Г.П.Фомин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В КОММЕРЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

КАК ПОСТРОИТЬ ОПТИМАЛЬНЫЙ МАРШРУТ?

Г.П.Фомин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В КОММЕРЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Издание второе, переработанное и дополненное

Рекомендовано Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших учебных заведений,
обучающихся по экономическим специальностям

Москва
"Финансы и статистика"
2005

УДК 330.45:339(075.8)
ББК 65.42в6я73
Ф76

Фомин Г. П.

Ф76 Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 616 с.: ил.

ISBN 5-279-02828-2

Рассмотрено применение математических методов и моделей линейного, динамического и целочисленного программирования, теории массового обслуживания, теории игр, теории графов, сетевого планирования в решении задач коммерческой деятельности: перевозки грузов, оптимизации плана продажи и покупки товаров, коммивояжера, назначения, распределения ресурсов; анализа устойчивости коммерческой деятельности предприятия и др. Приведены контрольные вопросы, задачи и ответы к ним.

Для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям, может быть полезен практическим работникам, а также слушателям школ бизнеса.

$Ф \frac{0601000000 - 133}{010(01) - 2005}$ 117 – 2004

УДК 330.45:339(075.8)
ББК 65.42в6я73

ISBN 5-279-02828-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 7

Глава 1. Коммерческая деятельность и математика 9

1.1. Задачи коммерческой деятельности и методы их решения 11

1.2. Понятия о моделях и моделировании 16

1.3. Математическое моделирование задач коммерческой деятельности 35

Контрольные вопросы 49

Задачи 50

Глава 2. Методы и модели линейного программирования 55

2.1. Общая задача линейного программирования 56

Контрольные вопросы 58

2.2. Постановка задач коммерческой деятельности 58

2.2.1. Коммерческая деятельность предприятия 58

2.2.2. Планирование товарооборота 61

2.2.3. Производственная задача 62

2.2.4. Формирование рациональных смесей 65

2.2.5. Перевозка грузов 68

2.2.6. Задача о назначениях 70

2.2.7. Формирование торговой сети 72

2.2.8. Выбор портфеля ценных бумаг 74

2.2.9. Построение кольцевых маршрутов 76

Контрольные вопросы 77

Задачи 77

2.3. Методы решения задач коммерческой деятельности . . . 81

2.3.1. Геометрический метод 81

Контрольные вопросы 90

Задачи 90

2.3.2. Алгебраический симплексный метод 96

2.3.3. Метод искусственного базиса 111

2.3.4. Метод Гомори. Целочисленное решение 118

Контрольные вопросы 123

Задачи 123

2.4. Двойственные задачи линейного программирования . . 130

2.4.1. Построение двойственной задачи 130

2.4.2. Теоремы двойственности ... 133
2.4.3. Анализ устойчивости двойственных оценок ... 139
Контрольные вопросы ... 144
Задачи ... 144
2.5. Двойственный симплексный метод ... 145
Контрольные вопросы ... 152
Задачи ... 152
2.6. Метод потенциалов ... 153
Контрольные вопросы ... 166
Задачи ... 166
2.7. Анализ устойчивости коммерческой деятельности предприятия ... 171
Задачи ... 189

Глава 3. Методы и модели теории игр ... 191
3.1. Понятие об игровых моделях ... 193
3.2. Постановка игровых задач ... 197
3.3. Методы и модели решения игровых задач ... 207
3.3.1. Принцип минимакса (осторожности) ... 207
3.3.2. Решение игр в смешанных стратегиях ... 213
3.3.3. Геометрический метод ... 218
3.3.4. Метод линейного программирования ... 224
3.3.5. Игровые модели в условиях коммерческого риска 231
3.3.6. Игровые модели в условиях полной коммерческой неопределенности ... 238
3.4. Игровые модели конфликтов ... 245
3.5. Деловые игры ... 256
3.5.1. Постановка деловой игры ... 256
3.5.2. Деловая игра «Коммерсант» ... 259
3.5.3. Оценка согласованности мнений игроков в деловой игре ... 270
3.5.4. Оценка компетентности игроков в деловой игре ... 273
Контрольные вопросы ... 274
Задачи ... 275

Глава 4. Методы и модели теории графов и сетевого моделирования ... 277
4.1. Элементы теории графов ... 278
4.2. Природа потоков в сетях и принцип их сохранения ... 288
4.3. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе 292
4.4. Понятия сетевого моделирования ... 296

4.5. Постановка сетевых задач коммерческой деятельности 300
4.5.1. Задача о максимальном потоке 300
4.5.2. Задача о потоке минимальной стоимости 300
4.5.3. Транспортная задача 301
4.5.4. Задача коммивояжера 302
4.5.5. Распределение торговых агентов по городам 305
4.5.6. Формирование оптимального штата фирмы 306
4.5.7. Планирование работ коммерческой деятельности . . 307
4.6. Методы решения сетевых задач 310
4.6.1. Построение максимального потока 310
4.6.2. Метод ветвей и границ 317
4.6.3. Методы сетевого планирования 325
4.6.4. Правила построения сетевых моделей 329
4.6.5. Параметры сетевых моделей и методы их расчета . . 332
4.6.6. Анализ сетевых моделей 337
4.6.7. Оптимизация сетевых моделей 340
4.6.8. Венгерский метод решения задач о назначениях . . . 345
Контрольные вопросы 351
Задачи 352

Глава 5. Модели динамического программирования 361
5.1. Предмет динамического программирования 361
5.2. Постановка задачи динамического программирования 363
5.3. Принцип оптимальности и математическое описание динамического процесса управления 365
5.4. Оптимальное распределение инвестиций 367
5.5. Выбор оптимальной стратегии обновления оборудования 373
5.6. Выбор оптимального маршрута перевозки грузов 380
5.7. Построение оптимальной последовательности операций в коммерческой деятельности 384
Контрольные вопросы 389
Задачи 389

Глава 6. Системы и модели массового обслуживания 393
6.1. Массовое обслуживание в коммерческой деятельности 394
Контрольные вопросы 400
6.2. Моделирование систем массового обслуживания 400
6.2.1. Потоки событий 400
6.2.2. Графы состояний СМО 415
6.2.3. Случайные процессы 416

6.2.4. Уравнения Колмогорова 418
6.2.5. Процессы «рождения–гибели» 424
Контрольные вопросы 427
6.3. Системы массового обслуживания в коммерческой деятельности 427
Контрольные вопросы 436
6.4. Экономико-математическая постановка задач массового обслуживания 436
6.5. Модели систем массового обслуживания в коммерческой деятельности 442
6.5.1. Одноканальная СМО с отказами в обслуживании .. 442
6.5.2. Многоканальная СМО с отказами в обслуживании 449
6.5.3. Одноканальная СМО с ограниченной длиной очереди 460
6.5.4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью 472
6.5.5. Многоканальная СМО с ограниченной длиной очереди 478
6.5.6. Многоканальная СМО с неограниченной очередью 489
Контрольные вопросы 500
6.6. Анализ системы массового обслуживания коммерческого предприятия 500
Задачи 510

