нулю.

Таблица 140

Показатели качества	Марка бензина		
	1	2	3
Октановое число	76	72	58
Содержание серы, %	0,14	0,14	0,30
Цена, руб./т	33	29	23

Таблица 141

Показатель качества	Компонент							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Октановое число	49	70	83	75	58	62	72	45
Содержание серы, %	0,05	1,00	0,40	0,05	0,05	0,02	0,02	0,02
Себестоимость, руб./т	15	28	29	30	20	23	27	16

Таблица 142

Интервалы	Компонент							
	1	2	3	4	5	6	7	8
I	1410	2200	860	910	–	500	2020	–
II	920	1120	800	900	–	550	2060	36
III	1240	1140	910	–	430	480	2580	42
ГУ	1450	970	840	–	–	520	3350	37
Объем емкостей, т	1500	2000	1000	1500	1000	1000	2000	1000

Таблица 143

Марка бензина	Компоненты								Общее количество, т
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	–	–	2172	1810	–	–	3348,5	–	7330
2	–	813,6	471,4	–	254,2	–	6661,5	–	8200
3	5020	2730	766,6	–		2050		1150	11890

Верхние ограничения на объемы емкостного парка для каждого из компонентов приведены в последней строке таблицы 140.

Решение задачи текущего планирования для всего планируемого периода по критерию максимизации прибыли приведено в таблице 143.

Таблица *144*

Компонент	Марка бензина			Остаток в емкостях, т	Марка бензина			Остаток в емкостях, т
	1	2	3		1	2	3	
	I интервал				II интервал			
1	–	–	1410,0	0	–	–	920,0	0
2	–	149,8	751,4	1299,0	-	218,8	643,7	1556,5
3	498,3	27,2	-	334,5	–	176,8	–	957,7
4	415,3	–	–	494,7	-	–	-	1394,7
5	–	–	–	0	–		-	0
6			500,0	0	-	130.8	399,2	0
7	7(18.3	1132,2	119,5	0	–	1800,0	259,0	0
8	–	–	–	0	-	–	360,0	0
Общее количество								
	1681,9	1309,2	2780,9		–	2346,4	2582,8	
	III интервал				IV интервал			
1	–	. -	1240,0	0	–	268,7	1181,3	0
2	–	–	820,7	1875,8	–	308,0	648,0	1889,8
3	1673,4	–	194,3	0	–	617,9	222,0	0
4	1394,7	–	–	0	–	–	–	0
5	–	–	430,0	0	–	-	–	0
6	–	–	480,0	0	–	–	520,0	0
7	2580,0	-	–	0	–	3349,8	-	0
8	–	–	420,0	0	–	–	370,0	0
Общее количество								
	5648,1	–	3585,0		-	45 444,4	2941,3	

Согласно этому решению (табл. 144), необходимо выпустить бензина марки 1 — 7330 т, 2 — 8200 т и 3 — 11 890 т. Прибыль при этом достигает 104 430 руб.

Решение задачи, представленное в таблице 142, существенно отличается от равномерного по интервалам I-IV.

19.12. ОПТИМАЛЬНОЕ СМЕШЕНИЕ КОТЕЛЬНЫХ И МОТОРНЫХ ТОПЛИВ С УЧЕТОМ СТАРЕНИЯ

Сформулируем задачу оптимального смешения котельных и моторных топлив с учетом старения, т. е. изменения во времени свойств топлив.

При смешении компонентов необходимо учитывать ограничения на следующие параметры топлива: плотность, содержание серы, температуру застывания, кинематическую вязкость, фракционный состав, температуру вспышки.

Зависимости для расчета всех показателей, кроме температуры застывания, имеют малые погрешности, и их будем считать детерминированными. Это ограничения на вязкость, плотность, содержание серы, отгон при 250°С. Ограничение на отгон при 250°С имеет следующий вид:

$$i=i$$

где ***Cj*** — отгон при 250°С, ***%; j*** — индекс компонента; $c_{см}$ — требуемое значение параметра смеси; ***Xj*** — количество /-го компонента в смеси; *n* — число компонентов смеси.

Наиболее существенными являются погрешности расчета температур застывания на момент приготовления $и_2$ и через месяц после приготовления о^ При решении задачи оптимального смешения для получения достоверных результатов необходимо учитывать стохастический характер связи между этими параметрами и составом смеси.

Зависимости для температур застывания $и_x$, $и_2$ и расчеты оптимального смешения приведем для смеси трех компонентов: мазута — x_{lt} дизельного топлива АТ — x_2, дизельного топлива ВТ — x_s. Зависимости для температур застывания имеют следующий вид:

$$и_1 = a_{10} + \sum_{1}^{3} a_1 j(tj)Xj + \quad < r_{см30};$$

$$u_2 = a_{20} + \sum_{1}^{3} a_2 j(tj)x_j + Z_{,2} < *_{см},$$

где ***tj*** — температура застывания ;'-го компонента; $t_{см}$, $£_{см30}$ — предельно допустимые значения температур застывания смеси на момент приготовления и через 30 дней; cty *(tj)* — линейные или квадратичные зависимости; ^ i , $^_2$ — случайные погрешности, распределенные нормально, с дисперсиями of, a^2, и коэффициентами корреляции р.

Таблица 145

u	*ti*	ts	Ol	02	p	*t*,»	*CMB0
23	**-23**	**6**	**3,5**	**3**	**0,56**	**-5**	**-5**
CHD	an	ai>	Cd3	out	dS1		GU3
-6,5	**-6,36**	**33,81**	**-2,75**	**-9,3**	**-3,93**	**29,83**	**-7,2**

Пример численных значений коэффициентов и параметров распределения £, £₂ приведен в таблице 145. Здесь приняты линейные зависимости Gty(f/).

Значения *h[, h^, F* для численного примера приведены в таблице 146. Для упрощения задачи другие ограничения, кроме температур застывания, не учитываются.

Таблица 146

Строка *i*	Столбцы матрицы					Вид ограничения	Правая часть ограничений
	1	2	3	4	б		
		X2	X3	Ui	U2		
1	**-6,36**	**33,81**	**-2,75**	**-3,5**		=	**1,5**
2	**-3,93**	**29,83**	**-7,2**		**-3**	=	**4,3**
3	**1**	**1**	**1**			=	**1**
4				**-0,328**	**-0,0443**	>	**Po-0,446**
5				**-0,21**	**-0,0749**		**Po-0,4887**
6				**-0,1025**	**-0,1025**	>	**Po-0,583**
7				**-0,284**	**-0,114**	>	**Po-0,379**
8				**-0,17**	**-0,17**	>	**Po-0,41**
9				**-0,0749**	**-0,21**	>	**Po-0,4887**
10				**-0,214**	**-0,214**	>	**Po-0,128**
11				**-0,114**	**-0,284**	>	**Po-0,379**
12				**-0,0443**	**-0,328**		**Po-0,446**

ГЛАВА 20

МОДЕЛИ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОГО ПРОИЗВОДСТВА

Сами по себе идеи ценны, но всякая идея — в конце концов только идея. Задача в том, чтобы реализовать ее практически.

Г. Форд

Некто купил вещь, ЗАПЛАТИВ ЗА нее 157 руклей 50 копеек, причем платил одинаковым числом рублевых монет и полтинников. Сколько выло полтинников?

Стлринндя задача

20.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТАВА ДОМЕННОЙ ШИХТЫ

Варианты подготовки шихты при выплавке чугуна обусловлены использованием различных видов агломерата, окатышей, железной руды, скрапа, известняка и кокса в завалке. Состав доменной шихты отражает возможности снабжения металлургического предприятия, технологические требования доменного процесса, необходимый химический состав чугуна.

Предпочтительный вариант состава шихты соответствует минимуму суммарных затрат на стоимость шихты и выплавку чугуна при условии выполнения планового задания по производительности доменной печи.

Для математической формулировки задачи вводятся следующие обозначения: *Xj* — расход у'-го компонента шихты; *ац* — содержание i-ro химического элемента в 1 т у'-го компонента; y_j — условный выход чугуна на 1 т у'-го компонента; *N* — план выпуска чугуна; G_j — выделенные заводу ресурсы у'-го компонента; U_i и V_i соответственно минимально и максимально допустимое содержание i-ro химического элемента (серы, фосфора, кремния, марганца, углерода) в чугуне; *Cj* — цена у'-го компонента; *dj* — расходы по переделу в расчете на 1 т у'-го компонента при выплавке чугуна.

Оптимизационная задача расчета состава доменной шихты формируется как определение совокупности величин x_y минимизирующих оценку:

$$I = У(C: +d:)X,$$

при следующих ограничивающих условиях:

$$\sum_j \gamma_j x_j \ge N,$$

$$NU_i \le \sum_j \gamma_j x_j a_{ij} \le NV_i;\ i = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$0 \le x_j \le G_j,\ j = 1, 2, 3, \ldots$$

Плановый объем производства может быть предусмотрен условием:

$$\sum_j x_j p_j \le \frac{T}{t} V,$$

где p_j — объем проплавляемых материалов, м^3/т; T — плановый интервал времени; t — время нахождения материала в печи; V — полезный объем печи.

При наличии на металлургическом предприятии нескольких доменных печей расчет состава шихты значительно усложняется, так как требуется определять распределение шихтовых материалов между печами. В этом случае определяемые величины обозначаются через x_{jk} — количество j-го компонента шихты, планируемое для использования на k-й печи. В этих неизвестных постановка задачи определения состава доменной шихты имеет вид:

$$I = \sum_j \sum_k (d_{jk} + c_j) x_{jk};$$

$$\sum_j \gamma_{jk} x_{jk} \ge N_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$N_k U_{ki} \le \sum_j \gamma_{jk} x_{jk} a_{ij} \le N_k V_{ki};\ k = 1, 2, 3, \ldots,\ i = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$\sum_k x_{jk} \le G_j,\ j = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$\sum_j x_{jk} p_j \le \frac{T}{t_k} V_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$x_{jk} \ge 0,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Здесь использованы такие же обозначения, как и в предшествующей постановке. Наличие индекса k показывает принадлежность соответствующего параметра доменной печи с номером k.

Расчет состава шихты выполняется по программам решения задач линейного программирования, которые дополняются специфическими процедурами подготовки исходных данных и оформления результатов.

В основе сформулированной экономико-математической модели лежат предположения о линейной связи химического состава чугуна и компонентов шихты, а также независимость удельных расходов по переделу от состава шихты. Эти предположения упрощают решение задачи, но одновременно снижают соответствие модели реальному процессу. Повышение качества модели достигается введением нелинейных функциональных зависимостей, которые достаточно хорошо отработаны в теории доменного производства. Они базируются на тепловом и материальном балансах доменной плавки и позволяют определить время нахождения материала в печи, химический состав чугуна и шлака. Однако при этом модель расчета состава шихты становится нелинейной и требует привлечения более сложных методов поиска оптимального решения.

20.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТАВА АГЛОМЕРАЦИОННОЙ ШИХТЫ

Расчет агломерационной шихты в общем случае является сложной оптимизационной задачей. Объясняется это необходимостью учета зависимостей параметров процесса спекания агломерата и состава доменной шихты от химического состава и качества агломерационной шихты. Например, вертикальная скорость спекания зависит от гранулометрического состава шихты. Крупные руды спекаются с наибольшей скоростью и обеспечивают высокую производительность агломашин. Тонкие концентраты глубокого обогащения спекаются значительно медленнее, но более выгодны для доменного производства. Добавление в аглошихту извести способствует интенсификации процесса спекания. Кроме того, ряд коэффициентов, используемых при расчете аглошихты, в значительной степени определяется возможными последующими изменениями химического состава при выплавке чугуна.

Локальная задача расчета аглошихты учитывает расходы только на стоимость материалов и связана с определением совокупности величин x_s — количество i-го компонента на 100 кг шихты. В ее состав входят железорудные составляющие (i $_b$ тг), марганцевая руда (i — n + 1), флюс (i = n + 2), колошниковая пыль (i = n + 3), известь (i = n + 4), окалина (i = n + 5) и кокс (i = n + 6). Общая сумма определяемых неизвестных должна равняться 100 кг:

$$=100.$$

Ресурсы предприятия по отдельным видам шихты G_t учитываются ограничением:

£*;P/(100(l-u?2°))<G,.,

где P — общая потребность в сухой аглошихте; $\mu_i^{H_2O}$ — содержание влаги в i-м компоненте шихты.

Заданное количество углерода в шихте обеспечивается условием:

$$V^{(C)} = \mu_{n+6}^{C} x_{n+6} + \mu_{n+3}^{C} x_{n+3} \le U^{(C)}.$$

Величины V и U зависят от вида аглоруды и концентратов (гематитовые, магнетитовые, магнетитовые высокосернистые, мартитовые, полумартитовые, седиритовые, офлюсованные и неофлюсованные). На практике это приводит к тому, что $U^{(C)}$ и $V^{(C)}$ являются функциями химического состава аглоруды и концентратов. Например, при выполнении условий:

$$\sum \mu_i^{Fe} x_i \le 3,5 \sum \mu_i^{Fe} x_i;$$

$$\sum_i \mu_i^{S} x_i \le 0,5;$$

$$\sum \mu_i^{CaO} x_i \le 0,5 \sum \mu_i^{SiO_2} x_i$$

имеем магнетитовые руды и неофлюсованный агломерат, что соответствует $V^{(C)} = 5$ кг и $U^{(C)} = 5,5$ кг на 100 кг сухой аглошихты.

Если по условиям расчета задается степень металлизации υ агломерата, то на величину расходуемого кокса накладывается ограничение:

$$\mu_{n+6}^{C} x_{n+6} \ge 6 + 0,4\upsilon,$$

где 6 и 0,4 — коэффициенты в приближенной зависимости степени металлизации от количества углерода.

При расчете офлюсованного агломерата вводится ограничивающее условие на его основность:

$$\sum_i \mu_i^{CaO} x_i + \sum_i \mu_i^{MgO} x_i \le m \sum_i \left(\mu_i^{SiO_2} + \mu_i^{Al_2O_3}\right) x_i.$$

Величина m определяется задаваемой основностью доменного шлака. В простейшем случае m принимают равным основности шлака (передельный чугун). При сложной доменной шихте m является одним из коэффициентов, увязывающих расчет доменной и агломерационной шихт.

Ограничения на содержание химических элементов в агломерате могут быть двух типов. При ограничении абсолютной величины химических элементов ограничение имеет вид:

$$V^{(C)} \le \frac{1}{\text{а к}} \sum \mu_i^{S} x_i - \Delta_S \le U^{(S)},$$

где V и U — пределы содержания s-го элемента в агломерате; r_s — степень перехода s-го элемента из шихты в агломерат.

При ограничении относительно содержания химических элементов соответствующее условие имеет вид:

$$\frac{1}{r_s} \sum_i \mu_i^{S} x_i - \Delta_S \le n_s \sum_i \mu_i^{Fe} x_i,$$

где n_s — предельное отношение s-го элемента и железа в агломерате. В качестве контролируемых элементов при расчете агломерата принимают Fe, Mn, P, S, C, FeO, SiO_2, CaO, MgO, Al_2O_3, MnO, P_2O_5 и др.