Глава 7. Модели финансово-коммерческих операций 519
7.1. Модели развития операций по схеме простых процентов 520
7.2. Модели развития операций по схеме сложных процентов 530
7.3. Модели операций дисконтирования 539
7.4. Модели финансовых и товарных потоков 546
7.5. Модели инфляции в коммерческих операциях 551
7.6. Модели сравнения финансово-коммерческих операций 558
7.7. Модели операций с облигациями 565
7.8. Модели операций с акциями 576
Контрольные вопросы 582
Задачи 583
Ответы к задачам 592

Приложение 1 610

Приложение 2 612

Литература 613

ВВЕДЕНИЕ

Коммерческие вычисления используются с появлением товарно-денежных отношений. В отдельную отрасль знаний они выделились в XIX в. под названием «Коммерческая арифметика», применение которой не только сопровождает, но и большей частью обусловливает каждый торговый акт, каждую финансовую операцию. До начала XX в. «Коммерческая арифметика» включала процентные, вексельные вычисления, финансовые операции по вкладам и ссудам, операции с ценными бумагами.

К первым шагам использования математических методов в коммерческой деятельности относится работа итальянского математика Луки Пачоли, который еще в 1494 г. предложил метод двойной записи регистрации данных взаимных расчетов между торговцами товарами, что является отличительной особенностью бухгалтерского учета. Затем появилась работа основателя классической школы политэкономии Уильяма Петти (1623–1687) «Политическая арифметика», в которой он высказывал мнения на языке чисел, весов, мер.

Количественный аспект анализа экономических явлений и процессов всегда занимал большое место в работах классиков отечественной и зарубежной экономики. Французский ученый Ф. Кенэ создал «Экономическую таблицу», являющую собой попытку представить в форме экономико-математической модели процесс воспроизводства общественного продукта как единого целого.

К. Маркс конструировал математические модели в известной работе «Капитал», которые описаны в книге «Математические методы анализа в торговле. Очерки теории и практики» (под редакцией М. И. Баранова и И. С. Бровикова, 1967 г.). П. Лафарг в воспоминаниях о Марксе писал, что он считал, что наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается воспользоваться математикой.

Затем в процессе развития рыночных отношений, например, «Коммерческая арифметика» преобразовалась в «Коммерческую математику», а затем в «Финансовую математику» как одну из составляющих «Коммерческого дела» и «Финансового менеджмента».

Коммерческая деятельность в том или ином виде сводится к решению таких задач: как распорядиться имеющимися ресурсами для достижения наибольшей выгоды или какое следует предпринять действие для получения возможно лучшего финансового результата.

Практика подтверждает, что все созданное, построенное возникает вначале в воображении человека в различных вариантах, потом из них выбирается один, который воплощается в жизнь. Основываясь на своем опыте, интуиции и здравом смысле, люди полагали, что принятие хороших мудрых решений было и остается во многом искусством. Однако стало возможным часть этого искусства сделать наукой, базирующейся на математических методах. Необходимость использования таких методов диктуется тем, что последствия принимаемых решений могут касаться большого числа людей и быть связаны с огромными затратами. Поэтому степень ответственности за принимаемые решения значительно возрастает. Перевод реального мира коммерческой деятельности на язык математики позволит получить наиболее точное представление о его существенных свойствах и предсказать будущие события.

Важно заметить, что содержательные и методологические аспекты в решении задач играют не меньшую роль, чем математические. При этом непонимание самой природы практических задач или пренебрежение их качественным содержанием приводит к большим трудностям математического характера и, как следствие, объясняет основное количество отрицательных результатов.

Математическая культура специалистов требует приобретения практических навыков по переводу задач коммерческой деятельности на математический язык. В этом и состоит одна из проблем овладения искусством математического моделирования.

Целью настоящего учебника является изложение основополагающих понятий и моделей финансово-коммерческих операций, необходимых для решения как учебных, так и практических задач коммерческой деятельности.

ГЛАВА 1

КОММЕРЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ И МАТЕМАТИКА

Специалисты в области экономических исследований считают, что дальнейший прогресс тесно связан с более широким использованием математических методов и моделей. Если раньше доминировал качественный анализ, то теперь выявлены количественные закономерности и построены математические модели многих экономических явлений и процессов. В результате наблюдается более глубокое проникновение в изучаемые процессы, в саму природу явлений. Смелые замыслы познания в макро- и микромире позволяют получить удивительные результаты. Например, некоторые закономерности были найдены чисто математическим путем, а непосредственное наблюдение не позволяло установить даже их присутствие. Поэтому путь математического моделирования экономических процессов и последовательного установления логических причинно-следственных связей для обеспечения возможности наблюдения, контроля и управления ими есть наиболее эффективное средство для решения различных проблем. Предложенные суждения о математике как об орудии исследования в различных сферах человеческой деятельности являются результатом оценки потребителя с позиций ее полезности и ценности для развития общества в будущем.

Выдающийся итальянский физик и астроном, один из основателей точного естествознания Галилео Галилей (1564–1642) говорил, что «книга природы написана на языке математики». Почти двести лет назад родоначальник немецкой классической философии Иммануил Кант (1742–1804) утверждал, что «во всякой науке столько истины, сколько в ней математики». Наконец, еще через сто пятьдесят лет, практически уже в наше время, немецкий математик и логик Давид Гильберт (1862–1943) констатировал: «Математика – основа всего точного естествознания».

Количественный аспект анализа экономических явлений и процессов всегда занимал большое место в работах классиков отечественной и зарубежной экономики. Например, еще в 1938 г. французский математик Курно в работе «Исследование математических принципов теории богатства» сформулировал «закон спроса».

Приведенные высказывания великих ученых дают представление о роли и значении математики как в научно-теоретической, так и предметно-практической деятельности специалистов.

Математическое моделирование – это теоретико-экспериментальный метод познавательно-созидательной деятельности, метод исследования и объяснения явлений, процессов и систем (объектов-оригиналов) на основе создания новых объектов – математических моделей.

Математические методы исследования все больше проникают в экономику, экологию, социологию, психологию, коммерческую деятельность, маркетинг. Сложность количественного описания процессов и явлений и построения математических закономерностей сильно сдерживает стремление «проверить алгеброй гармонию». Это стремление послужило поводом к появлению междисциплинарных гибридов в виде математической экономики, математической биологии, математической психологии, математической лингвистики.

Коммерческая деятельность связана с постоянным поиском наиболее выгодного варианта распределения различного вида ресурсов: финансовых, трудовых, товарных, технических и др. В настоящее время усложнение взаимосвязей вне и внутри коммерческих предприятий, наличие большого числа показателей, факторов и ограничений, а также быстрый рост конкуренции не позволяют сформировать оптимальный план без применения специальных методов. Кроме того, время решения задач обычно ограничено, и поэтому не всегда составляется оптимальный план.

Существующие математические методы и модели позволяют решать задачи большей размерности и учитывать широкий перечень показателей и факторов влияния, а время решения задач значительно сокращается с применением компьютеров.

1.1. Задачи коммерческой деятельности и методы их решения

Термин «коммерция» в переводе с латинского commercium означает торговля, торговые операции, торговые обороты. Это послужило поводом к появлению коммерсантов, лиц, осуществляющих коммерческую деятельность, а также таких терминов, как «коммерческий риск», «коммерческая тайна», «коммерческий кредит», «коммерческий банк».

Коммерческая деятельность является неотъемлемой частью функционирования современных предприятий в рыночных условиях. Она представляет собой совокупность процессов и операций, направленных на совершение купли-продажи товаров и услуг с целью удовлетворения покупательского спроса и получения прибыли. К основным коммерческим операциям относятся операции по обмену продукции в материально-вещественной форме; по обмену научно-техническими знаниями (патенты, лицензии, ноу-хау); по обмену техническими услугами (строительный инжиниринг); арендные; по международному туризму; по предоставлению консультационных услуг в области информации; по обмену кинофильмами и телепрограммами; а также операции товародвижения – перевозка грузов; транспортно-экспедиторские операции; страхование грузов и их хранение; расчеты между клиентами.

Коммерческая деятельность включает помимо торговли еще целый комплекс заготовительной, производственной, строительной, инвестиционной и другой предпринимательской деятельности, направленной в конечном итоге на ее реализацию через акты купли-продажи для получения прибыли. Коммерческая деятельность осуществляется преимущественно в сфере товарного обращения и распределения среди специализированных коммерческих организаций. Коммерческие подразделения производственных фирм, компаний обеспечивают движение товарно-денежных потоков. При этом коммерческая деятельность на промышленном предприятии подразделяется на закупочную, связанную с материально-техническим снабжением, и сбытовую – продвижение готовой продукции потребителям. На входе предприятия – обеспечение информацией, капиталом, ресурсами через отделы снабжения (запчастями, комплектующими изделиями) и на выходе – службы сбыта, готовой продукции, услуг, информации.

С целью повышения качества и конкурентоспособности коммерческую деятельность выделяют в отдельное подразделение с финансовой ответственностью перед компанией. Таким образом, появились специализированные торговые дистрибьюторские сети, созданные концернами и корпорациями. В России производственные компании ОАО «ГАЗ», «АвтоВАЗ», «КамАЗ», «ЛУКойл», «Газпром» создали торговые сбытовые системы с дистрибьюторской сетью как в нашей стране, так и за рубежом.

Таким образом, любые коммерческие службы всегда ориентированы на рынок для успешного решения социальных задач общества. Коммерческая деятельность позволяет всем участникам коммерческого оборота успешно взаимодействовать на всех этапах реализации торговых сделок с учетом взаимной выгоды.

При этом выделяют задачи предвидения коммерческих рисков и просчет возможных исходов, последствий принимаемых решений. При принятии коммерческих решений широко используются принципы маркетинга.

Коммерческая деятельность торговых предприятий включает изучение спроса на товары, рынков сбыта, выявление и изучение источников поступлений и поставщиков товаров, организацию рациональных хозяйственных связей с поставщиками, разработку заявок по всему ассортименту товаров, заключение договоров на поставку товаров, организацию и ведение учета и контроля за выполнением договорных обязательств.

Коммерческая деятельность формирует организационную схему связи предприятий и оживляет операции взаимодействия по закупке, продвижению товаров от поставщика до потребителя и продаже конкретному покупателю. Она включает предпринимательство, поиск и закупку конкурентоспособного товара, обеспечение его сохранности, транспортировку к месту продажи, продажу и гарантийное обслуживание. Таким образом, коммерческая деятельность охватывает не только торговую деятельность, но и разнообразные виды предпринимательства, связанные со сбытом, перепродажей товаров и предоставлением соответствующих услуг.

В коммерческо-посреднической деятельности задачи-операции разделяются на производственные задачи, связанные с непосредственным движением грузов, хранением, погрузкой, разгрузкой, транспортировкой, фасовкой, подсортировкой, упаковкой, и на коммерческие задачи, связанные со сменой форм собственности, определяемые куплей-продажей товаров, а также на задачи, связанные с проведением рыночных исследований, оценкой инфраструктуры, конкурентов, с формированием рекламы. В настоящее время выделяются задачи, связанные с выполнением дополнительных услуг предпродажного, продажного и послепродажного сервиса, обеспечивающих достижение большего коммерческого успеха.

Ключевой фигурой торгово-посреднического бизнеса является посредник, человек, которому присущи такие качества, как компетентность, профессиональные знания, этика делового общения, контактность, коммуникабельность, инициативность, эрудиция, хороший вкус и т.д.

В качестве посредников выступают юридические или физические лица, оптовые предприниматели, агенты, дилеры, дистрибьюторы, которые выполняют функции объединения производителей товаров, оптовых и розничных потребителей для обмена товарами, услугами, информацией.

В целом можно выделить три основные группы задач коммерческой деятельности: производство продукции, коммерческое посредничество и коммерция (торговля). Коммерческая деятельность имеет особенную специфику в оптовой и розничной торговле и посреднических структурах.

Следует заметить, что понятие «коммерция» могут характеризовать по-разному предприниматели, экономисты, финансисты, товароведы, маркетологи, специалисты по рекламе, бухгалтеры, менеджеры. Однако общим для всех является то, что предмет коммерции – акты купли-продажи товаров в сфере товарного обращения, ориентированные на спрос потребителей, поступление их в собственность торгового предприятия для последующей реализации и получение прибыли с наименьшими издержками.

В процессе формулировки задач коммерческой деятельности следует учитывать особо форс-мажорные обстоятельства и реализм коммерческого беспокойства: штрафы, обман, угрозы, воровство, грабежи, вымогательства, все что может отразиться на конечном результате. Это поможет более объективно изложить содержание задачи и осуществить ее конкретную постановку специалистами. Использование арсенала математических методов и моделей позволяет разработать оптимальные варианты решений задач коммерческой деятельности.

Например, для формирования плана прикрепления 30 розничных предприятий торговли – заказчиков, получающих по одной условной единице продукции, к двум оптовым поставщикам мощностью 20 и 10 условных единиц существует около 5 млн вариантов прикрепления. Составляя планы со скоростью 1 вариант в минуту, экономист за рабочий день разработает 480 вариантов, за неделю – 2400, за месяц – 9600, за год – 124 800. Следовательно, для решения задачи потребуется около 40 лет! При увеличении числа потребителей до 50, а мощностей поставщиков соответственно до 30 и 20 условных единиц на подобный перебор ушло бы около 100 млн лет. Конечно, все варианты перебирать никто не будет, и, следовательно, план вряд ли будет оптимальным.