При агломерации полностью удаляются гидратная влага, углекислый газ карбонатов, летучие вещества кокса, углерод кокса. Частично удаляются мышьяк, фтор, сера:

$$\Delta_{As_2O_3} = \lambda_{As_2O_3} \sum_i \mu_i^{As_2O_3} x_i;$$

$$\Delta_F = \lambda_F \sum_i \mu_i^{F} x_i;$$

$$\Delta_S = \lambda_S \sum_i \mu_i^{S} x_i + \lambda_{SO_3} \sum_i \mu_i^{SO_3} x_i.$$

При диссоциации высших оксидов происходит частичная потеря кислорода:

$$\Delta_{O_2} = \lambda_{MnO_2} \sum_i \mu_i^{MnO} x_i + \lambda_{Mn_2O_3} \sum_i \mu_i^{Mn_2O_3} x_i =$$

$$= \lambda_{Mn_3O_4} \sum_i \mu_i^{Mn_3O_4} x_i.$$

При диссоциации и восстановлении окиси железа происходит изменение массы кислорода:

$$\Delta_{O_2} = \lambda_{Fe} \upsilon \sum \mu_i^{Fe} x_i + \lambda_{FeO} \left(b - \sum_i \mu_i^{FeO} x_i\right),$$

$$b = (100 - \sum_j \Delta_j) U^{FeO}.$$

В результате изменения массы отдельных химических элементов масса агломерата на 100 кг шихты будет равна:

$$a = 100 - \sum_j \Delta_j.$$

Большинство оксидов переходит в агломерат полностью. К ним относятся CaO, MgO, BaO, Na_2O, K_2O, ZnO, PbO, SiO_2, TiO_2, P_2O_5, V_2O_5, Al_2O_3, Cr_2O_3.

Предпочтительная совокупность значений x_j должна обеспечить минимум оценки:

$$I = \sum Ц_i - x_i,$$

где $Ц_i$ — цена за 1 кг i-го вида шихтовых компонентов.

На практике общая постановка задачи может быть упрощена для условий конкретного расчета. Например, рассчитывая состав неофлюсованного агломерата, принимают $x_{n+1} = x_{n+2} = 0$. Для заданного соотношения отдельных составляющих в железорудной шихте величину x_i определяют из соотношения:

$$x_i = b_i x, \quad i = \overline{1, n},$$

где b_i — для i-й составляющей в железорудной шихте; x — количество железной руды в шихте. Учитывая, что формализованная постановка предусматривает расчет на 100 кг сухой шихты, величина x_i корректируется в соответствии с соотношением:

$$x_i' = x_i \,/\, \left(1 - \mu_i^{\mathrm{H_2O}}\right).$$

Перед спеканием в аглошихту вводится дополнительное количество влаги. Ее количество определяется видом аглоруд и концентратов:

$$x_{n+7} = x_{n+7}(\mu_i^{\mathrm{Fe}}, \mu_i^{\mathrm{CaO}}, \mu_i^{\mathrm{FeO}}, \mu_i^{\mathrm{S}}, \mu_i^{\mathrm{SiO_2}}).$$

Формализованная постановка задачи расчета аглошихты может быть отнесена к задачам линейного программирования, если заранее известны величины $U^{(\mathrm{C})}$ и $V^{(\mathrm{C})}$. На практике эти величины определяют в процессе расчета аглошихты и поэтому используют один из двух способов сведения задачи к линейному программированию. Первый способ предусматривает задание соотношения компонентов железорудной шихты и решение задачи для нескольких вариантов этого соотношения с целью выбора минимального по стоимости материала. Второй способ предполагает сравнение задаваемого вида аглоруды и определяемого на основе решения задачи на min I. Если они совпадают, то задача решена. Иначе полученный вид аглошихты закладывается вместо ранее введенного прогноза, и задача решается вновь.

20.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГОРЕСУРСОВ МЕЖДУ ДОМЕННЫМИ ПЕЧАМИ

Одним из направлений увеличения производительности доменных печей является применение комбинированного и обогащенного кислородом дутья. Ограниченность энергетических ресурсов на металлургическом предприятии и разнообразие направлений их использования вызывают необходимость оптимизации энергопотребления. В рамках доменного производства простейшая задача о распределении энергоресурсов связана с распределением кислорода между печами.

Оптимизация распределения технологического кислорода между доменными печами, выполняемая на ЭВМ, осуществляется в два этапа. На первом анализируется возможность применения обогащенного дутья на каждой доменной печи в отдельности и строится зависимость величины приведенных затрат f_k по печам от количества расходуемого кислорода x_k. Получив зависимость $f_k(x_k)$, переходят ко второму этапу — выбору предпочтительного варианта значения величин x_k. Этот вариант должен укладываться в выделенный доменному цеху ресурс G технологического кислорода и давать минимальное значение суммарной оценки I работы печей.

$$\sum_k x_k = G; \ \sum_k f_k(x_k) \to \min.$$

Решение данной оптимизационной задачи на ЭВМ осуществляется методом множителей Лагранжа, который позволяет свести схему расчетов к решению системы уравнений, соответствующая функция Лагранжа имеет вид:

$$\Phi = \sum_k f_k(x_k) + \lambda\left(G - \sum_k x_k,\right)$$

а условия ее минимума:

$$f_k'(x_k) = f_1'(x_1),\ k = 1, 2, 3, \ldots, \sum_k x_k = G.$$

Эта система уравнений решается на ЭВМ с помощью стандартных программ решения систем нелинейных уравнений. Сформулированная задача распределения технологического кислорода является упрощенной задачей выбора состава доменного дутья. В практических условиях наряду с выбором количества кислорода определяется объем вдуваемого природного газа, мазута или угольной пыли. Это приводит к значительному усложнению постановки и решения задачи, так как требует привлечения соотношения материального и теплового балансов доменной плавки.

Математическая постановка обобщенной задачи распределения энергоресурсов между доменными печами формулируется как определение величин x_i, y_i и z_i — соответственно количество кокса, кислорода и дополнительного топлива, выделяемых i-й печи. Система ограничений включает три группы условий: имеющиеся ресурсы, допустимые границы изменения параметров плавки, вспомогательные соотношения.

В первую группу условий входят:

$$\sum_i x_i q_i \le X; \ \sum_i y_i q_i \le Y; \ \sum_i z_i q_i \le Z,$$

где q_i — суточная производительность i-й доменной печи; X, Y и Z — допустимое количество кокса, кислорода и дополнительного топлива для расхода в течение плановых суток в целом по доменному переделу.

Область допустимого изменения параметров ведения доменной плавки описывается условиями:

$$\tau_{ji} \le f_j(x_i, y_i, z_i) \le T_{ji},$$

$$X_0 \le x_i \le X_1,$$

$$Y_0 \le y_i \le Y_1,\ Z_0 \le z_i \le Z_1,$$

где τ_{ji} и T_{ji} — минимально и максимально допустимые значения j-го параметра ведения доменной плавки в i-й печи (теоретическая температура горения, время пребывания материалов в печи и др.); X_0, Y_0 и Z_0 — минимальные, а X_1, Y_1 и Z_1 — максимальные значения расхода кокса, кислорода и дополнительного топлива на i-й доменной печи.

Вспомогательные соотношения обеспечивают расчет параметров проведения доменной плавки и слагаемых экономической оценки работы доменной печи в зависимости от значений x_i, y_i и z_i. Вспомогательные соотношения могут представляться в двух вариантах — аналитическом (функциональная или регрессионная зависимость) и алгоритмическом (например, балансовый метод, дополненный соотношениями кинетики теплообмена, восстановления и газодинамики).

Оценка выбора оптимального варианта распределения энергоресурсов между доменными печами включает в себя несколько слагаемых. Первое — себестоимость суточного выпуска чугуна:

$$I_1 = \sum_i c_i(x_i, y_i, z_i) q_i.$$

Второе — оценка изменения объема производства чугуна по отношению к базовому варианту работы доменных печей:

$$I_2 = \alpha(Q - \sum_i q_i) \text{ при } Q \ge \sum_i q_i;$$

$$I_2 = \beta(\sum_i q_i - Q) \text{ при } Q \le \sum_i q_i,$$

где Q — суточная производительность доменного передела в базовом варианте; α — народнохозяйственные потери от снижения выпуска чугуна на 1 т; β — удельные приведенные затраты на 1 т чугуна.

Величина α зависит от условий функционирования металлургического предприятия и может быть принята, например, равной цене соответствующего количества недовыпущенного готового проката.

Третье слагаемое оценки — изменение экономических затрат в смежных производствах из-за перераспределения потребляемых энергоносителей:

$$I_3 = \gamma_1 \sum_i (y_i - y_i^0) + \gamma_2 \sum_i (z_i - z_i^0),$$

где y_i^0 и z_i^0 — расход кислорода и дополнительного топлива в базовом варианте работы i-й доменной печи; γ_1 и γ_2 — удельные затраты на единицу дополнительно отвлекаемых соответственно кислорода и дополнительного топлива.

Схема решения задачи может быть реализована методом динамического программирования. Переход от одного этапа вычислений к другому связан с наращиванием числа рассматриваемых доменных печей. Рекуррентное уравнение схемы расчета имеет вид:

$$M_i(X, Y, Z) = \min_{x_i, y_i, z_i \in F_i} \{I(x_i, y_i, z_i) + M_{i-1}(X - x_i, Y - y_i, Z - z_i)\},$$

где M_i — экономическая оценка оптимального распределения между i печами энергоресурсов в количестве X, Y и Z; F_i — множество узлов сетки допустимых значений расходуемых кокса, кислорода и дополнительного топлива.

Множество F_i определяется значениями X, Y и Z, а также принятым шагом изменения неизвестных величин. Размерность множества F_i, являющаяся главным фактором для определения трудоемкости решения задачи, равняется

$$n_x n_y n_z = ((X_1 - X_0)/\Delta x)(Y_1 - Y_0)/\Delta y((Z_1 - Z_0)/\Delta z),$$

где Δx, Δy и Δz — шаг изменения неизвестных величин.

Некоторые из узлов сетки допустимых значений расхода энергоресурсов не удовлетворяют совокупности ограничений первой и второй групп. В этом случае соответствующее сочетание значений x_i, y_i и z_i исключается из рассмотрения.

Многократно повторяющейся вычислительной процедурой является расчет технических и экономических характеристик процесса ведения доменной плавки в зависимости от x_i, y_i и z_i. Этот расчет должен быть выполнен для каждого узла множеств F_i на предварительном этапе решения задачи либо непосредственно на этапах схемы динамического программирования по мере наращивания числа рассматриваемых доменных печей. Совокупность технических и экономических характеристик является числовой основой для проверки ограничивающих условий и определения оценки $I = I_1 + I_2 + I_3$.

Практическая реализация рассмотренной задачи на металлургическом предприятии возможна с применением ЭВМ.

20.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕЖИМА ЭНЕРГООБЕСПЕЧЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ВЕДЕНИЯ ПЛАВКИ

Математическая постановка рассмотренной выше задачи определения состава шихты базируется на предположении о неизменности режима ведения плавки. На практике в зависимости от выплавляемой стали и состава шихты целесообразно подбирать предпочтительный режим энергообеспечения печи с целью уменьшения суммарных цеховых затрат. Рассмотрим математическую постановку этой задачи для электросталеплавильного процесса, в котором выделяются четыре этапа: подготовка шихты, плавление, окисление и восстановление. На первом этапе неизвестными величинами являются $x_j^{(1)}$ — количество шихты j-го вида, используемой для завалки; на втором–четвертом этапах основные неизвестные — подводимая электрическая мощность u^k и длительность τ^k, дополнительные: на втором этапе — расход кислорода, на третьем этапе — расход руды и извести, на четвертом — расход ферросплавов. Каждый из этапов плавки описывается математической моделью.

Подготовка шихты характеризуется количеством основных химических элементов в объеме завалки:

$$y_i^{(1)} = \sum a_{ij} x_j^{(1)},$$

где a_{ij} — содержание i-го химического элемента в 1 т j-го вида шихтового материала. Величины $x_j^{(1)}$ ограничиваются имеющимися ресурсами материалов X_j и объемом печи:

$$x_j^{(1)} \le X_j \ \text{ и } \ \frac{1}{p_j} \le V,$$

где p_j — насыпная плотность 1 м^3 материала j-го вида.

В период плавления протекает ряд физико-химических процессов при одновременном нахождении в печи шихты и жидкого металла. Кислород воздуха и оксиды, внесенные с шихтой, окисляют примеси металла. В этот период обычно полностью окисляются кремний, алюминий и около половины марганца, имеющихся в шихте. Длительность плавления зависит от массы и теплоемкости шихты, подводимой мощности и теплового к.п.д. печи:

$$\tau^{(2)} = f\left(x_j^{(1)}, u^{(2)}\right).$$

Количество химических элементов в расплаве определяется как сумма элементов, внесенных с шихтой и добавками на этапе плавления:

$$y_j^{(2)} = y_i^{(1)}(1 - q_i^{(2)}) + \sum_j a_{ij} x_j^{(2)}.$$

Коэффициент $q_i^{(2)}$ учитывает угар элементов и их переход в шлак. На этапе плавления подводимая мощность и масса подвалки ограничиваются:

$$u^{(2)} \le U, \ \ x_j^{(2)} \le X_j^{(2)}.$$

На этапе окисления происходит изменение химического состава расплава, достигается заданное содержание углерода, удаляются содержащиеся в металле газы, выравнивается температура расплава по объему ванны. Математические соотношения между элементами, взаимодействующими в процессе выплавки стали, получают в результате обработки фактических данных. Основные статистические зависимости:

$$y_j^{(3)} = y_i^{(2)} + a\tau; \ y_i^{(3)} = y_i^{(2)} \ln \tau^a; \ y_i^{(3)} = y_i^{(2)} l^{b\tau},$$

где a, b и α — числовые коэффициенты. Более сложные зависимости учитывают соотношение количества отдельных химических элементов. Например,

$$y_{\mathrm{Cr}}^{(3)} = y_{\mathrm{C}}^{(3)} \exp\left(\frac{\alpha}{\tau} + b\right).$$

Окисление углерода осуществляется вдуванием кислорода. Однако одновременно интенсивность подачи кислорода активизирует окисление и других химических элементов, например хрома:

$$y_i^{(3)} = y_i^{(2)} = \alpha\vartheta^{(3)}.$$

На этапе восстановления присаживают ферромарганец, ферросилиций и другие добавки. Некоторая часть химических элементов при этом переходит в расплав из шлака:

$$y_i^{(4)} = \varphi_i(y_i^{(3)}) + \sum_j a_{ij} x_j^{(4)}.$$

Вид функций φ_i так же, как и на этапе окисления, устанавливают статистическим путем.

Подводимая электрическая мощность определяется нормативным графиком изменения температуры расплава.

Варианты режимов плавки оценивают потребной суммой текущих расходов. В ее составе выделяют стоимость заданного:

$$I_1 = \sum_k \sum_j \alpha_j^{(1)} x_j^k,$$

расход электроэнергии:

$$I_2 = \alpha^{(2)} \sum_k \tau^{(k)} u^{(k)}$$

и кислорода:

$$I_1 = a^{(3)} \tau^{(3)} \vartheta^{(3)},$$

условно-постоянную часть текущих расходов, пропорциональную длительность плавки:

$$I_4 = a^{(4)} \sum_k \tau^{(k)}.$$

Здесь $a_j^{(1)}$ — цена j-го вида шихты; $a^{(2)}$ — цена 1 кВт · т; $a^{(3)}$ — цена 1 м^3 кислорода; $a^{(4)}$ — условно-постоянные текущие расходы сталеплавильного цеха в единицу времени.