Специалисты в коммерции должны быть подготовлены к решению следующих профессиональных задач:

а) коммерческо-организационной деятельности: выбор товаров и формирование ассортимента, подбор покупателей и поставщиков; планирование и организация процессов закупки и продаж товаров; организация коммерческих взаиморасчетов; организация товародвижения и создание системы стимулирования сбыта; управление товарными запасами;

б) научно-исследовательской деятельности: исследование и анализ товарных рынков; исследование ассортимента и конкурентоспособности товара; исследование и моделирование бизнес-технологий; анализ и оценка эффективности коммерческой деятельности; исследование информационно-методического обеспечения коммерческой деятельности с целью ее оптимизации;

в) проектно-аналитическая деятельность: проектирование информационного обеспечения коммерческой деятельности; прогнозирование конъюнктуры товарных рынков; прогнозирование и проектирование номенклатуры товаров; прогнозирование и разработка стратегии коммерческой деятельности предприятия на товарном рынке; проектирование процессов продвижения и реализации товаров на рынке; прогнозирование результатов коммерческой деятельности предприятия коммерческой службой.

В настоящее время множество задач планирования и управления в отраслях народного хозяйства, а также большой объем частных прикладных задач решаются методами математического программирования. Наиболее развитыми в области решения оптимизационных задач являются методы линейного программирования. Эти методы позволяют описать с достаточной точностью широкий круг задач коммерческой деятельности, таких как: планирование товарооборота; размещение розничной торговой сети города; планирование товароснабжения города, района; прикрепление торговых предприятий к поставщикам; организация рациональных перевозок товаров (транспортная задача); распределение работников торговли по должностям (задача о назначении); организация рациональных закупок продуктов питания (задача о диете); распределение товарных потоков; планирование капиталовложений; оптимизация межотраслевых связей торговли; замена торгового оборудования; определение ассортимента товаров для торговой базы в силу ограниченной площади хранения; установление рационального режима работы. В задачах линейного программирования критерий эффективности и функции в системе ограничений линейны.

Если содержательный смысл требует получения решения в целых числах, то такая задача является задачей целочисленного программирования. В задачах параметрического программирования целевая функция или функции, определяющие область возможных изменений переменных, зависят от некоторых параметров. Если эти функции носят случайный характер, то имеем задачу стохастического программирования. Если в задаче математического программирования имеется переменная времени, а критерий эффективности выражается через уравнения, описывающие протекание операций во времени, то такая задача является задачей динамического программирования.

Использование математических методов в коммерческой деятельности связано со сбором необходимой информации коммерсантом, экономистом, финансистом, затем постановкой задачи вместе с математиком. Поскольку многие математические методы уже реализованы на компьютере в виде пакета стандартных программ, то доступ к ним обычно прост, автоматизирован и не составляет особых трудностей. В этом случае время решения задачи определяется в основном лишь временем ввода ее условий в компьютер.

В целом успешному решению задач коммерческой деятельности может способствовать большое разнообразие математических методов и моделей линейного, целочисленного и динамического программирования, теории игр, теории графов и сетевого моделирования, теории массового обслуживания, теории вероятностей и математической статистики, корреляционного и регрессионного анализа.

1.2. Понятия о моделях и моделировании

Базовым началом этого раздела является понятие существования аналогии между предметами или явлениями, которая определяется как сходство функций или подобие отношений, например пропорциональности. Это понятие связано также с такими терминами, как копия, подобие, имитатор, тождество. Создание аналогов, выполняющих роль заместителей, в той или иной степени копирующих или воспроизводящих оригинал, необходимо для исследования, поскольку проведение непосредственного эксперимента часто очень дорого или просто невозможно. Поэтому создание каких-либо аналогов коммерческой деятельности или составляющих ее элементов позволяет удешевить проведение исследования, а по полученным результатам судить об оригинале. Описанные процедуры связаны с умением создавать так называемые модели, которые являются условным образом вещественным (физическим) или абстрактным (знаковым), чего-либо или кого-либо, выполняющих роль заместителей оригиналов.

В простейшем варианте понятие «модель» можно связать с представлением какой-либо копии, повторяющей в уменьшенном или увеличенном виде с сохранением пропорций, например, здания, моста, башни, склада, микрорайона, города, скульптуры. Такие модели называют макетами. Макет может отобразить в увеличенной копии что-то микроскопическое, недоступное обычному восприятию человека, например строение атома, молекулы алмаза. Такие модели принято называть материальными, или вещественными. Они предназначены для того, чтобы точнее изучить, проанализировать, предвидеть то, что человек собирается создать, изготовить, построить или переделать. Это позволяет дешево реализовать замысел. В процессе работы над такой моделью можно легко изменять варианты будущего изделия и затем выбрать лучший, например, на конкурентной основе по каким-либо требованиям.

Обычно созданию таких моделей предшествуют рисунки, эскизы, чертежи, схемы, т.е. различные варианты отображения материальных объектов, подлежащих анализу, которые множество раз воспроизводятся на бумаге. В это время интенсивно работает воображение, например, у архитектора, скульптора, кинорежиссера, актера, коммерсанта, бухгалтера, менеджера. Правда, каждый из них на бумаге изображает сообразно своему профессиональному уровню и принятой в этой профессиональной сфере символике варианты какого-либо замысла. Таким образом, формируются абстрактные или материальные модели. Но у человека и общества есть потребность в создании не только моделей застывших или статических структур, но и процессов в экономике, политике, различных отраслях народного хозяйства. Создание таких моделей является сложной и интересной задачей.

В реальной жизни мы постоянно прибегаем к мысленным моделям как к средству упрощения действительности в процессе принятия какого-либо решения, правда, иногда очень долго, даже несколько лет. Так, ахейцам, осаждавшим Трою, понадобилось 10 лет, чтобы, наконец, додуматься до оригинального решения, связанного с уловкой на деревянного коня.

К физическим моделям относятся: скульптура, игрушечные автомобили, глобус, планетарий, модели самолетов и другие материальные объекты, заменяющие оригиналы; к абстрактным моделям — рисунок, схема, карта, путеводитель, план дома, фотография, математические и компьютерные модели.

Под *математической моделью* принято понимать совокупность соотношений – уравнений, неравенств, логических условий, операторов и т.п., определяющих характеристики состояний объекта моделирования, а через них и выходные значения параметров реакции, в зависимости от значений параметров объекта-оригинала, входных воздействий, начальных и граничных условий, а также времени.

Математическая модель, как правило, учитывает лишь те свойства (атрибуты) объекта-оригинала, которые отражают, определяют и представляют интерес с точки зрения целей и задач конкретного исследования. Следовательно, в зависимости от целей моделирования при рассмотрении одного и того же объекта-оригинала с различных точек зрения и в различных аспектах последний может иметь различные математические описания и, как следствие, быть представлен различными математическими моделями.