Задача решается методом динамического программирования с привлечением на заключительном этапе линейного программирования. Для каждого из этапов плавки вводится сетка допустимых значений химического содержания элементов в расплаве. Интервал их изменения для последнего этапа определяется требуемой маркой стали, а для остальных — возможностями варьирования управляющих параметров плавки. Расчет начинается с установления для каждой точки сетки значений химического состава расплава после этапа окисления предпочтительной последующей точки на сетке значений химического состава готового металла. Для каждой точки в координатах $y_i^{(3)}$ вычисляют соответствующее значение составляющих оценки проведения плавки на четвертом этапе. Затем аналогичный расчет выполняют для «соединения» этапов окисления и плавления, а далее плавления и подбора шихты. При этом на каждом этапе расчетов происходит прирост учитываемых затрат. В результате каждый из вариантов химического состава шихты характеризуется режимом проведения плавки и потребной суммой затрат на плавку. Если к ней добавить стоимость шихты, то можно выбрать оптимальный вариант выплавки стали.

Рассмотренная выше экономико-математическая модель расчета параметров режима плавки применяется не только для электросталеплавильного процесса. Она используется для конвертерного и мартеновских производств. Выделяемые при этом этапы плавки и состав управляющих параметров для каждого из типов производств различны. Например, при оптимизации режима введения конвертерной плавки выделяют несколько этапов: зажигание, начало вспенивания, образование пенистого шлака, продувка с пенистым шлаком, оседание пенистого шлака, нормальное снижение скорости окисления углерода, продувка со сниженным расходом кислорода. Каждый из этих периодов отличается положением фурмы и расходом кислорода.

20.5. ОПТИМИЗАЦИЯ СОРТАМЕНТНЫХ РЯДОВ ПРОКАТА

Определение размерного ряда проката требует учета затрат в сферах производства, транспортировки, обработки и применения. Расширение сортаментного ряда и оптимизация формы поперечного сечения проката дают большие преимущества потребителям металлопродукции: обеспечивается экономия металла, снижаются трудовые затраты, высвобождаются мощности металлообрабатывающего оборудования, снижается масса деталей, машин и металлоконструкций. С позиций металлургического производства расширение сортамента экономически нецелесообразно: растет дробность заказов, уменьшается размер партий проката на станах, увеличивается число переналадок станов, растет парк сменного оборудования, падает производительность.

Математическая формализация задачи расчета сортаментного ряда связана с определением величин N и x_{kn}, минимизирующих показатель:

$$I = \varphi(N, x_{kn}) + \psi(N, x_{kn}) + f(N, x_{kn}) + \xi(N, x_{kn}),$$

где N — число размеров в сортаментном ряде; x_{kn} — величина n-го параметра поперечного сечения k-го размера; φ, ψ, f и ξ — затраты в сферах металлургии, транспорта, обработки и эксплуатации.

Конкретное выражение функций φ, ψ, f и ξ зависит от распределения потребности в прокате по интервалу сортаментного ряда, принципов расчета массы профиля, состава экономических элементов, закладываемых в расчет затрат.

В простейшем случае функции φ, ψ и f принимают пропорциональными массе металла P и числу размеров в сортаментном ряду N:

$$\varphi = \alpha_1 P - \beta_1 N;$$
$$\psi = \alpha_2 P - \beta_2 N;$$
$$f = \alpha_3 P - \beta_3 N;$$
$$\xi = \alpha_4 P - \beta_4 N,$$

при

$$P = \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1n}}^{x_{kn}} P(\omega)\, m(x_{kn})\, d\omega,$$

где $P(\omega)$ — потребность проката по размеру ω, м; $m(x_{kn})$ — масса профиля при размере x_{kn}, т/м.

Совокупность задач оптимизации сортамента проката можно разделить на следующие группы:

- оптимизация размерного ряда профиля проката;
- расширение сортаментного ряда введением промежуточного размера в базовый размерный ряд;
- унификация сортамента;
- оптимизация элементов поперечного сечения сложного профиля.

Аналитический метод оптимизации размерного ряда применяют при наличии функциональной зависимости оптимизационной оценки I от значений переменных размерного ряда x_k. В этом случае, используя необходимое условие экстремума функции, можно оптимизационную задачу свести к решению системы уравнений.

Экономическую оценку сортаментного ряда при фиксированном количестве членов можно представить в виде:

$$I = \sum_{k=1}^{N} \Phi(x_{k-1}, x_k),$$

где $\Phi(x_{k-1}, x_k)$ — экономическая оценка интервала размерного ряда от x_{k-1} до x_k. Характер функции Φ определяется двумя факторами: распределением потребности в прокате в интервале ряда от x_{k-1} до x_k и правилом расчета дополнительных затрат от замены требуемого размера проката на ближайший больший x_k.

Математическая запись функции Φ может быть выполнена в виде:

$$\Phi(x_{k-1}, x_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \gamma(x_k, \omega)\ p(\omega)d\omega;$$

$$\Phi(x_{k-1}, x_k) = \sum_{\omega=x_{k-1}}^{x_k} \gamma(x_k, \omega)\ p(\omega),$$

где $P(\omega)$ — интенсивность потребности в прокате по размеру ω; $\gamma(x_k, \omega)$ — дополнительные затраты при удовлетворении потребности по размеру ω прокатом с размером x_k. Задавая конкретный вид функций γ и p, можно рассматривать различные организационно-экономические ситуации определения размерных рядов.

При одинаковой потребности в прокате по интервалу размеров и линейной зависимости дополнительных затрат выражение для расчета оценки размерного ряда будет иметь вид:

$$I = \alpha \sum_{k=1} x_k \left(x_k - x_{k-1}\right).$$

Необходимое условие минимума ее значения приводит к системе уравнений

$$2x_k - x_{k-1} - x_{k+1} = 0 \text{ или } x_k - x_{k-1} = x_{k+1} - x_k,$$

которая определяет арифметический размерный ряд. Следовательно, при равномерной потребности в прокате и пропорциональности затрат размерному параметру оптимальным является арифметический ряд.

Если потребность в прокате с ростом размера повышается линейно, а дополнительные затраты пропорциональны квадрату размера (круг, квадрат), то итоговая оценка имеет вид:

$$I = \beta \sum_{k=1}^{N} x_k \left(x_k^2 - x_{k-1}^2\right).$$

Необходимое условие минимума ее значения приводит к системе уравнений:

$$x_k^2 - x_{k-1}^2 = x_{k+1}^2 - x_k^2.$$

Представленные в таблице 147 формулы для расчета размерного ряда показывают, что ряды 2–6 характеризуются смещением размеров в область больших значений по сравнению с арифметическим рядом, причем смещение повышается с увеличением темпов изменений в функциях γ и p. Седьмой ряд в таблице 147 (геометрический) характеризуется концентрацией размеров в области малых значений.

При расчете размерных рядов простых профилей проката определяемым размером является характеристика поперечного сечения: толщина, ширина, диаметр. Для сложных профилей специального назначения размерный параметр является характеристикой эксплуатации: изгибающий момент, момент кручения и т. п. В этом случае расчет размерного ряда проката выполняется в два этапа. Сначала

Таблица 147

№	Характер распределения потребности	Характер функции затрат	Расчетная формула
1	Равномерный	Линейный	$x_k - x_{k-1} = x_{k+1} - x_k$
2	Линейный	Линейный	$x_k^2 - x_{k-1}^2 = 2(x_{k+1}x_k - x_k^2)$
3	Квадратичный	Линейный	$x_k^3 - x_{k-1}^3 = 3(x_{k+1}x_{k_k}^2 - x_k^3)$
4	Равномерный	Квадратичный	$2(x_k^2 - x_k x_{k-1}) = x_{k+1}^2 - x_k^2$
5	Линейный	Квадратичный	$x_k^2 - x_{k-1} = x_{k+1}^2 - x_k^2$
6	Квадратичный	Квадратичный	$x_k^3 - x_{k-1}^3 = \frac{3}{2}(x_{k+1}^2 x_k - x_k^3)$
7	Равномерный	Геометрический	$\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}}$

определяется размерный ряд по эксплуатационному параметру, а затем для каждого значения в этом ряду определяют размеры поперечного сечения элементов профиля проката.

Аналитический метод определения оптимального числа членов в размерном ряду на представлении функции затрат в виде:

$$I = M(N)c(N),$$

где $M(N)$ — потребная масса проката; $c(N)$ — удельные затраты в металлургическом и машиностроительном производствах. Оптимальное число членов в размерном ряду соответствует решению уравнения:

$$I_N = M'(N)c(N) + M(N)c'(N) = 0.$$

При наличии функций аналитического вида $M(N)$ и $c(N)$ определение оптимального значения N сводится к получению расчетной формулы, в которой значение N увязывается со значениями параметров функций M и c. Графический способ определения оптимального значения N предполагает построение $\lg M$ и зеркально отображенного $\lg c$. Их точка пересечения определяет искомое значение N.

Универсальный алгоритм расчета размерных рядов базируется на процедуре динамического программирования. Ее математическая формализация предполагает задание детализированной последовательности размерной характеристики $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$, для каждого элемента которой известна потребность в прокате. Из этой последовательности необходимо отобрать ограниченное число размеров, которые составят оптимальный размерный ряд.

Обозначим определяемые значения размерного ряда через l_k, причем $l_{k+1} > l_k$ и каждая величина l_k совпадает с одним из значений x_j. Все размеры исходного ряда x_j, вошедшие в интервал от l_{k+1} до l_k, заменяются при выпуске и использовании на размер l_k.

Оценку вариантов определяемого размерного ряда представим в виде:

$$I = \alpha_1 \sum_{k+1}^{n} \left(f(l_k) - \sum_{x_j = l_{k-1}+1}^{l_k} f(x_j) \right) + \alpha_2 n.$$

Здесь первое слагаемое оценивает затраты, связанные с производством и использованием избыточной массы проката, а второе — аналогичные затраты, зависящие от числа членов в размерном ряду. При записи оценки использованы обозначения: $f(x_i)$ — потребность в прокате x_i; $f(l_k)$ — потребность в прокате размером l_k с учетом того, что данный размер заменяет последовательность x_i из интервала

от l_k до l_{k-1}; α_1 — удельные затраты на выпуск и использование проката; α_2 — затраты на выпуск проката при изменении числа членов в размерном ряду на единицу. Минимальный и максимальный размеры проката в расчетном ряду можно принять $l_0 = 0$ и $l_k = l_N$.

Основой вычислительной схемы динамического программирования является рекуррентное уравнение, позволяющее переходить от одного варианта размерного ряда к другому при постепенном наращивании числа членов. Математическая запись рекуррентного уравнения имеет вид:

$$I(l_k) = \min_{l_{k-1}} \left\{ I(l_k) + d(l_{k-1}, l_k) \right\},$$

где $I(l_k)$ — оценка сортаментного ряда на интервале от 0 до l_{k-1}; $d(l_{k-1}, l_k)$ — оценка сортаментного ряда на интервале от l_{k-1} до l_m при размещении между ними одного размера l_k. Таким образом, оптимизационная оценка $I(l_k)$ обеспечивает выбор лучшего положения размера l_{k-1} для каждого из положений размера l_k. Приняв $I(l_0) = 0$, можно на основе рекуррентного уравнения рассмотреть варианты для $k = 1$, 2, 3, ... до тех пор, пока будет уменьшаться оценка I.

В таблице 148 приведен пример вычислений методом динамического программирования размерного ряда в предположении квадратичной зависимости потребности в прокате от размера профиля проката ($f(x_i) = i^2$). Потребная масса проката при замене размера x_i на размер l_k принята пропорциональной повышению размера ($f = f(x_i) * l_k/i$). Приводимые в таблице 149 значения $I(l_k)$ показывают потребную

Таблица 148

Этап 1		Этап 2			Этап 3			Этап 4			Этап 5			Этап 6		
l_1	$I(1)$	l_2	l_1	$I(2)$	l_3	l_2	$I(3)$	l_4	l_3	$I(4)$	l_5	l_4	$I(5)$	l_6	l_5	$I(6)$
1	1	2	1	5	3	2	14	4	3	30	5	4	55	6	5	91
2	6	3	2	15	4	3	31	5	4	56	6	5	92	7	6	141
3	18	4	3	34	5	4	59	6	5	95	7	6	144	8	7	208
4	40	5	3	63	6	5	99	7	6	148	8	7	212	9	8	293
5	75	6	4	106	7	5	154	8	7	218	9	8	299	10	9	399
6	126	7	4	161	8	7	228	9	8	309	10	8	408			
7	196	8	5	243	9	7	314	10	9	414						
8	288	9	6	352	10	7	431									
9	405	10	7	466												
10	550															

Таблица 149

Годы	Исходные данные	I		II		Потребность в продукции
		№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
1992	Продукция, тыс. т:					
	1-го вида	100	150	250	400	400
	2-го вида	300	380	200	250	480
1995	1-го вида	350	490	420	600	800
	2-го вида	550	650	385	490	950
1992	Расход лимитируемого ресурса, тыс. т.	200	280	205	340	500*
1995		440	550	400	510	950*
	Приведенные затраты на объем 1995 г., млн руб.	200	240	180	250	

* Максимальное количество ресурсов

массу метала по интервалу размеров от 0 до l_k при оптимальном положении размера l_{k-1}. По этой таблице можно установить оптимальный размерный ряд для любого числа членов.

Например, для размерного ряда из шести членов будем иметь: l_6 = 10, l_5 = 9 (из этапа вычислений 6), l_4 = 8 (из этапа 5), l_3 = 7 (из этапа 4), l_2 = 5 (из этапа 3), l_1 = 3 (из этапа 2). Аналогично можно сформировать размерный ряд на любое число членов от 1 до 10.

20.6. ФОРМИРОВАНИЕ ГРАФИКА ВЫПУСКА ПРОФИЛЕРАЗМЕРОВ ПРОКАТА НА СТАНЕ

На основании месячной программы в прокатном цехе составляется план-график выпуска профилеразмеров проката. Лучший его вариант обеспечивает минимум потерь от задержки сроков выполнения заказов, простоев стана, пролеживания заготовки и готового проката, снижения качества проката.

Математическую формализацию задачи рассмотрим применительно к сортопрокатному стану, используя в качестве неизвестной величины y_n — номер партии проката, планируемой в последовательности выпуска на месте с номером n. Система ограничений на совокупность y_n учитывает целочисленность переменных, неповторяемость партий в графике, наличный фонд рабочего времени отделочных агрегатов:

$$y_n = 1, 2, \ldots, N;$$

$$y_n \neq y_k;\ n \neq k;$$

$$\sum_{n=m}^{N} \frac{P(y_n)}{q_k(y_n)} \le T_k - \sum_{n=m}^{m-1} \frac{P(y_n)}{Q(y_n)},$$

где $q_k(y_n)$ — производительность k-го агрегата при обработке партии y_n; $Q(y_n)$ — производительность; T_k — месячный фонд рабочего времени агрегата с номером k.

Потери рабочего времени при переходе от партии y_n к y_{n+1} определяются длительностью перестройки стана $t_1(y_n, y_{n+1})$ и временем принудительного простоя стана из-за занятости смежных агрегатов $t_1(y_n, y_{n+1})$:

$$t_1(y_n, y_{n+1}) = \max\,(t_1,\ t_2).$$

Экономическая оценка потерь рабочего времени стана равна:

$$I_1 = \alpha_1 \sum_{n=1}^{n} t\left(y_n, y_{n+1}\right),$$

где α_1 — потери предприятия за 1 ч простоя стана.

Потери от снижения качества продукции можно принять пропорциональными массе проката второго сорта $k(y_n, y_{n+1})$, получающейся в партии y_{n+1} при ее прокатке после партии y_n:

$$I_2 = \sum_{n=1}^{n-1} \alpha_2(y_{n+1}) \cdot k(y_n, y_{n+1}) \cdot P(y_{n+1}),$$

где $P(y_{n+1})$ — количество проката в партии y_{n+1}; $\alpha_2(y_{n+1})$ — потери предприятия при реализации 1 т проката партии y_{n+1} вторым сортом.

Штраф за нарушение сроков выпуска отдельных заказов можно определить, зная разницу времени потребности в заказе и плановый срок выпуска соответствующей партии:

$$I_3 = \alpha_3 \sum_{m=1}^{n} \max\left(0; \sum_{n=1}^{m-1} \frac{P(y_n)}{Q(y_n)} - r_m\right),$$

где r_m — необходимый срок выпуска партии y_m; α_2 — штраф за опоздание выпуска проката на единицу времени.

Общая оценка плана-графика выпуска профилеразмеров проката на стане:

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

Для решения задачи при небольшом числе партий можно использовать алгоритм динамического программирования. При большом числе партий с целью сокращения времени вычислений применяют эвристические алгоритмы. Они базируются на правилах монотонного изменения параметров последовательных партий (по возрастанию диаметра или толщины, уменьшению ширины и т. п.)- При наличии нескольких параметров вводится их приоритет.

В некоторых практических случаях формирование плана-графика выпуска профилеразмеров проката базируется на минимизации времени непроизводительных простоев стана. Рассмотрим пример такой ситуации. Пусть ритм выдачи металла из печи равен г, а ритм прокатки s. Если ***s*** **<** г, то работа нагревательного участка сдерживает работу стана. Однако если в момент подхода первой заготовки к окну выдачи из печи стан остановлен на перестройку, то заготовка дополнительно подогревается и после перестройки может выдаваться с ритмом s. Число штук заготовки, которое можно выдать ритмом s:

$$n = т/(г - s),$$

где т — время перестройки стана.

Эвристический алгоритм формирования очередности выпуска профилеразмеров базируется на правиле: первая партия должна иметь *г < s*, вторая *s < г* (число штук заготовки во второй партии определяется длительностью перестройки стана между первой и второй партиями), третья *г < s* и т. д.

20.7. ВЫБОР РАЗМЕРОВ ЗАГОТОВКИ

Размеры заготовки влияют на производительность стана, степень использования силовых возможностей клетей и площади пода нагревательных печей, расход металла и трудоемкость вспомогательных работ. В соответствии с программой выпуска проката выбирают: для обжимных станов — типоразмеры слитков, для толстолистовых станов — размеры слябов, для станов холодной прокатки — ширину и толщину подката, для сортовых станов — размеры заготовки и т. д. Совокупность задач выбора размеров заготовки можно разделить на три группы: подбор предпочтительного размера заготовки для индивидуального размера готового проката, подбор сортамента заготовки для программы выпуска проката на стане, подбор размеров заготовки в цепочке последовательно функционирующих станов.

Выбор размера поперечного сечения заготовки для индивидуального размера проката направлен на распределение работы деформации между последовательными станами. Повышение размеров заготовки влечет за собой рост эксплуатационных расходов на чистовом стане. Одновременно снижается себестоимость заготовки, так как на предшествую-

щем стане уменьшается работа деформации. Оптимальный размер заготовки x соответствует минимуму оценки:

$$I = c(x) + \gamma(x),$$

где $c(x)$ — себестоимость заготовки; $\gamma(x)$ — эксплуатационные расходы на чистовом стане.

Допустимые значения x определяются размерным рядом ГОСТ на заготовку. Нелинейные зависимости $c(x)$ и $\gamma(x)$ строят на базе параметров режимов деформации металла.

Особенностью выбора длины заготовки является необходимость учета ее колебаний в зависимости от точности размеров поперечного сечения и раскроя на предшествующих стадиях. Влияние этих колебаний на выбор номинальной длины заготовки проиллюстрируем в предположении аппроксимации фактической длины треугольным распределением плотности вероятностей:

$$f(z)\begin{cases}(z + c - z_0)/c^2 & z_0 - c \le z \le z_0;\\ (z_0 + c + z)/c^2 & z_0 \le z \le z_0 + c;\\ 0 & z < z_0 - c \quad z > z_0 + c,\end{cases}$$

где z — номинальная длина заготовки; $\pm c$ — интервал колебаний длины заготовки.

Математическое ожидание обрези при раскрое на равные длины:

$$M(\Delta) = \int_{z-c}^{z_0+c} (z - nl/k)f(z)dz,$$

где l — длина штук проката; k — удлинение заготовки в процессе прокатки; n — число штук проката, получаемое из одной заготовки.

Для конкретного вида функции $f(z)$ получим:

$$M(\Delta) = z_0 - \frac{nl}{k} + \frac{l}{kc^2}\left(\frac{(nl/k)^2}{2} - \frac{(z_0 - c)^2}{2} + (c - z_0)\left(\frac{nl}{k} - z_0 + c\right)\right).$$

Приравняв к нулю производную от этого выражения, получим оптимальную длину заготовки:

$$z_0 = nl/k + c - c^2k/l.$$

Отсюда видно, что длина заготовки должна выбираться на $c - c^2k/l$ больше, чем требуемая суммарная длина проката с учетом вытяжки. Значение n выбирается на основе длины рольгангов и ширины пода нагревательной печи.

Подбор сортамента заготовки формулируется как экономико-математическая задача определения x_{ik} — количества заготовки *k*-го типоразмера, планируемого для использования при выпуске i-го типоразмера проката. Совокупность ограничивающих условий на значения x_{ih} включает соотношения:

$$Y_a x_{ik} = X_i, i = 1, 2, 3,$$

$$\hat{} x_{ik} < Y_k, k = 1, 2, 3, \ldots, N,$$

Первое соотношение учитывает ограниченность фонда рабочего времени стана величиной *T*, второе — выполнение планового задания по выпуску проката в количестве *X*, третье — ограниченность потребления заготовки *k*-го типоразмера величиной Y_k.

Оценивается вариант сортамента заготовки показателем:

$$I = \sum_k \sum_i (\ldots + a\,ik\; I^{**} + A\,ik\,ik) +$$

где c_k — себестоимость заготовки *k*-го типоразмера; а — текущие расходы цеха на единицу времени работы стана; A_{ik} — удельные потери металла в виде обрези и угара при выпуске i-го типоразмера проката из заготовки *k*-го вида; В — вспомогательные расходы смежных прокатных цехов на один типоразмер заготовки, включенный в специализацию станов.

В алгоритме решения задачи выделяют три этапа: задание набора типоразмеров заготовки, расчет величин q_{ik} и *Ам*, определение x_{ik} по процедуре линейного программирования. Рассмотрев варианты состава типоразмеров заготовки, можно по значениям показателя *I* выбрать предпочтительный сортамент заготовки.

20.8. СОСТАВЛЕНИЕ ГРАФИКА ПРОВЕДЕНИЯ РЕМОНТОВ ОСНОВНЫХ ЦЕХОВ

Составляя график планово-предупредительных ремонтов на очередной плановый период, принимают во внимание нормативные сроки ремонта оборудования и наличие трудовых ресурсов по ремонтным профессиям. Для основных агрегатов введем желаемый срок остановки на ремонт z_i. Если при составлении совместного графика ремонтных работ будут получены иные сроки начала ремонтов x_i, то для агрегата это приведет к дополнительным потерям

Остановка на ремонт ранее планового срока связана с недоиспользованием рабочего ресурса оборудования. Более поздняя остановка может повлечь за собой внезапные аварийные неисправности агрегата. Величина потерь определяется по соотношению:

$$M^* t \sim t) = \begin{cases} a_i(x_i - z_i) & \text{при } x_i > z_i; \\ \gamma_i(x_i - z_i) & \text{при } x_i < z_i, \end{cases}$$

где а* и *ji* — потери цеха при расхождении на 1 ч планового и фактического сроков начала ремонтных работ на i-м агрегате.

Общезаводской график проведения ремонтных работ составляется с учетом наличных трудовых ресурсов на планируемый период по каждой из специальностей ремонтных рабочих:

$$\sum \Phi^*(x_i, \tau) < T_k(\tau),$$

где $T_k(x)$ — трудовой ресурс по *k*-й профессии на сутки т; $q{>}ik$ — потребность в трудовых ресурсах для i-го ремонта. Определяется φ_{ih} началом ремонта и нормативными затратами на период ремонта i-го агрегата. В простейшем случае Φ_{ik} представляется в виде:

$$V^* = \begin{cases} \tau_{ik} & \text{при } x_i < \tau < x_i + \varphi!; \\ 0 & \text{при } x_j > \tau, \quad \tau > x_j + \varphi^{(n)}. \end{cases}$$

Оцениваются варианты общезаводского графика проведения ремонтных работ суммой потерь из-за отклонения планового начала ремонта от предпочтительного срока и оплаты трудовых затрат:

$$I = \sum_i \hat{}(\ldots - x_i.) + p\sum_i \max_\tau \sum_k 9 i^*(T)-$$

Расчет величин **X;** на ЭВМ происходит в два этапа. На первом принимаются $x_i = z_i$. В этом случае равна нулю первая составляющая функционала, но завышается величина второй составляющей. На втором этапе проводится анализ начального решения и выявляются сутки, характеризующиеся наибольшим напряжением трудовых затрат. Для ремонтных работ, запланированных на эти сутки, анализируют возможность сдвига начального момента. Простым перебором определяется агрегат, сдвиг сроков ремонта которого дает уменьшение трудовой напряженности при меньшем возрастании первой составляющей функционала. Если суммарная величина оценки в результате уменьшится, то полученное решение принимается вместо начального и вычислительная процедура повторяется. Такая циклическая схема повторяется, пока не будет выравнена относительная загрузка по профессиям либо сдвиг начальных моментов начала ремонтных работ не будет давать общего уменьшения оценки решения.

20.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕЖРЕМОНТНЫХ ПЕРИОДОВ

Ремонтные работы, проводимые в металлургических цехах, делятся на планово-предупредительные и капитальные. Время между последовательными капитальными ремонтами называется ремонтным циклом. Он характеризуется общей длительностью, количеством планово-предупредительных ремонтов, вошедших в цикл, и временем между последующими планово-предупредительными ремонтами.

Оптимизация ремонтного цикла предполагает определение x_n и $x_к$ — времени между последовательными планово-предупредительными и капитальными ремонтами. Длительность межремонтного промежутка времени выбирается исходя из s — затрат на проведение планового ремонта, у — затрат на устранение последствий аварийной остановки $p(x)$, изменение эксплуатационных затрат во времени с/т. Учитывая, что ремонтный цикл включает в себя два вида работ, для величин s, у, p, c указываем индекс n, если речь идет о планово-предупредительном ремонте, и индекс k — для капитального ремонта.

Общие затраты на весь цикл ремонтных работ:

$$I = U. J L + _{r}(X.)_{y}. + (1 - \mathbf{p(T_n)})_{sn} 1 \wedge L. \quad I \quad _{T}* \quad)_{x} n$$

$$+ \quad c_k \pm \quad + \quad p(x_k) y_k \quad + (1 - p(x_k)) s_k.$$

Распределение вероятности аварийной остановки оборудования в большинстве практических случаев описывается пуассоновским законом

$$p(x) = 1 - 1 \sim^{x} \backslash$$

Минимизация функции / по величинам x_n и x_k позволяет определить структуру ремонтного цикла. Если предположить, что комплексы планово-предупредительных и капитальных ремонтов независимы, то оптимальные значения x_n и x_k можно определить из уравнений:

$$M т. - 8_{a}) f \wedge \quad = s_n / x^2_n,$$

Из этих уравнений видно, что чем больше превышение расходов по устранению аварийной остановки оборудования над затратами на проведение планового ремонта, тем меньше продолжительность оптимального межремонтного периода.

В общем случае затраты на проведение планово-предупредительных ремонтов зависят от времени, прошедшего после последнего капитального ремонта, а вероятностей проявления крупных (капитальных) аварийных неисправностей — от периодичности проведения планово-предупредительных ремонтов:

$$s_n = si°>-tW^{1}>;$$

где m — это номер очередного планово-предупредительного ремонта после предшествующего капитального ремонта. Подставив расчетные выражения для s_n и $\backslash_k$ в экономическую оценку ремонтного цикла, получим:

$$,(0) \_ \quad , .(1) \quad \frac{^{x} n \cdot ^{x} h}{2T_n}$$

$$\_x(0)\_x(1)Ь.$$

Значения x_n и x_k, обеспечивающие минимум величины 1", могут быть определены как решение системы двух нелинейных уравнений:

$$\frac{Ж.}{\partial x_n} = o, \quad \frac{\wedge}{\partial x_к} = 0,$$

которые решают с использованием ЭВМ. Полученные величины x_n и x_k принимаются в качестве характеристик ремонтного цикла.

20.10. РАСЧЕТ ПОТРЕБНОГО ПРЕДПРИЯТИЮ КОЛИЧЕСТВА ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

При определении числа единиц обслуживающего оборудования металлургических цехов используют соотношение $n = T_x/TQ$, где Ti — необходимый фонд времени для выполнения планового объема работ либо объем работы; T_o — фонд рабочего времени единицы оборудования в плановом периоде либо его производительность. Однако подобное расчетное соотношение не учитывает возникающих на практике колебаний длительности работ и производственных помех при транспортировке материалов. В результате расчетное число необходимого предприятию количества транспортных средств оказывается заниженным. Привлечение методов теории массового обслуживания повышает обоснованность решений при выборе состава оборудования.

Проиллюстрируем это на примере задачи выбора необходимого количества составов с изложницами для сталеплавильного цеха. Будем считать, что статистическое значение длительности цикла занятости составов распределено по показательному закону, т. е. вероятность превышения длительности цикла значения t равняется

$$P(t) \quad =1\text{-}Г^{\mu},$$

где 1/и — средняя длительность цикла обработки состава с изложницами.

Последовательность моментов окончания плавок на печах сталеплавильного цеха будем считать «простейшим» статистическим потоком. Для такого потока вероятность появления k оконченных плавок за время t равняется

В теории массового обслуживания для систем с «простейшим» потоком заявок и показательным законом распределения времени обслуживания получены следующие прикладные результаты:

Ш математическое ожидание числа сталеплавильных печей, ожидающих разливки металла:

$$_{n=}£u(\kappa)^{n} \text{———} h \text{———}.$$

$$n\backslash \ \backslash uj \qquad - XInx>У$$

Ш среднее время задержки разливки металла:

$$T \ = {}_{Pi}/(nu \ - \ X);$$

Ш среднее количество свободных составов:

где n — число составов с изложницами на предприятии; po и pi — вспомогательные величины, равные:

$$Po \ = 1/ \quad o \quad 1 \quad {}_{+} \ y \ i \ l \quad \bullet$$

$$Pi = \frac{uPo}{(n-1) \qquad - X)} \text{ чи}$$

В качестве экономической оценки введем показатель годовых приведенных затрат I, включающий в себя стоимость составов, текущие расходы на содержание и обслуживание составов, увеличение расходов сталеплавильного цеха от задержки выпуска плавок:

$$I(n) = (0{,}15K + c)n + m\tau fq,$$

где K — цена состава с изложницами; τ — годовой фонд рабочего времени сталеплавильной печи; q — часовая производительность сталеплавильной печи.