Математическая модель — это формальная система, представляющая собой конечное собрание символов и правил оперирования ими в совокупности с интерпретацией свойств определенного объекта некоторыми отношениями, символами или константами.

Как следует из приведенного определения, конечное собрание символов (алфавит) и правил оперирования ими («грамматика» и «синтаксис» математических выражений) приводят к формированию абстрактных объектов. Такая интерпретация делает этот абстрактный объект математической моделью.

Интерпретация (от лат. *interpretation* – разъяснение, толкование, истолкование) определяется как совокупность значений (смыслов), придаваемых каким-либо образом элементам некоторой системы (теории), например формулам и отдельным символам.

Таким образом, можно утверждать, что интерпретация – это установление соответствия между формальной и содержательной системами.

Наши знания об объектах реальной действительности всегда относительны, так как они являются отражением тех или иных черт реальной действительности с определенной погрешностью, поэтому возникает необходимость заменить сам исследуемый объект-оригинал его изображением, называемым моделью. Это понятие связано с такими терминами, как копия, подобие, имитатор, тождество, аналог. Создание аналогов, выполняющих роль заместителей, в той или иной степени копирующих или воспроизводящих оригинал, необходимо для исследования оригинала, поскольку проведение непосредственного эксперимента часто очень дорого или просто невозможно. Создание модели позволяет удешевить проведение исследования, а затем по полученным результатам уже судить об оригинале. Таким образом, моделью называется материальный или идеальный объект, который создается для изучения исходного объекта (оригинала) и который отражает наиболее важные качества и параметры оригинала. Модели в нашей жизни имеют огромное значение, оказывая сильное познавательное действие, и являются средством отражения свойств окружающего мира.

Так, например, образец какого-либо изделия для серийного производства или макет будущего здания, садового участка, скульптурные изображения (модель бюста, статуи) ускоряют и помогают выбрать лучшие решения по их физическому воплощению в жизнь.

К идеальным (абстрактным) моделям относятся графики (рисунок, гравюра, плакат, карикатура, литография), фотография, схема, карта, план дома, математические модели, построенные с помощью чисел, функций, уравнений, графиков и т.д. Модели широко применялись и применяются в различных сферах деятельности человека: в науке, технике, искусстве, экономике и т.д.

Например, из физики известная формула $h = gt^2/2$, связывающая высоту h свободного падения тела, время t падения и ускорение свободного падения g, является математической моделью в виде уравнения.

Уже накопился значительный опыт в области моделирования в различных сферах деятельности человека. Например, сцена театра – модель жизни. В литературе писатель Л. Н. Толстой на бумаге мастерски смоделировал различные образы героев во взаимодействии в самых разных условиях жизни войны и мира. В качестве удачного и очень известного модельера в художественной литературе описан образ Шерлока Холмса, поскольку он достаточно точно воссоздавал и предугадывал поведение персонажей как в прошлом времени, так и в будущем. К создателям подобного рода моделей относятся также Нострадамус, Мессинг, Ванга. В физике – всемирно известная модель атома Н. Бора, а в химии – периодическая система Д. И. Менделеева являются основами для построения других моделей, позволяющих воспроизвести и объяснить механизмы развития физико-химических процессов в различных материальных конструкциях, например функционирование микросхем или взрыва бомб. Примерами современных модельеров-знаменитостей, мастерски занимающихся обслуживанием, являются российские и зарубежные кутюрье.

Вся совокупность действий, связанных с построением, анализом и другими операциями, проводимыми с моделями, называется моделированием, алгоритм которого представлен на рис. 1.2.1.

Последовательность моделирования представляет собой итерационную процедуру, которая предусматривает и позволяет провести коррекцию после каждого этапа и вернуться к любому из предшествующих, а затем продолжить анализ.

Можно выделить несколько основных этапов алгоритма экономико-математического моделирования. Все начинается с замысла. Затем на первом этапе выявляется проблема, формулируются цели и задачи исследования, проводится качественное описание экономического процесса или объекта. На втором этапе определяются методы решения, строится математическая модель

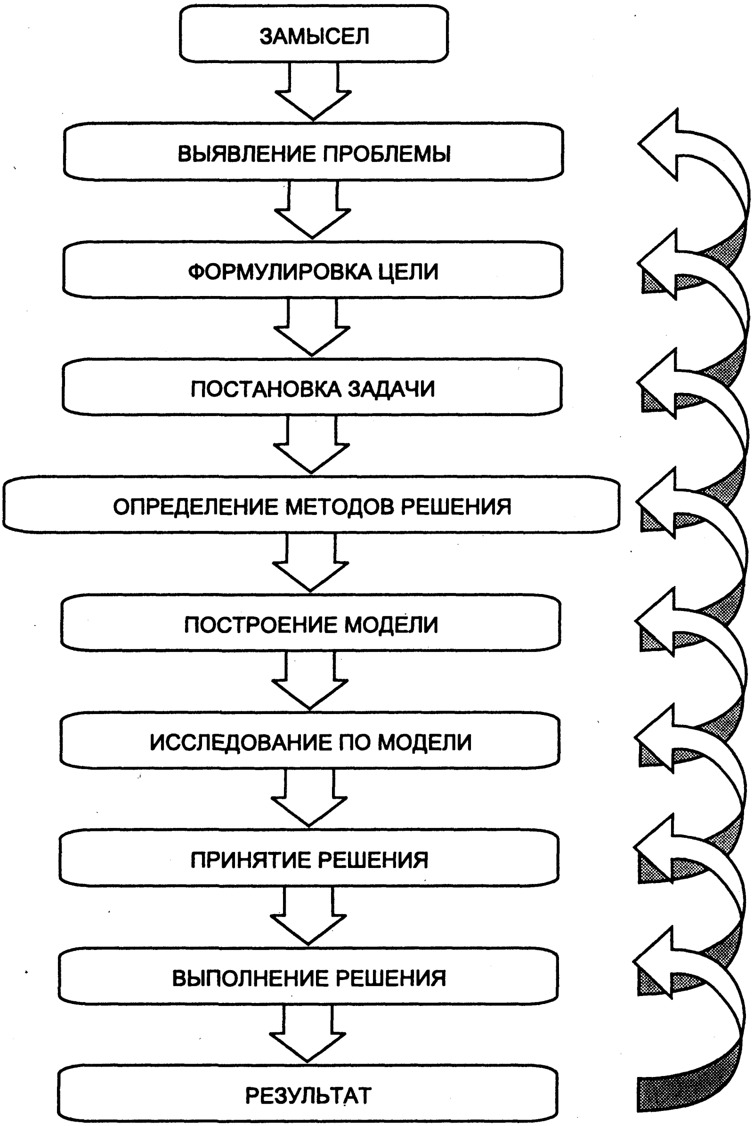


Рис. 1.2.1. Алгоритм моделирования задач коммерческой деятельности

изучаемого объекта, выбираются или разрабатываются методы исследования, программируются модели на компьютере, подготавливается исходная информация. Далее проверяется пригодность машинной модели на основе правильности получаемых с ее помощью результатов и оценивается их устойчивость. На третьем, основном, этапе экономико-математического моделирования проводится исследование по модели, реализованной в виде компьютерных программ, проводятся расчеты, обрабатываются и анализируются полученные результаты и, наконец, принимается оптимальное решение.

Оптимальное планирование заключается в поиске наилучшего варианта плана из множества возможных. Наилучшее распределение ресурсов осуществляется при сопоставлении вариантов плана по выбранному критерию оптимальности, который определяет степень достижения поставленной цели. Такими критериями могут быть рентабельность, доход, издержки обращения, товарооборот и др. В связи с этим оптимальным считается такой план, который обеспечивает, например, максимальный доход (решение задачи на максимум) или минимум издержек обращения (решение задачи на минимум).

В целом поиск оптимальных решений можно свести к двум основным постановкам задач: получение заданного эффекта при минимуме затрат или получение максимального эффекта при заданных ограниченных ресурсах.

Механизм экономических отношений в задачах коммерческой деятельности описывается целым рядом взаимосвязанных показателей: товарооборот, рентабельность, издержки обращения, ассортимент товаров, площадь торговых залов и подсобных помещений, количество и квалификация работников, виды торгового оборудования, товарные запасы, система обработки документов, форма обслуживания покупателей и т.д. На величину этих показателей влияют такие факторы, как ритмичность, частота и объемы поставок товаров, ассортимент и качество завозимых товаров, наличие и исправность торгового оборудования, количество работающих и др.

Математические модели в экономике разрабатываются для двух целей: лучшего понимания объективной реальности и выработки рационального варианта действий и выбора оптимальных решений в практической деятельности.

Моделирование дает лицам, осуществляющим коммерческую деятельность, вспомогательный, удобный, простой, быстрый, дешевый и эффективный инструмент, особенно с использованием компьютеров, позволяющий за секунды осуществить перебор и сравнение множества вариантов решения и принять из них лучшее.

В известном произведении Ли Якокка «Карьера менеджера» автор предлагает следующую основополагающую модель бизнеса:

$$\text{Люди} \Rightarrow \text{Продукт} \Rightarrow \text{Прибыль.}$$

Для многих сфер деятельности, в том числе и коммерческой, может быть использована другая модель:

$$\text{Информация} \Rightarrow \text{Деньги} \Rightarrow \text{Товар} \Rightarrow \text{Деньги.}$$

Следует заметить, что эти модели вместе с известной формулой Эйнштейна $E = mc^2$ успешно используются в рекламных целях, в коммерческой деятельности.

Следующей интересной моделью является многоугольник конкурентоспособности (рис. 1.2.2), показывающий соотношение различных показателей на плоскости, иногда его называют радаром или полигоном по аналогии с экраном радиолокатора.

По каждой оси для отображения уровня значений каждого из исследуемых факторов используется определенный масштаб измерений, часто в виде балльных оценок. Изображая на одном рисунке многоугольники конкурентоспособности для разных предприятий, можно провести анализ уровня их конкурентоспособности по разным факторам.

Для описания взаимосвязей между результатом, например доходом и причинами, влияющими на коммерческую деятельность фирмы, и учета множества мнений и факторов, можно использовать схемы причинно-следственных связей (рис. 1.2.3). Вариант формы построения такой схемы был предложен в 1950 г. профессором Токийского университета Исикава Каору. В связи с этим такие изображения, напоминающие «рыбий скелет», называют «схемы Исикава».

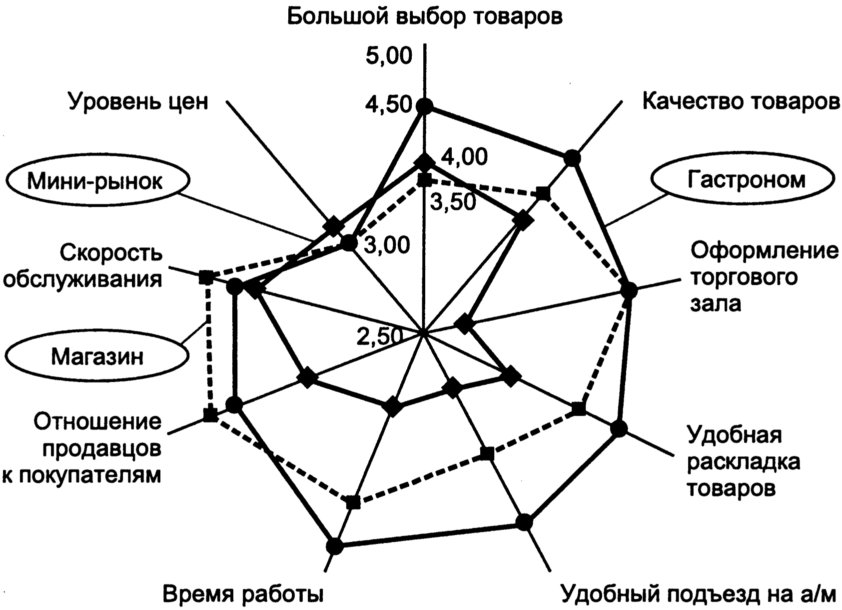


Рис. 1.2.2. Многоугольник конкурентоспособности

Для выявления наиболее вероятных или проблемных задач, на которых следует сосредоточить усилия фирмы, необходимо сравнить несколько факторов, влияющих на интересующий показатель коммерческой деятельности. Для этого можно использовать диаграммы относительной важности, получаемые, например, методами экспертных оценок. Графики такого вида (рис. 1.2.4) называют диаграммами Парето, по имени итальянского экономиста.

Различные экономико-математические методы создаются и изучаются еще и потому, что проводить непосредственные эксперименты с экономикой очень сложно, дорого и часто просто невозможно, поскольку это может быть связано с большими ущербами.