Оценку $I(n)$ можно расширить, дополнительно учитывая выгорание футеровки и металла при задержке выпуска, нахождение части составов в ремонте, потери предприятия от снижения выпуска стали. Оптимальное количество необходимых составов с изложницами соответствует минимальному значению оценки $I(n)$.

20.11. ОПТИМИЗАЦИЯ ЦЕНЫ МЕТАЛЛОПРОДУКЦИИ

При возможности варьирования цены продукции ее выбор увязывают с размером предполагаемой прибыли. На основе экономического исследования выявляется связь экономического выигрыша у потенциальных потребителей с использованием предлагаемого вида металлопродукции. Соотношение цены продукции и выигрыша является определяющим для решения потребителя о приобретении продукции. Высокая цена приведет к меньшему объему спроса, низкая цена уменьшает прибыль поставщика. Если предположить линейную зависимость числа потребителей n от цены продукции Ц, то математически она имеет вид:

$$n = a_0 - a_1(\text{Ц} - \text{Ц}_0),$$

где a_0 — максимальное число потребителей, потенциально заинтересованных в предлагаемой продукции; a_1 — уменьшение числа потребителей при повышении цены на единицу; Ц_0 — минимальная цена продукции. Прибыль поставщика составит:

$$\Pi = (a_0 - a_1(\text{Ц} - \text{Ц}_0))(\text{Ц} - c) - s,$$

где s — общие расходы поставщика; c — удельные расходы поставщика на единицу продукции.

Максимуму прибыли соответствует цена, вытекающая из решения уравнения:

$$\frac{d\Pi}{d\text{Ц}} = 0, \ a_0 - 2a_1\text{Ц} + a_1\text{Ц}_0 + a_1c = 0.$$

Отсюда следует, что предпочтительная цена продукции составит:

$$Ц = \frac{1}{2}\left(Ц_0 + \frac{a_0}{a_1}\right) + \frac{1}{2} - c.$$

Практически это означает, что оптимальная цена равняется среднему между минимально (c) и максимально ($Ц_0 + a_0/a_1$) допустимыми значениями. Наличие иной функциональной зависимости n от Ц приведет к видоизменению конечного расчетного выражения.

В условиях рыночной торговли оптимизации требует не только цена продукции в целом, но и отдельные ее составляющие.

Составной частью цены товара являются затраты на маркетинг:

$$P = NЦ - Nc - f - M,$$

где P — прибыль предприятия; N — выпуск продукции; Ц — цена продукции; c — затраты на единицу продукции; f — постоянные затраты, не зависящие от объема производства и маркетинга; M — затраты на маркетинг. Сложность этого расчетного соотношения определяется наличием зависимости N от M, причем функция $N(M)$ является нелинейной:

$$P = N(M)(Ц - c) \quad f - M.$$

Максимум прибыли обеспечивает размер расходов на маркетинг, определяемый из соотношения:

$$P' = N'(M)(Ц - c) - 1 = 0$$

или

$$N'(M) = 1/(Ц - c).$$

Выделение средств на рекламу на основе деятельности фирм-аналогов ведет к просчетам и снижению спроса на предлагаемую продукцию. Современный подход к рекламированию предусматривает разработку функциональных направлений применения предлагаемой продукции и установление связи объема продажи с расходами на рекламу. Характер моделей может быть различным — от простых формул до сложных алгоритмов. Например, если ввести коэффициент нормативного отношения объема продажи к затратам на рекламу r, то расходы на рекламу, требуемые для повышения за время t продажи продукции на величину $s = \Delta NЦ$ при существующей продаже N, насыщении рынка на уровне L, равны:

$$M = \frac{\Delta NЦ + ltNЦ}{rt(1 - N/l)}.$$

Если принять зависимость объема потребления от расходов на маркетинг в форме:

$$N = N_0(1 - l^{-\alpha M}),$$

то оптимальный размер этих расходов:

$$M = \frac{1}{\alpha}\ln(\alpha NЦ - \alpha Nc).$$

Расходы на маркетинг можно оценивать, используя аналогию с ранее выпускавшимся товаром либо деятельностью других предприятий. Например, в международной деятельности имеют место следующие показатели: расходы на рекламу составляют 2–5% суммы экспорта, расходы на маркетинг осуществляют на стадии фундаментальных исследований в размере 3–6%; прикладных разработок — 7–18%, строительства предприятий и подготовки оборудования — 40–60%, организации серийного выпуска — 6–16% от общей суммы. Существенно различаются расходы на маркетинг по видам продукции и стадиям освоения рынка. Для новых областей сбыта расходы на маркетинг могут достигать 400–500% от суммы прибыли, в то время как для сложившегося уровня быта этот показатель равен 30–40%. По товарам производственного назначения, к которым относится металлопродукция, расходы на рекламу составляют 1–2% от суммы реализации.

Статистические модели прогнозирования дополняют оценкой возможных скачкообразных изменений цены вследствие развития науки и техники, энергосберегающих технологий, лимитов ресурсов, переориентации потребителей и т. п.

ГЛАВА 21

МОДЕЛИ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА

В техническом прогрессе участвуют три основных элемента: знания, энергия и материал.

Дж. Томпсон

Крестьянин .иенял зайцев на кур: крал за всяких двух зайцев по три курицы. Каждая курица снесла яйца — третью масть от числа всех куриц. Крестьянин, продавая яйца, крал за каждые 9 яиц по столько копеек, сколько каждая курица снесла яиц, и выручил 72 копейки. Сколько выло кур и сколько зайцев?

Старинная задача

21.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПРЕДПРИЯТИЯ

Производственная структура предприятия должна определяться при проектировании, реконструкции и уточняться при значительном изменении годовой производственной программы.

В машиностроении предприятия взаимосвязаны друг с другом по кооперированным поставкам продукции, следовательно, возникает проблема определения вида и объема выпускаемой каждым предприятием продукции; состава основных и вспомогательных цехов и хозяйств производственного назначения, занятых производством этой продукции; вида и объема продукции, получаемой предприятием от других предприятий отрасли.

Критерием оптимальности производственной структуры предприятия должны быть приведенные затраты, связанные с производством и транспортировкой продукции.

Проектирование (реконструкция) и совершенствование производственной структуры предприятий могут быть представлены в виде следующей экономико-математической модели.

Пусть известны следующие параметры: M_{kl} — объем потребности в k-м ($k = 1, \ldots, K$) наименовании изделий на l-м предприятии ($l = 1, \ldots, L$); N_{kh} — объем производства k-го наименования продукции на h-м ($h = 1, \ldots, H$) предприятии, на котором не осуществляется реконструкция; N_{kpr} объем производства k-го наименования продукции на p-м ($p = 1, \ldots, P$) предприятии, которое создается вновь

или на котором предусматривается реконструкция по r-му ($r = 1, \ldots, R$) варианту производственной структуры; a_{upr} — расход u-го ($u = 1, \ldots, U$) вида ресурсов (трудовых, материальных, финансовых) на p-м предприятии при r-м варианте производственной структуры; a_{uh} — расход u-го вида ресурсов на h-м ($h = 1, \ldots, H$) предприятии; b_u — объем u-го вида ресурсов, которым располагают предприятия отрасли; S_{pr} — приведенные затраты, связанные с изготовлением заданной программы изделий

$$\left(\sum N_{kpr}\right.$$

на вновь создаваемом или реконструируемом p-м предприятии при r-м варианте его производственной структуры; S'_{kpl}, S_{khl} — соответственно приведенные затраты, связанные с транспортированием единицы k-го наименования изделия с p-го и h-го предприятия на l-е объединение.

Искомыми переменными являются: x_{pr} — булева переменная, которая показывает, выбирается ли при создании или реконструкции p-го объединения r-й вариант производственной структуры; y_{kpl}, z_{khl} — соответственно объем перевозок k-го наименования изделий с p-го и h-го объединений в l-е объединение.

Оптимальный вариант производственной структуры может быть найден на основе решения следующей задачи.

Найти значения неизвестных x_{pr}, y_{kpl}, z_{khl}, при которых:

$$\sum_{p=1}^{P}\sum_{r=1}^{R_p} S_{pr}x_{pr} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\sum_{p=1}^{P} S'_{kpl}y_{kpl} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\sum_{h=1}^{H} S_{khl}z_{khl} \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{p=1}^{P} y_{kpl} + \sum\limits_{h=1}^{H} z_{khl} = M_{kl}, \quad k = \overline{1,K}, \quad l = \overline{1,L}; \\ \sum\limits_{l=1}^{L} z_{khl} = N_{kH}, \quad k = \overline{1,K}, \quad h = \overline{1,H}; \\ \sum\limits_{l=1}^{L} y_{kpl} \le \sum\limits_{r=1}^{R_p} N_{kpr}x_{pr} = M_{kl}, \quad k = \overline{1,K}, \quad p = \overline{1,P}; \\ \sum\limits_{p=1}^{P}\sum\limits_{r=1}^{R_p} a_{upr}x_{pr} \le b_u - \sum\limits_{h=1}^{H} a_{uh}, \quad u = \overline{1,U}; \\ \sum\limits_{r=1}^{R_p} x_{pr} \le 1; \end{cases}$$

$$x_{pr} = \begin{cases} 0, & \text{если все } y_{kpl} = 0; \\ 1, & \text{если хотя бы одно } y_{kpl} > 0; \end{cases}$$

$$y_{hpl},\ z_{khl} \ge 0.$$

Целевой функцией являются приведенные затраты, связанные с созданием или реконструкцией объединений отрасли и с перевозками между объединениями отрасли кооперированной продукции. Первое слагаемое характеризует затраты на создание или реконструкцию объединений, второе — на перевозки кооперированной продукции между вновь создаваемыми или реконструируемыми объединениями отрасли, третье — на перевозки продукции между существующими объединениями и остальными объединениями.

Выполнение ограничений обеспечивает удовлетворение потребности каждого объединения в необходимой продукции; показывает, что вся производимая продукция существующими или реконструируемыми и вновь создаваемыми объединениями потребляется объединениями отрасли; определяет возможное потребление ресурсов вновь создаваемыми объединениями; показывает, что из множества вариантов создания или реконструкции каждого объединения может быть выбрано не больше одного варианта.

Сформулированная задача — многоиндексная, частично целочисленная, транспортно-производственная.

Возможен другой подход к определению производственной структуры предприятия, основанный на том, что номенклатура и объем производимой продукции объединением, а также номенклатура и объем поставляемой объединению и отправляемой им продукции установлен заранее. В этом случае возникают задачи определения состава цехов и хозяйств производственного назначения; их специализации и кооперирования, обеспечивающих минимальные приведенные затраты, которые связаны с производством продукции и кооперированием производственных подразделений в рамках предприятия. Этот подход к определению производственной структуры предприятия существенно проще, но для их осуществления требуются разработки многих вариантов структур и выбор наилучшего из них.

21.2. ОСВОЕНИЕ НОВОЙ ТЕХНИКИ

Для процесса освоения новой техники требуется целенаправленное планирование. Основными требованиями к этому процессу следует считать освоение производства изделий высшей категории качества с обеспечением плановой себестоимости, соответствующей уровню серийного их выпуска; оптимальные сроки освоения; минимальные затраты трудовых, материальных и финансовых ресурсов на подготовку производства.

Величина затрат ресурсов, необходимых на проведение подготовительных работ, определяется качественным уровнем их проведения и объемом соответствующих работ и мероприятий. В свою очередь, качество и законченность работ обусловливают сроки экономического освоения x, т. е. время, за которое достигается запланированный размер себестоимости единицы продукции C. Действительно, чем выше качество исследовательской, конструкторской и технологической проработки и соответственно больше затраты на их проведение, тем выше темпы снижения себестоимости осваиваемых изделий, меньше размеры потерь П, связанных с освоением. С другой стороны, неоправданное завышение затрат на подготовку может привести к перерасходу средств, так как они не окупятся в нормативные сроки освоения изделия в производстве. Следовательно, существует оптимальный вариант, соответствующей минимальным суммарным на весь срок создания и освоения нового изделия.

Общая сумма затрат на создание и освоение нового изделия $S(x)$ определяется по формуле:

$$S(x) = З(x) + \int_0^x N(t)\Delta C(t)dt + \int_0^x З'(t)dt + \int_0^x [N_c - Э(t)]dt,$$

где $З(x)$ — затраты на проведение работ по подготовке производства, равный x; $N(t)$ — функция, характеризующая изменение программы по годам серийного выпуска; $\Delta C(t)$ — функция потерь на текущих затратах производства $З'(t)$ — функция затрат на доработку в процессе серийного выпуска; N_c — программа серийного выпуска; $Э(t)$ — народнохозяйственный эффект от использования нового изделия.

Так как элементы затрат, входящие в целевую функцию, являются равномерными, их приводят к одному моменту времени. С учетом приведения целевая функция имеет вид:

$$S(x) = \int_{-T}^{0} З(x)f(t)a_t dt + \int_0^x N(t)\Delta C(t)a_t dt +$$

$$+ \int_0^{x-T} З'(t)a_t dt + \int_0^x [N_c - N(t)]Э(t)a_t dt,$$

где T — срок выполнения работ по подготовке производства; x — срок экономического освоения; $a_t = (1+E)^{-t}$ — коэффициент приведения затрат к одному времени, причем E — норматив приведения; $f(t)$ — весовая функция, показывающая распределение затрат во времени.

Для определения оптимального срока освоения данного изделия вид функций, входящих в формулу затрат, конкретизируется.

Нахождение экстремума функции затрат позволяет определить оптимальный срок экономического освоения нового изделия; сумму затрат на выполнение работ по подготовке производства; сумму повышенных затрат на производство, которые непосредственно связаны с процессом освоения нового изделия, и, следовательно, позволяет найти сумму средств, необходимых для их покрытия.

21.3. ВЫБОР ИННОВАЦИИ

Одна из часто встречающихся ситуаций заключается в необходимости принятия решения о прекращении предварительного исследования и начале практических действий. Поиск дополнительной информации, детализация научных и опытных исследований, ожидание прогресса в обеспечивающих областях техники требуют дополнительных затрат и задерживают отдачу от уже вложенных средств. Однако переход к практическим действиям сопровождается риском реализации не самого лучшего варианта. Всегда сохраняется вероятность того, что продолжение исследований обеспечит появление более эффективного варианта.

Введем следующие обозначения: x — прибыль от реализации инновации; $f(x)$ — плотность распределения вероятностей значений x; X — прибыль, обеспечиваемая лучшей из разработанных инноваций; c — затраты на разработку очередной инновации.