В современных условиях даже опытный руководитель не всегда оказывается в состоянии обнаружить и объективно сопоста-

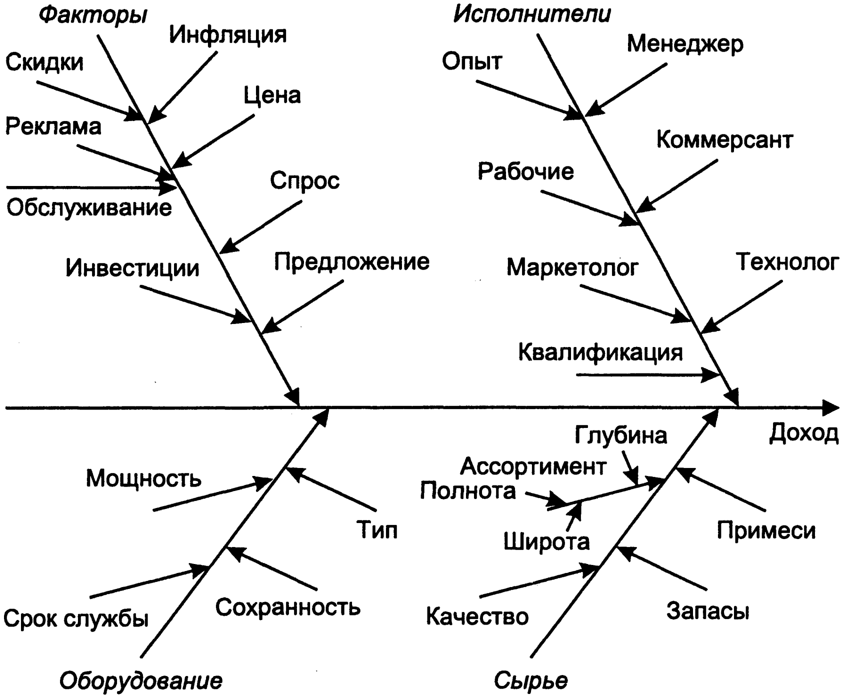


Рис. 1.2.3. Схема причинно-следственных связей дохода фирмы

вить преимущества и недостатки различных вариантов решений, поэтому управление с использованием моделей может снизить уровень вредных последствий.

Решение задач на моделях дешевле. Небольшие затраты на моделирование позволяют имитировать «экономические бури», экономить при этом миллионы и миллиарды рублей. Абстрактные модели нашли широкое распространение в количественных методах анализа, что послужило поводом для применения разнообразных математических методов и появления экономико-математических моделей, отображающих экономические отношения в коммерческой сфере средствами математического описа-

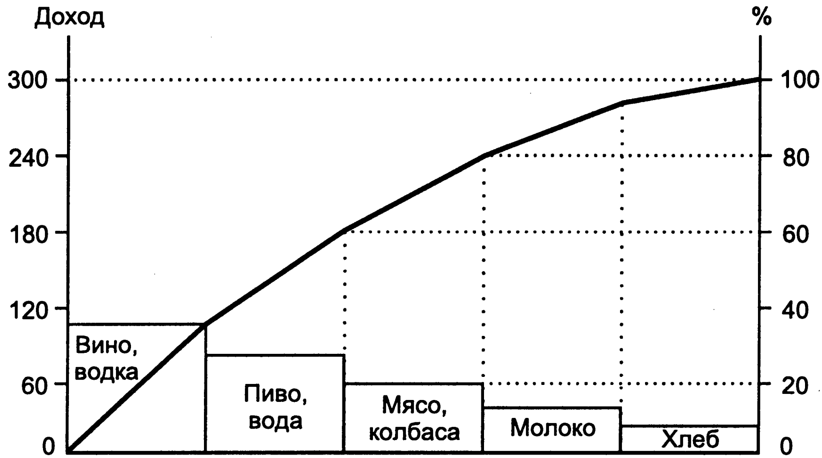


Рис. 1.2.4. Диаграмма Парето

ния в виде уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств, матриц, графиков, сетей, структур, схем и др.

Моделирование процессов коммерческой деятельности связано с построением специальных моделей, получивших название производственных функций, функций потребления и др. Производственной функцией является математическая модель вида $y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n)$, описывающая зависимость, например, объема продажи продукции от величины ресурсов разного вида, в качестве которых выступают трудовые ресурсы, торговые площади, товарные запасы, рабочее время и др.

Наиболее типичными производственными функциями являются степенные модели вида

$$y = a_0 \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i},$$

одним из вариантов которой является производственная функция Кобба–Дугласа:

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}.$$

Функцией производственных затрат является модель вида

$$x_1 = \varphi\,(y_1, y_2, ..., y_m),$$

которая описывает зависимость затрат какого-либо ресурса x_1, например, от объема продажи товаров $y_1, y_2, ..., y_m$ всего ассортимента.

В общем виде функции потребления представляют собой многофакторную модель связи уровня потребления материального блага S и факторов влияния $u_1, u_2, u_3, ..., u_i, ..., u_n$, определяющих спрос и потребление, что можно записать так:

$$S = f\,(u_1, u_2, u_3, ..., u_i, ..., u_n).$$

Шведский экономист Л. Торнквист предложил три вида однофакторных моделей связи объема потребления S (спроса) от уровня u – дохода:

для предметов первой необходимости –

$$S_1 = \frac{a_0 u}{(a_1 + u)};$$

для менее необходимых предметов –

$$S_2 = a_0 \frac{u - a_1}{u + a_2};$$

для предметов роскоши –

$$S_3 = a_0 u \frac{u - a_1}{u + a_2}.$$

Другим примером модели является связь математических символов в задаче (о диете или рациональных смесях) формирования экономного суточного набора продуктов питания, которые имеют следующие обозначения:

c_j – цена 1 кг j-го продукта, руб.;

z_j – запас j-го продукта, кг;

q_i – i-е питательное вещество;

b_i – норма суточной потребности в i-м питательном веществе, г;

q_{ij} – вес i-го питательного вещества в 1 кг продукта, г;
x_j – вес j-го продукта в общем наборе питания, кг;
C – общие затраты на питание, руб.;
m – количество питательных веществ;
n – количество продуктов питания.

Взаимосвязи между перечисленными показателями задачи формально можно записать в обобщенном виде таким образом:

$$C = f\{c_j;\ Z_j;\ q_i;\ b_i;\ q_{ij};\ x_j;\ m;\ n\} \to \min$$

или в виде математических уравнений, неравенств и систем уравнений, что в сочетании с содержательной частью задачи имеют следующий вариант постановки:

найти оптимальные величины веса каждого продукта питания в общем наборе

$$x_1 = ?,\ x_2 = ?,\ x_3 = ?,\ \ldots,\ x_j = ?,\ x_n = ?$$

при следующих ограничениях:

вес каждого питательного вещества в наборе должен быть более или равен суточной норме потребления человека:

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ij} x_j \ge b_i, \quad i \in m,$$

причем каждый продукт должен входить в диету и, кроме того, его вес не должен превышать величины имеющегося запаса:

$$0 < x_j \le z_j, \quad j \in m,$$

а стоимость набора продуктов при этом должна быть наименьшей:

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min.$$

Записанные уравнения и неравенства – совокупность, которая представляет собой экономико-математическую модель задачи. Решение этой задачи можно получить с помощью, например, методов линейного программирования.

Экономико-математическую модель этой же задачи можно представить еще и в матричном виде. Например, для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку ежедневно необходимо потреблять белки, жиры, углеводы, минеральные соли. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг имеющихся продуктов питания, а также их стоимость и нормы суточной потребности питательных веществ изображены в виде матрицы (табл. 1.2.1).