В начальный момент X равняется нулю, а по мере проведения научно-исследовательских и поисковых работ значение прибыли изменяется. На каждом этапе проведения работ возникает проблема выбора: прекратить поиск новых мероприятий научно-технического прогресса и принять лучшее из имеющихся либо продолжать исследования. Вероятность появления разработки, обеспечивающей более высокую прибыль, равна:

$$P = \int_x^\infty f(x)dx.$$

Среднее число разработок, которые необходимо провести для отыскания лучшей, определяется выражением $1/p$. Ожидаемая прибыль от появления предпочтительной разработки составит:

$$m = \int_x^\infty x f(x)dx.$$

Используя выражение для вычисления P и m, можно сформулировать правило прекращения поиска мероприятий научно-технического прогресса:

$$m - X \le Rc / P.$$

Ожидаемый выигрыш от продолжения поиска меньше суммы необходимых дополнительных затрат с учетом R — ставки дисконтирования единовременных затрат и ежегодного выигрыша.

21.4. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ МОЩНОСТЬ ЛИТЕЙНЫХ ЦЕХОВ

Оптимальная производственная мощность литейных цехов должна определяться как максимально возможный выпуск отливок по заданной номенклатуре изделий на имеющемся оборудовании и площадях.

Определяющим видом оборудования в литейных цехах, от которого зависит количество выпускаемого литья, является формовочное. Поэтому необходимо максимизировать загрузку этого вида оборудования, т. е. найти максимум целевой функции

$$\sum_{j=1}^{p} T_j x_j$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p} \text{Т}_{js} x_j \le \Phi_s, \quad s = \overline{1,\ r}; \\ \sum_{i=1}^{p} g_{js} x_j \le \Phi'_s g'_s, \ s = \overline{r+1,\ r'}, \\ \sum_{i=1}^{p} f_j x_j \le kF\text{Д}_p, \\ 0 \le x_j \le N_j,\ j = \overline{1,\ p}, \end{cases}$$

где p — число наименований изделий, выпускаемых заводом; x_j — искомое число изделий j-го наименования; Т_j и Т_{js} — трудоемкость изготовления комплекта отливок на одно изделие j-го наименования соответственно на формовочных машинах и s-й группе оборудования; Φ_s — эффективный фонд времени работы s-й группы оборудования; r — число видов оборудования (включая формовочное и исключая плавильное); g_{js} — масса жидкого металла комплекта отливок на j-е изделие, плавка которого ведется на s-й группе плавильного оборудования; $\Phi'_{зs}$ — эффективный фонд времени работы s-й группы плавильного оборудования; g'_s — производительность единицы s-й группы плавильного оборудования; r' — число групп плавильного оборудования; f_j — площадь, занимаемая комплектом отливок j-х изделий для формовки и заливки; F — имеющаяся площадь формовочно-заливочного отделения цеха; k — число смен в сутки формовки согласно режиму работы литейного цеха; N_j — заданное число изделий, обязательное для выпуска.

Если трудоемкость формовки отливок неизвестна, а масса известна, то целевая функция примет вид:

$$\sum_{j=1}^{p} g_j x_j \to \max .$$

21.5. СОСТАВЛЕНИЕ КАЛЕНДАРНЫХ ГРАФИКОВ

Оперативно-календарное планирование основывается на определенных нормативах, которые согласовывают календарные планы и работу цехов, участков и рабочих мест.

Такие нормативы известны как календарно-плановые. К ним относятся размеры и ритмы партий деталей, узлов, изделий; длительность производственного цикла обработки партий; опережение запуска–выпуска деталей; заделы и нормативы незавершенного производства.

Серийное производство характеризуется строгой повторяемостью обработки партий деталей, соблюдением ритма работы:

$$R = n \cdot r.$$

Взаимосвязь размера партии n и ритма партии R:

$$n = R/r = R \cdot N_в/Ф_э = R \cdot N_{дн} \text{ и } R = n/N_{дн},$$

где $N_{дн}$ — среднедневной выпуск; r — ритм одной детали; $N_в$ — программа выпуска; $Ф_э$ — эффективный фонд времени. Поэтому, определив размер партии, можно рассчитать ритм партии и наоборот.

Размер партии — количество деталей одного наименования, непрерывно обрабатываемых на одном (каждом) рабочем месте без переналадки.

Чем больше размер партии, тем выше производительность, меньше время переналадки оборудования, но тем больше затраты на хранение. Размер партии будет оптимальным, если суммарные затраты будут минимальны.

После установления размеров партий рассчитывают длительность производственных циклов:

$$T_{ц} = \frac{}{К_{см}} {}_{см} \cdot T_{см} \quad \sum_{j=1} q_{ij} \cdot P_{в_{ij}}$$

где δ — коэффициент параллельности (одновременности) обработки партии на операциях (0,3 — параллельная обработка; 0,6 — параллельно-последовательная; 0,9 — последовательная). $К_{см}$ — коэффициент сменности; $T_{см}$ — продолжительность смены; q_{ij} — количество рабочих мест-дублеров; $К_{оп_i}$ — число операций обработки деталей i-го наименования; $t_{шк_{ij}}$ — норма штучно-калькуляционного времени; $P_{в_{ij}}$ — процент выполнения норм по ij-й детале-операции; $t_{мо}$ — время межоперационного пролеживания деталей на рабочем месте в ожидании обработки; $t_{е_i}$ — время естественных процессов.

Под **опережением запуска** $О_{зi}$ понимают время (в днях) от момента запуска партии деталей в обработку в данном цехе до момента выпуска со сборки всех изделий, для которых были запущены эти детали.

Опережение выпуска меньше опережения запуска на величину длительности цикла обработки партии в данном цехе:

$$О = О - T$$

Нормативы n, $T_ц$, $О_{з(в)}$ регламентируют ход производственного процесса и используются в построении планов-графиков запуска–выпуска партий.

Дата выпуска партий планируется через ритм:

$$D_{вik} = D_{вi1} + (k-1)R_{вi},$$

где k — число партий, планируемых к выпуску за период.

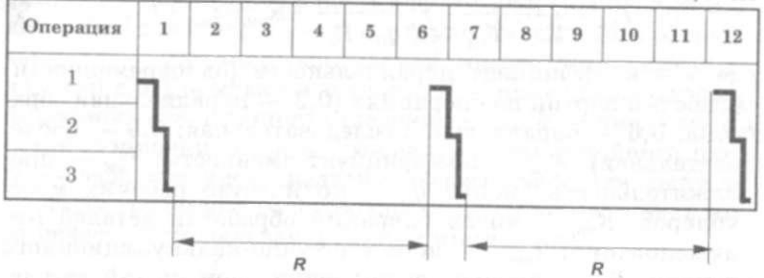
Пример 1. Цеху установлена месячная программа термообработки шестерен $N_в = 500$ шт. Цех работает в три смены при непрерывной рабочей неделе ($Д_р = 30$ дней, $T_{см} = 8$ ч, $К_{см} = 3$). Потери времени на ремонт оборудования $P_р = 5\%$. Межоперационное время $t_{мо} = 1$ ч. Процент выполнения норм $P_в = 120\%$. Техпроцесс включает три операции ($К_{оп} = 3$). Трудоемкость по операциям: $t_1 = 3$, $t_2 = 2$ и $t_3 = 1$ мин/шт. Количество единиц оборудования на каждой операции равно одному. Размер партии 100 шт. Размер садки на каждой операции 50 шт. ($k_c = 2$).

Построить календарный график загрузки оборудования (см. табл. 150).

Р е ш е н и е. Ритм детали:

$$r = \frac{Ф_э}{N_в} = \frac{30 \cdot 3 \cdot 8 \cdot (1 - 0{,}05)}{500} = \frac{684}{500} = 1{,}368 \text{ ч / шт.}$$

Таблица 150



Ритм партии:

$$R = r \cdot n = 1,368 \cdot 100 = 136,4 \text{ ч/партия}$$

$$\text{или } 136,8/24 = 5,7 \text{ дней/партия.}$$

Количество партий, подлежащих запуску и выпуску за месяц:

$$k_п = \frac{N_в}{n} = \frac{500}{100} = 5 \text{ партий.}$$

Длительность цикла обработки партии:

$$T_ц = \frac{n \cdot k_c}{К_{см} \cdot T_{см} \cdot P_в} \cdot \sum_{j=1}^{3} \frac{t_j}{q_j} + (К_{оп} - 1) \cdot t_{мо} + t_e,$$

$$T_ц = \frac{100 \cdot 2}{3 \cdot 8 \cdot 1,2} \cdot (3/1 + 2/1 + 1/1) + (3 - 1) \cdot 1 = 12 \text{ ч}$$

или 0,5 дня.

Совокупный производственный цикл:

$$T_ц(c) = T_ц + (k_п - 1) \cdot R = 0,5 + 4 \cdot 5,7 = 23,3 \text{ дня.}$$

Время обработки партии по операциям:

$$T_1 = k_c \cdot t_1/q_1 = 2 \cdot 3/24 = 0,25 \text{ дня;}$$
$$T_2 = 2 \cdot 1/24 = 0,16 \text{ дня;}$$
$$T_3 = 2 \cdot 1/24 = 0,08 \text{ дня.}$$

Даты запуска–выпуска партий:

$$D_{з1} = 0; \; D_{в1} = D_{з1} + T_ц = 0 + 0,5 = 0,5 \text{ дня.}$$
$$D_{з2} = D_{з1} + R = 0 + 5,7 = 5,7 \text{ дня.}$$
$$D_{в2} = D_{в1} + R = D_{з2} + T_ц = 0,5 + 5,7 = 6,2 \text{ дня.}$$
$$D_{з3} = D_{з1} + (k_п - 1) \cdot R = 0 + 2 \cdot 5,7 = 11,4 \text{ дня.}$$
$$D_{в2} = D_{в1} + 2R = 0,5 + 11,4 = 11,9 \text{ дня.}$$
$$D_{з4} = D_{з1} + 3R = 17,1;$$
$$D_{в4} = D_{в1} + 3R = 0,5 + 17,1 = 17,6 \text{ дня.}$$
$$D_{з5} = 22,8; \; D_{в5} = D_{в1} + 4R = 0,5 + 22,8 = 23,3 \text{ дня.}$$

21.6. СОСТАВЛЕНИЕ СМЕННО-СУТОЧНЫХ ЗАДАНИЙ

При составлении сменно-суточных заданий необходимо исходить из наличия основных рабочих на соответствующую смену, имеющегося оборудования по основным стадиям литейного процесса, наличия шихтовых материалов, моделей и опок, другой технологической оснастки. В сменные задания в первую очередь необходимо включать отливки, имеющие наибольшее минимально допустимое отставание по их запуску (т. е. в порядке убывания этого отставания).

Экономико-математическая модель составления оптимальных сменно-суточных заданий может быть представлена в следующем виде.

Необходимо максимизировать целевую функцию

$$\sum_{j=1}^{p} (O_{j\min} - O_{jф}) t_j w_j,$$

при ограничениях:

- по оборудованию (за исключением плавильного)

$$\sum_{j=1}^{p} t_{js} x_{js} w_j \le k_s T_s q_s, \quad s = \overline{1,\ r_1};$$

- по плавильному оборудованию

$$\sum_{j=1}^{p} g_j x'_{js} w_j \le k g'_s q_s, \quad s = \overline{r_1 + 1,\ r_2};$$

- по числу основных рабочих

$$\sum_{j=1}^{p} t_{js} x_{js} w_j \le L_s T_s, \quad s = \overline{r_2 + 1,\ r_3};$$

- по шихтовым материалам

$$\sum_{j=1}^{p} g'_{ijs} x_{js} w_j \le Q_s, \quad s = \overline{r_3 + 1,\ r_4};$$

$$\begin{cases} 1 \text{ — если } j\text{-я отливка включена в сменное задание,} \\ 0 \quad \text{в противном случае:} \end{cases}$$

$$n_j > x_{js} > 0, \quad j = \overline{1, p}; \quad s = \overline{1, r_1}, \quad s = \overline{r_2 + 1, r_3}$$

В этих формулах p — число наименований отливок, подлежащих изготовлению в течение месяца; r_1-r_4 — число видов групп оборудования, плавильных агрегатов, профессий основных рабочих и видов шихтовых материалов соответственно; $O_{j\min}$ и $O_{jф}$ — опережение запуска минимально допустимое и фактическое по j-му наименованию отливки соответственно; t_j и t_{js} — трудоемкость изготовления отливки j на формовочном оборудовании (или вручную) и на s-й группе оборудования соответственно; x_{js} — число j-х отливок, включенных в сменные задания на соответствующие сутки по s-й группе оборудования или основных рабочих; k_s и T_s — число смен и продолжительность одной смены работы s-й группы оборудования или рабочих; g_j — масса одной j-й отливки; g_{js} — масса s-го компонента шихты на одну j-ю отливку; x'_{js} — число j-х отливок, подлежащих формовке за сутки; g_s — число единиц оборудования s-й группы; g'_s — производительность s-й группы плавильного оборудования; L_s — число основных рабочих s-й группы; Q_s — масса s-го вида шихтовых материалов, имеющихся на складе или в цехе.

Целевая функция означает, что необходимо максимизировать отставание запуска отливок, взвешенное по трудоемкости формовки. При одинаковом отставании в первую очередь должны запускаться отливки с большей трудоемкостью формовки, а при одинаковой трудоемкости — отливки с наибольшим отставанием. Если не делать взвешивание отставания по трудоемкости, то в сменные задания включались бы отливки с малой трудоемкостью, а запуск отливок с большей трудоемкостью отодвигался бы на более поздние сроки.

Последнее ограничение означает, что за сутки не может быть выпущено отливок больше, чем размер партии. Если нельзя дробить формовку на партии отливок между формовщиками одной или разных смен, то для них $L_s = 1$. Если за соответствующие сутки не будет закончена формовка всей партии, то на следующие сутки

$$x'_{js} = n_j - \sum_{l=1}^{k} x_{jls},$$

где k — число предыдущих суток, в течение которых производилась формовка j-х отливок.

21.7. ВЫБОР ОЧЕРЕДНОСТИ ЗАПУСКА ПАРТИЙ В ОБРАБОТКУ

Партии предметов различных наименований обрабатываются на рабочих местах в различной последовательности. От принятой последовательности зависят время простоев оборудования и рабочих, длительность производственного цикла обработки партии предметов данного и всех наименований, размера незавершенного производства и другие технико-экономические показатели.

При выборе очередности запуска партий в обработку могут использоваться: *элементарные приоритеты* (первым в обработку, если раньше срок готовности или больше цена; в конец очереди, если больше запас времени и т. п.) и *экономические оценки* (суммарное время окончания обработки всех партий, затраты на хранение запасов, штраф за нарушение сроков).

В общем виде **задача расписания** формулируется следующим образом. Имеется m станков и n деталей. Маршрут движения партий деталей по рабочим местам одинаков, перемещение их по операциям последовательное. Известно время обработки j-й детали на i-м станке (t_{ij}) и время переналадки τ_{ij} при переходе с i-й детали на j-ю. Требуется установить оптимальную очередность работ так, чтобы суммарное время выполнения работ было минимальным.

21.7.1. ЗАПУСК ПАРТИЙ НА ОДНОМ СТАНКЕ

Пример 1. Установить порядок запуска партий в обработку на одном рабочем месте так, чтобы минимизировать суммарное время пролеживания деталей, если длительность обработки партий деталей: А — 10 мин, Б — 7 мин, В — 9 мин, Г — 8 мин. Построить график загрузки рабочего места. Как изменится порядок запуска, если затраты на хранение партии деталей, соответственно, равны: 2, 1, 3, 2 руб./мин?

Решение. Условие минимизации суммарного времени пролеживания можно записать в виде:

$$\sum_i \tau_i \to \min,$$

$$t_i^{(1)} \le t_i^{(2)} \le \ldots \le t_i^{(n)},$$

где τ_i и t_i — время пролеживания и время обработки i-й партии.

Решение задачи при графике обработки деталей по возрастанию их времени обработки: $\tau_1 = 0$; $\tau_2 = 7$; $\tau_3 = 7 + 8 = 15$; $\tau_4 = 7 + 8 + 9 = 24$; суммарное время пролеживания $= 34$ мин. График загрузки рабочего места (рис. 59):

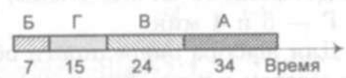


Рис. 59

Постановку задачи при минимизации суммарных затрат на хранение можно записать в виде:

$$\sum_i \alpha_i \tau_i \to \min,$$

$$\left(\frac{t_i}{\alpha_i}\right)^{(1)} \le \ldots \le \left(\frac{t_i}{\alpha_i}\right)^{(n)},$$

где α_i — затраты на хранение i-й партии.

Оптимальное решение задачи при очередности деталей по возрастанию показателя t/α: $9/3 = 3$; $8/2 = 4$; $10/2 = 5$; $7/1 = 7$; $\alpha_1\tau_1 = 3 \cdot 0 = 0$; $\alpha_2\tau_2 = 2 \cdot 9 = 18$; $\alpha_3\tau_3 = 2(9 + 8) = 34$; $\alpha_4\tau_4 = 1(9 + 8 + 10) = 27$. Суммарные затраты на хранение 79 руб. График загрузки рабочего места (рис. 60):

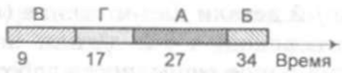


Рис. 60

21.7.2. ЗАПУСК ПАРТИЙ НА ДВУХ СТАНКАХ

Пусть две партии деталей обрабатываются на двух рабочих местах (сначала на первом, потом на втором). Время обработки деталей А — 2 и 4 мин; деталей Б — 3 и 1 мин. Посмотрим, как порядок запуска влияет на суммарное время обработки партий деталей (рис. 61).

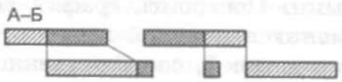


Рис. 61

Если принять порядок обработки А–Б, то суммарное время обработки составит $2 + 4 + 1 = 7$. Если порядок обработки Б–А, то суммарное время обработки $3 + 2 + 4 = 9$.

Этот пример показывает, что минимизация общего времени обработки обеспечивается, если на первом месте идет деталь с меньшим временем обработки на первом станке, а завершается график деталью с меньшим временем обработки на втором станке.

Пример 2. Установить порядок запуска партий в обработку на участке из двух рабочих мест, так чтобы минимизировать общее время занятости участка. Длительность обработки партий деталей: А — 3 и 7 мин; Б — 5 и 2 мин; В — 1 и 8 мин; Г — 5 и 4 мин.

Р е ш е н и е. Для выбора очередности обработки партий на двух рабочих местах используется **алгоритм Джонсона**. В матрице времен обработки отыскивается минимальный элемент. Если меньшее t_{i1} (i-я деталь на первом рабочем месте), то i-ю партию записывают в график на первое место; если меньшее t_{i2} (i-я деталь на втором рабочем месте), то i-ю партию записывают в график на последнее место. Строка i из дальнейшего рассмотрения исключается. С оставшимся набором деталей процедура повторяется до тех пор, пока не будет сформирован весь график (рис. 62).

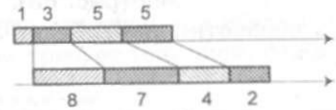


Рис. 62

Если встречаются равные элементы одной строки или элементы одного столбца, то порядок их рассмотрения произволен (получается несколько оптимальных последовательностей) (табл. 151).

Таблица 151

А	3	7
Б	5	2
В	1	8
Г	5	4

3	7
5	2
5	4

3	7
5	4

5	4

В — в начало; Б — в конец; А — в начало; Г — в конец. Оптимальный порядок запуска: В–А–Г–Б; $T_{\text{сц}} = 22$ мин.

21.7.3. ЗАПУСК ПАРТИЙ НА ТРЕХ И БОЛЕЕ СТАНКАХ

Для выбора очередности обработки партий на трех и более рабочих местах используется **алгоритм Петрова–Соколицына.**

Все множество вариантов запуска партий сводится к четырем последовательностям запуска, получаемых:

1) в порядке убывания $\sum_{j=2}^{K} t_{ij}$;

2) в порядке возрастания $\sum_{j=1}^{K-1} t_{ij}$;

3) в порядке убывания $\sum_{j=2}^{K} t_{ij} - \sum_{j=1}^{K-1} t_{ij}$;

4) в порядке убывания $\left|\sum_{j=2}^{K} t_{ij} - \sum_{j=1}^{K-1} t_{ij}\right|$.

Из четырех предварительных вариантов выбирается оптимальный, соответствующий минимальному общему времени.

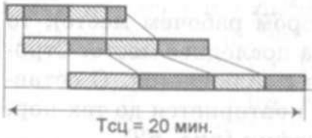


Рис. 63

Пример 3. Установить порядок запуска партий в обработку на трех рабочих местах так, чтобы минимизировать суммарное время обработки партий деталей (рис. 63).

Длительность обработки партий деталей (мин) задана (табл. 152).

Решение

Таблица 152

	$1_{рм}$	$2_{рм}$	$3_{рм}$	T_1	T_2	T_3	T_4
А	3	2	5	2 + 5 = 7	3 + 2 = 5	7–5 = 2	2
Б	1	4	2	6	5	1	1
В	1	3	5	8	4	4	4
Г	2	3	4	7	5	2	2
				В–А–Г–Б В–Г–А–Б	В–А–Г–Б А–Б–Г–В	В–А–Г–Б	В–А–Г–Б

Таблица 153

	$1_{рм}$	$2_{рм}$	$3_{рм}$
В	1	3	5
А	3	2	5
Г	2	3	4
Б	1	4	2

1	1 + 3 = 4	4 + 5 = 9
1 + 3 = 4	4 + 2 = 6	9 + 5 = 14
4 + 2 = 6	6 + 3 = 9	14 + 4 = 18
6 + 1 = 7	9 + 4 = 13	18 + 2 = 20

Суммарную длительность обработки всех партий можно найти из аналитической модели, известной как **цепной или матричный метод расчета суммарного времени обработки.** Строки исходной матрицы расставляются в порядке запуска партий в обработку (табл. 153), затем строится матрица оценок (той же размерности, что и исходная) по правилам:

$$\tau_{11} = t_{11}$$

$$\tau_{1j} = \tau_{11} + t_{1j};\ j = 2 \ldots K_{\text{раб.мест}}$$

(первая строка со второго элемента)

$$\tau_{i1} = \tau_{i-11} + t_{i1};\ i = 2 \ldots K_{\text{партий}}$$

(первый столбец со второго элемента)

$$\tau_{ij} = \max\{\tau_{i-1j};\ t_{ij-1}\}$$

(все остальные элементы).

$T_{сц}$ (суммарное время обработки) — это последний элемент полученной матрицы.

Задание 1. Пусть имеется два станка и пять деталей, каждая из которых требует токарной и фрезерной обработки. Нормы времени обработки деталей заданы в таблице 154.

В каком порядке нужно обрабатывать детали, чтобы общее время занятости участка было минимальным?

Решение. Б-Д-А-Г-В.

Задание 2. Пусть имеется три станка и пять деталей, каждая из которых требует токарной, фрезерной и шлифовальной обработки. Нормы времени обработки деталей заданы в таблице 155.

Таблица 154

Деталь	Норма времени	
	Станок 1	Станок 2
А	11	5
Б	7	14
В	5	3
Г	10	3
д	13	8

Таблица 155

Деталь	Норма времени		
	Станок 1	Станок 2	Станок 3
А	4	3	11
Б	5	2	8
В	6	4	7
Г	8	1	9
Д	7	2	5

В каком порядке нужно обрабатывать детали, чтобы общее время занятости участка было минимальным?

21 8
ОПТИМАЛЬНАЯ ПЛАНИРОВКА ОБОРУДОВАНИЯ

При планировке рабочего места (оборудования) необходимо стремиться к обеспечению наибольшей прямоточности и кратчайших маршрутов движения предметов труда, рационального использования производственной площади.

Расстановка оборудования влияет на размеры транспортных расходов, себестоимость продукции, инвестиций, степень прямоточности, непрерывности и ритмичности производства, уровень организации труда.

В общем виде задача оптимальной планировки оборудования формулируется следующим образом.

Пусть известны *N,* — программа выпуска предметов г-го наименования в планируемом периоде; g_i — масса предмета £-го наименования; варианты размещения оборудования по площадкам. Предмет каждого наименования обрабатывается по рабочим местам в последовательности, определенной заранее разработанной маршрутной технологией. Все предметы начинают свое движение из кладовой «К» ив эту же

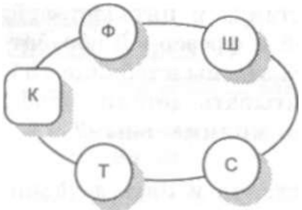


Рис. 64

кладовую возвращаются после завершения обработки. При этом для изготовления предмета может потребоваться несколько витков (оборотов) транспортного конвейера.

На рисунке 64 показана планировка поточной линии (цеха с технологическими участками).

Если на участке (поточной линии) обрабатываются предмет А с маршрутом К - Ф - Ш - С - Т - К и предмет Б с маршрутом К - С - Т - Ф - Ш - К, то для полной обработки предмета А потребуется один оборот, предмета Б — два оборота конвейера.

Поэтому в зависимости от расположения рабочего места меняется общий грузооборот линии. Таким образом, минимизируемая функция имеет вид:

m

№ = *L£N* •*,•*(«),

i=l

где L — полная длина тягового элемента конвейера, м; — число витков (оборотов) конвейера, необходимых для полного изготовления i-ro наименования предмета при я-м варианте планировки { *x(n)* = 1, 2, ...}.

Эта задача может быть решена по следующему алгоритму.

Шаг 1 (предварительный). Составляют матрицу взаимосвязи пары рабочих мест ***G = {g},*** элементы которой измеряются общей массой продукции, перевозимой непосредственно от с-го к ***d-му*** рабочему месту.

m

i=i

где *(p* показывает дискретность связи между с-м и d-м рабочими местами при обработке предмета i-ro наименования:

1 — если есть связь между с-м

= \ " ***d-м*** рабочими местами;

0 — если нет связи.

Решение начинается с предположения, что рабочее место ***С*** — кладовая («К») установлено. На каждом шаге определяется местоположение только одного рабочего места.

Шаг 2. Определяют рабочее место, устанавливаемое до или после рабочего места ***С\.***

2.1. Рассчитывают разность «сил связи» установленного рабочего места c_1 со всеми неустановленными рабочими местами:

$$\Delta g_{c1d} = g_{c1d} - g_{dc1} (d \neq c_1),$$

т. е. определяют, насколько больше (меньше) грузооборот между рабочими местами

$$c_1 \to d(\Delta g_{c1d} > 0) \text{ и } d \to c_1(\Delta g_{c1d} < 0).$$

2.2. Определяют наибольший грузооборот между рассматриваемыми рабочими местами:

S4i = $$g_{c_1d}\Big| = \begin{cases} > 0, \ d_1 \text{ ставится (после) справа от } c_1; \\ < 0, \ d_1 \text{ ставится слева от } c_1. \end{cases}$$

Выбранное (установленное) d_1 рабочее место переобозначается через c_2.

Шаг 3. Определяют рабочее место, устанавливаемое до или после рабочего места c_2.

3.1. Рассчитывают разность «сил связи» установленного рабочего места c_1 со всеми неустановленными рабочими местами:

$$\Delta g_{c2d} = \Delta g_{c1d} + (g_{c2d} - g_{dc2}) \ (d \neq c_1, \ d \neq c_2),$$

т. е. определяют больший грузооборот между рабочими местами:

$$(c_1, c_2) \to d \text{ или } d \to (c_1, c_2).$$

3.2. Определяют наибольший грузооборот:

$$\Delta g_{c_2d_2} = \max_{\substack{d \neq c_1 \\ d \neq c_2}} \left| \Delta g_{c_2d} \right| = \begin{cases} > 0, d_2 \text{ ставится после } c_2; \\ < 0, d_2 \text{ ставится перед } c_2. \end{cases}$$

Установленное d_2 рабочее место переобозначается через c_3 и т. д. повторяется шаг 3. Общее число шагов с получением окончательного варианта планировки $(q - 2)$, где q — число рабочих мест.

Пример 2. Исходные параметры планировки заданы в таблице 156.

Таблица 156

i	*Nigi*	Очередность обработки по четырем рабочим местам					
		К(1)	Т(2)	Ф(3)	С(4)	Ш(5)	К(1)
1	20	1	5	2	4	3	6
2	4	1	–	3	2	4	5
3	4	1	2	–	4	3	5
4	8	1	2	3	4	5	6

Таблица 157

Итерации	Установленные рабочие места	Неустановленные рабочие места			
		Т(2)	Ф(3)	С(4)	Ш(5)
1	К(1)	$\Delta g_{12} = g_{12} - g_{21} = 12 - 20 = -8$	$\Delta g_{13} = g_{13} - g_{31} = 20 - 0 = +20$	$\Delta g_{14} = g_{14} - g_{41} = 4 - 4 = 0$	$\Delta g_{15} = g_{15} - g_{51} = 0 - 12 = -12$
2	К(1) → Ф(3)	$\Delta g_{32} = \Delta g_{12} + (g_{32} - g_{23}) = -8 + (0 - 8) = -16$	–	$\Delta g_{34} = \Delta g_{14} + (g_{34} - g_{43}) = 0 + 8 - 4 = +4$	$\Delta g_{35} = \Delta g_{15} + (g_{35} - g_{53}) = -12 + 24 - 0 = +12$
3	T(2) → К(1) → Ф(3)	–	–	$\Delta g_{24} = \Delta g_{34} + (g_{24} - g_{42}) = 4 + 0 - 20 = -16$	$\Delta g_{25} = \Delta g_{35} + (g_{25} - g_{52}) = 12 + 4 - 0 = +16$

Решение. На основе исходных параметров составляют матрицу силы взаимосвязи рабочих мест:

$$G = \begin{vmatrix} \infty & 12 & 20 & 4 & \infty \\ 20 & \infty & 2 & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & 24 \\ 4 & 20 & 4 & \infty & 8 \\ 12 & \infty & \infty & 24 & \infty \end{vmatrix}$$

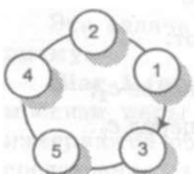


Рис. 65

Затем в соответствии с алгоритмом закрепляют рабочие места по площадкам.

Сила взаимосвязи установленных рабочих мест с неустановленными представлена в таблице 157.

Окончательно приближенно оптимальная планировка (рис. 65):

$$К(1) \to Ф(3) \to Ш(5) \to С(4) \to T(2) \to К(1);$$

$$x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 2;\ x_4 = 3;$$

$$f(\pi) = L_k\,(20 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 3) = = 84 \cdot L_k.$$

СЛОВАРЬ

Агрегирование — преобразование модели в модель с меньшим числом переменных или ограничений — агрегированную модель, дающую приближенное по сравнению с исходной описание изучаемого объекта.

Алгоритм — формализованная последовательность действий по решению задачи.

Алгоритм кратчайшего пути позволяет найти кратчайший путь в сети.

Алгоритм максимального потока — позволяет определить путь с максимальной пропускной способностью.

Аппроксимация — приближенное выражение математических объектов через более простые объекты, например, сведение задачи выпуклого программирования к кусочно-линейной задаче путем аппроксимации целевой функции и ограничений кусочно-линейными функциями.

Базисное решение — допустимое решение задачи линейного программирования, находящееся в вершине области допустимых решений.

Балансовый метод — метод взаимоувязки потребностей и ресурсов.

Блочное программирование — методы решения задач оптимизации, которые можно представить как систему взаимосвязанных подзадач-блоков.

Вектор правых частей ограничений отражает запасы ресурсов.

Венгерский метод — метод решения комбинаторных задач.

Вероятность — численная мера возможности события.

Выпуклое программирование — методы решения задач на определение минимума выпуклой или максимума вогнутой функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве.

Граничные условия — предельно допустимые значения переменных.

Двойственные оценки определяют дефицитность используемых ресурсов и показывают, насколько возрастает максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества соответствующего ресурса на единицу.

Дерево — многоуровневая иерархическая система, в которой все вершины распределены по нескольким уровням.

Детерминированные величины — исходные данные, заданные определенными величинами.

Динамическое программирование — методы решения задач, в которых процесс нахождения решения является многоэтапным.

Дисперсия характеризует разброс значений случайной величины.

Дисциплина очереди описывает порядок обслуживания требований в системе.

Дополнительные переменные — разность между располагаемым ресурсом и необходимым, т. е. резервы каждого вида ресурсов.

Допустимый план — решение, удовлетворяющее системе ограничений, но не обязательно оптимальное.

Достоверное событие — событие, которое непременно должно произойти.

Дробно-линейное программирование — методы решения задач, в которых целевая функция — отношение двух линейных функций, а функции, определяющие область возможных изменений переменных, также линейны.

Задача выбора вариантов — задача, показывающая, как выбрать наилучший вариант из имеющихся (выбор жениха в задаче о разборчивой невесте).

Задача о диете заключается в определении рациона, удовлетворяющего потребностям в питательных веществах при минимальной стоимости.

Задача коммивояжера состоит в отыскании наилучшего маршрута для коммивояжера, который должен объехать заданные города и вернуться назад за кратчайший срок или с наименьшими затратами.

Задача о назначениях показывает, как распределить кандидатов по вакансиям наилучшим образом.

Задача о раскрое — как раскроить листы с минимальными затратами.

Задача о рюкзаке — задача о наилучшем использовании ограниченного объема.

Задача оптимизации — задача, решение которой сводится к нахождению максимума или минимума целевой функции.

Закон распределения показывает, какова вероятность появления каждого возможного значения случайной величины или каким образом суммарная вероятность появления случайной величины, равная единице, распределена между ее возможными значениями.

Игра — формализованная модель конфликтной ситуации.

Игра с нулевой суммой — антагонистическая игра, в которой один из игроков выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой.

Игрок — участник игровой модели.

Игры с природой — игра, в которой между участниками отсутствует антагонизм (например в процессе работы предприятий и торговых посредников).

Имитационное моделирование — моделирование случайных величин.

Итерация — этап реализации алгоритма, отличающийся от его других этапов (кроме начального и конечного) лишь значениями переменных величин, но не составом процедур обработки информации.

Канал обслуживания — устройство для обслуживания требований в очереди.

Квадратичное программирование — задачи, в которых требуется найти максимум (или минимум) квадратичной функции при условии, что ее переменные удовлетворяют некоторой системе линейных неравенств и (или) линейных уравнений.

Количественные системы для бизнеса — набор программ, с помощью которых можно «проигрывать» различные варианты решения экономических и производственных задач, выявлять оптимальные из них и анализировать полученные результаты, используя различные методы.

Конечный узел, сток — конечная вершина сети или состояние, которым завершается комплекс работ.

Корреляционный анализ изучает взаимосвязи между переменными.

Коэффициент вариабельности показывает относительное значение разброса случайной величины.

Коэффициент корреляции определяет тесноту связи.

Коэффициент полных затрат — показывает, какое количество продукции одной отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции другой отрасли.

Коэффициент прямых затрат показывает, какое количество продукции одной отрасли необходимо, учитывая только прямые затраты, для производства единицы продукции другой отрасли.

Коэффициенты линейных ограничений — нормы расхода ресурсов.

Критический путь — путь в сети наибольшей продолжительности.

Линейное программирование — методы решения задач, в которых ограничения и целевая функция линейны.

Линейно-независимые уравнения — уравнения, которые не могут быть получены умножением, делением, сложением, вычитанием исходных уравнений.

Линейные зависимости — зависимости, в которые переменные входят в первой степени и в которых нет их произведения.

Магистраль — траектория экономического роста, на которой пропорции экономических показателей неизменны, а сами показатели растут с постоянным максимально возможным темпом.

Марковский процесс — случайный процесс, отличающийся тем, что при известном настоящем будущее не зависит от прошлого.

Математика — наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины.

Межотраслевой баланс отражает производство и распределение валового национального продукта в отраслевом разрезе, межотраслевые производственные связи, использование материальных и трудовых ресурсов, создание и распределение национального дохода.

Межпродуктовый баланс используется для обеспечения полной взаимоувязки планов производства группы взаимосвязанных предприятий либо группы цехов одного предприятия.

Метод аппроксимации Фогеля — метод решения транспортной задачи.

Метод ветвей и границ — метод решения задачи о назначениях.

Метод критического пути — метод решения сетевых задач, в которых продолжительности работ — детерминированные величины.

Метод Монте-Карло — метод решения задач моделированием случайных величин (метод статистических испытаний).

Метод оценки и проверки планов — метод решения сетевых задач, в которых продолжительности работ заданы тремя оценками: пессимистической, оптимистической и наиболее вероятной.

Метод потенциалов — метод решения транспортной задачи.

Метод рекуррентных соотношений Беллмана — основной метод динамического программирования, в основе которого лежит следующий принцип оптимальности: если управление процесса оптимально, то оно будет оптимальным и для процесса, остающегося после осуществления первого шага.

Метод северо-западного угла — метод решения транспортной задачи.

Механизм обслуживания характеризуется продолжительностью процедур обслуживания и количеством одновременно обслуживаемых требований в системе массового обслуживания.

Механизм очереди — правило постановки требования в очередь в системе массового обслуживания.

Многоканальная система — система массового обслуживания, в которой обслуживающие приборы функционируют параллельно.

Многофазная система — система массового обслуживания, в которой требования проходят последовательную обработку на нескольких приборах.

Модель — условное представление действительности.

Начальный узел, источник — начальная вершина сети или состояние, с которого начинается комплекс работ.

Невозможное событие — событие, которое не может произойти (появление двух тузов при вытаскивании одной карты).

Нелинейное программирование — методы решения задач, в которых зависимости между переменными в целевой функции и (или) в ограничениях нелинейны.

Нелинейные зависимости — зависимости, в которые входят переменные не первой степени или есть произведение переменных.

Непрерывные величины могут принимать в заданном интервале любые значения.

Несовместные события — события, исключающие друг друга.

Ограничение — неравенства, устанавливающие зависимости для ресурсов.

Одноканальная система — система массового обслуживания, в которой один обслуживающий прибор.

Оптимальное решение — вариант, для которого принятый критерий принимает наилучшее решение.

Оптимальность по Парето — «следует считать, что любое изменение, которое никому не причиняет убытков и которое приносит некоторым людям пользу по их собственной оценке, является улучшением».

Параметрическое программирование — задачи, в которых целевая функция или функции, определяющие область возможных изменений переменных (ограничения и граничные условия), либо то и другое зависят от некоторых параметров.

Парная игра — игровая модель с двумя участниками.

Переменные — величина, принимающая различные значения.

Платежная матрица — прямоугольная таблица, в которую сводятся возможные исходы игры.

Принцип оптимальности Беллмана — на каждом этапе необходимо так распределять ресурс, чтобы, начиная с этого этапа и до конца процесса распределения, доход был максимальным.

Продолжительность работы — время выполнения работы.

Производственная функция — уравнение, устанавливающее связь между затратами ресурсов и выпуском продукции.

Распределение начальных состояний процесса — вектор вероятностей начальных состояний.

Расстояние между двумя узлами — длина дуги на сети.

Регрессионный анализ обеспечивает подбор уравнения по серии исходных данных.

Резерв времени работы — величина, на которую можно увеличить продолжительность выполнения работы без увеличения времени наступления конечного события.

Сепарабельная функция — функция, которую можно представить как сумму двух функций, каждая из которых есть функция одной переменной.

Сетевой график — граф с дугами, изображающими связь между узлами, в котором дуге соответствует выполняемая работа, вершине — событие.

Симплекс-метод — метод решения задач линейного программирования.

Система массового обслуживания — система, в которой в случайные моменты времени возникают требования на обслуживание и имеются устройства для их обслуживания.

Системы с групповым обслуживанием — системы массового обслуживания, в которых требования поступают группами.

Системы с ограниченной длиной очереди — системы массового обслуживания, допускающие очередь, но с ограниченным числом требований.

Системы с ограниченным временем ожидания — системы массового обслуживания, допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней.

Системы с ожиданием — системы массового обслуживания, в которых требование, застав все обслуживающие каналы занятыми, ставится в очередь вплоть до освобождения любого из обслуживающих каналов.

Системы с отказами — системы массового обслуживания, в которых требования, поступающие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ и утрачиваются.

Случайная величина — данные, которые зависят от ряда случайных факторов.

Случайный ход — результат, получаемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (покупательский спрос, задержка с поставкой материалов и т. п.).

Событие — всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Сознательный ход — выбор игроком одного из возможных вариантов действия (стратегии) и принятие решения о его осуществлении.

Среднеквадратическое отклонение характеризует разброс значений случайной величины.

Стационарность — постоянство во времени характеристик некоторого процесса.

Стратегия — правило действий в каждой ситуации процесса принятия решения.

Теория игр занимается методами обоснования решений в условиях неопределенности и риска, вырабатывает рекомендации для различного поведения игроков в конфликтной ситуации.

Теория управления запасами разрабатывает методы вычисления уровня производства или запаса, обеспечивающего удовлетворение будущего спроса с наименьшими издержками.

Теория очередей исследует вероятностные модели реальных систем обслуживания.

Транспортная задача — задача о наиболее экономном плане перевозок однородного груза из пункта отправления заданной мощностью в пункт назначения с заданным спросом.

Устойчивое состояние — равновесие, стационарность и т. д.

Целевая функция — критерий оптимизации, признак, характеризующий качество принимаемого решения (максимум прибыли, минимум затрат).

Целочисленное программирование — задачи оптимизации, в которых решение должно быть в целых числах.

Целочисленный многогранник — область допустимых решений задачи целочисленного программирования.

Эконометрия — наука, изучающая конкретные количественные закономерности и взаимосвязи экономических объектов и процессов с помощью математических методов и моделей.

Экономико-математические методы — название комплекса экономических и математических научных дисциплин, введенное академиком В. С. Немчиновым в начале 1960-х годов.

Экстраполяция тенденций — прогнозирование временных рядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах: Учебное пособие. М.: Высшая школа, 1986.
2. *Балашевич В. А.* Математические методы в управлении производством. Минск: Вышэйшая школа, 1986.
3. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1964.
4. *Бунин В. А., Курицкии Б. Я., Сокуренко Ю. А.* Справочник по оптимизационным задачам в АСУ. Л.: Машиностроение, 1984.
5. *Вильяме Н. Н.* Параметрическое программирование в экономике. М.: Статистика, 1976.
6. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его обобщения и приложения. М.: Прогресс, 1966.
7. *Иванилов Ю. П., Лотов А. В.* Математические модели в экономике. М.: Наука, 1979.
11. *Карр Ч., Хоув Ч.* Количественные методы принятия решений в управлении и экономике. М.: Мир, 1966.
12. *Крушевский А. В., Швецов К. И.* Математическое программирование и моделирование в экономике. Киев: Вища школа, 1979.
13. *Кудрявцев Е. М,* Исследование операций в задачах, алгоритмах, программах. М.: Радио и связь, 1984.
14. *Кузин Б. И., Юрьев В. Н., Шахдинаров Г. М.* Методы и модели управления фирмой. СПб.: Питер, 2001.
15. *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волоценко А. Б.* Математическое программирование. М.: Высшая школа, 1990.
16. *Курицкии Б. Я.* Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 1997.
17. *Курицкии Б. Я.* Оптимизация вокруг нас. Л.: Машиностроение, 1989.
18. *Лурье А. Л.* Оптимальное планирование и сравнение эффективности хозяйственных мероприятий. М.: Наука, 1973.
19. *Лурье А. Л.* Экономический анализ моделей планирования социалистического хозяйства. М.: Наука, 1973.
20. Матричные игры /Под ред. Н. И. Воробьева. М.: Физматгиз, 1961.
21. *Первозванскии А. А.* Поиск. М.: Наука, 1970.
22. *Розенберг В. Я., Прохоров А. И.* Что такое теория массового обслуживания. М.: Советское радио, 1965.
23. *Соколицын С. А.* Применение математических методов в экономике и организации машиностроительного производства. Л.: Машиностроение, 1970.
24. *Соколицын С. А., Кузин Б. И.* Организация и оперативное управление машиностроительным производством. Л.: Машиностроение, 1988.
25. *Таха X.* Введение в исследование операций. М.: Мир, 1985.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
ТИПОВЫЕ МОДЕЛИ МЕНЕДЖМЕНТА

Владимир Викторович ГЛУХОВ
Михаил Дмитриевич МЕДНИКОВ
Светлана Борисовна КОРОБКО

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ДЛЯ МЕНЕДЖМЕНТА

Издание второе, исправленное и дополненное

Генеральный директор *А. Л. Кноп*
Директор издательства *О. В. Смирнова*
Художественный редактор *С. Л. Шапиро*
Редактор *Н. М. Баскакова*
Корректоры *О. П. Панайотти, И. А. Короткова*
Верстальщик *С. Ю. Малахов*
Выпускающие *Н. К. Белякова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.001665.03.02
от 18.03.2002 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
1ап@1рЫ.spb.ru
www.lanpbl.spb.ru
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Издательство: тел./факс: (812)336-25-10, 336-25-09;
pbl@lpbl.spb.ru
print@lpbl.spb.ru

Торговый отдел: 193029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13,
тел./факс: (812)567-54-93,
тел.: (812)567-85-78, (812)567-14-45, 567-85-82, 567-85-91;
trade@lanpbl.spb.ru

Филиал в Москве:
109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, 6/19,
тел.: (095)178-65-85, 178-57-04;
lanpress@ultimanet.ru

Филиал в Краснодаре:
350072, Краснодар, ул. Жлобы, 1/1, тел.: (861)274-10-35;
lankrd98@mail.ru.

Сдано в набор 02.06.04. Подписано в печать 08.12.04.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84х108 '/зг-
Печать высокая. Усл. п. л. 27,72. Тираж 2000 экз.

Заказ № 2917

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография».
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7.
Качество печати соответствует качеству
предоставленных диапозитивов