Таблица 1.2.1

Питательные вещества	Содержание питательных веществ в 1 кг продуктов							Норма в сутки $в_i$, г
	мясо	рыба	молоко	масло	сыр	крупа	картофель	
Белки, г	180	190	30	70	260	130	21	118
Жиры, г	20	3	40	865	310	30	2	56
Углеводы, г	0	0	50	6	20	650	200	500
Минеральные соли, г	9	10	7	12	60	20	70	8
Цена 1 кг продукта, руб., c_j	1,9	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1	
Вес продукта в диете, кг, x_j	$x_1 = ?$	$x_2 = ?$	$x_3 = ?$	$x_4 = ?$	$x_5 = ?$	$x_6 = ?$	$x_7 = ?$	

Требуется составить дневной рацион продуктов питания, содержащий не менее суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах и обеспечивающий минимальную общую стоимость продуктов.

Экономико-математическая формулировка и модель этой задачи имеют следующий вид:

$$x_1^0 = ? \quad x_2^0 = ? \quad x_3^0 = ? \quad x_4^0 = ? \quad x_5^0 = ? \quad x_6^0 = ? \quad x_7^0 = ?$$

Найти оптимальный вес имеющихся продуктов питания при ограничениях, связанных с суточной нормой потребления, записанных в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} 180x_1 + 190x_2 + 30x_3 + 70x_4 + 260x_5 + 130x_6 + 21x_7 \geq 118, \\ 20x_1 + 3x_2 + 40x_3 + 865x_4 + 310x_5 + 30x_6 + 2x_7 \geq 56, \\ 0x_1 + 0x_2 + 50x_3 + 6x_4 + 20x_5 + 650x_6 + 200x_7 \geq 500, \\ 9x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 12x_4 + 60x_5 + 20x_6 + 70x_7 \geq 8, \\ x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0, \quad x_4 > 0, \quad x_5 > 0, \quad x_6 > 0, \quad x_7 > 0, \end{cases}$$

решение которой позволяет определить минимум затрат на продукты питания

$$C = (1{,}9x_1 + x_2 + 0{,}28x_3 + 3{,}4x_4 + 2{,}9x_5 + 0{,}50x_6 + 0{,}1x_7) \to \min.$$

Дальнейшим развитием задачи о рациональном питании являются постановки и решения задач, связанных с товароснабжением и управлением товарными запасами на коммерческих предприятиях.

Задача управления товарными запасами связана с поиском ответов на следующие вопросы: кому, когда и в каком объеме заказывать товары; какой лучший маршрут перевозки товаров; каким транспортом перевозить: автомобильным, железнодорожным или воздушным; какая частота и величина поставок товара?

Основными показателями систем управления товарными запасами являются следующие:

C – издержки обращения;

C_x – затраты на хранение запасов, $C_x = c_1 ZT$;

c_1 – затраты на хранение единицы запаса в течение года;

Z – величина среднего запаса, $Z = 0{,}5S$;

S – размер одной партии поставки;

T – плановый период;

C_3 – затраты на завоз, $C_3 = k \cdot n$;

k – затраты на завоз одной партии;

n – число поставок в планируемом периоде, $n = Q/S$;

Q – общий объем поставок за плановый период;

t – интервал между поставками.

В качестве критерия эффективности можно принять издержки обращения.

Логическую взаимосвязь перечисленных показателей можно выразить в виде сетевой модели, представляющей собой древовидную структуру (рис. 1.2.5), где показатели располагаются в соответствии с экономическими механизмами, взаимосвязями по уровням значимости на основе использования, например, метода парных сравнений и известных экономико-математических моделей.

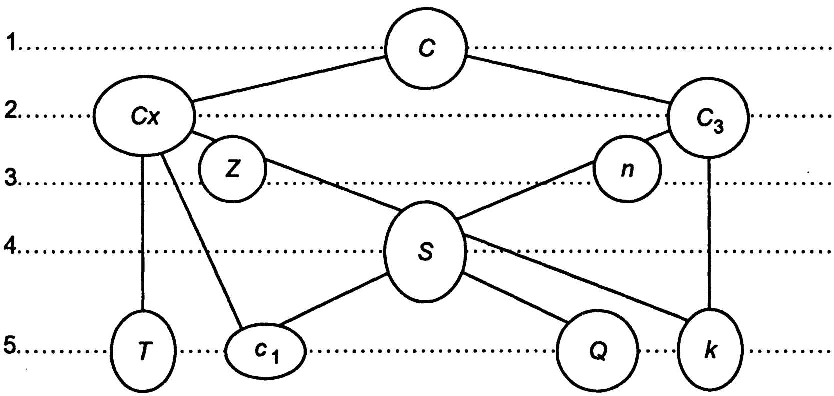


Рис 1.2.5. Древовидная модель связи показателей товарных запасов

На верхнем уровне выделяется критерий эффективности, на основании которого целевую функцию в общем виде можно записать так:

$$C = f(C_x, C_3, S, Z, n, t, Q, T, k, c_1) \to \min,$$

где показатели Q, T, c_1, k являются неуправляемыми, а остальные – управляемыми, оптимальные значения которых S^0, Z^0, n^0, t^0, C^0 и необходимо определить в задаче. Перечисленные показатели коммерческой деятельности находятся в количественной взаимосвязи.

Целевая функция управления однономенклатурными товарными запасами может быть записана в виде экономико-математической модели следующим образом:

$$C=\left(c_1\cdot\frac{S}{2}\cdot T+k\frac{Q}{S}\right)\to\min.$$

Решение этой модели заключается в поиске ее экстремума, который находится путем двойного дифференцирования по S, что позволяет найти модели определения оптимальных показателей товарных запасов:

размера одной поставки –

$$S^0=\sqrt{\frac{2kQ}{c_1T}};$$

среднего текущего запаса –

$$Z^0=\frac{S^0}{2};$$

числа поставок на планируемый период –

$$n^0=\frac{Q}{S^0};$$

интервала между поставками –

$$t^0=365\frac{T}{n^0};$$

общей величины минимальных издержек –

$$C^0=\sqrt{2kQc_1T}.$$

По приведенным уравнениям можно построить графические модели этих показателей и по ним определить оптимальные решения в управлении запасами. Существуют и другие модели отображения различных сторон служб коммерческой деятельности.

Все же любая, самая изощренная модель самого простейшего объекта есть всегда упрощение, что является известным методологическим приемом. Поэтому построение моделей макросистем сопряжено с большими трудностями. Несмотря на трудности моделирования сложнейших глобальных макросистем, все же учеными были проведены работы по имитации мировых процессов, мировой динамики. Первое поколение компьютерных моделей, предназначенных для исследования долгосрочных тенденций мирового развития, появилось в начале 1970 г. Эта модель состояла из более чем 40 нелинейных уравнений и связывала 5 основных переменных: население, промышленное производство, использование невозобновляемых ресурсов, загрязнение среды и производство продовольствия. Моделирование на компьютере, проведенное в Массачусетском технологическом институте, показало, что истощение природных ресурсов вызовет в первой половине XXI века замедление роста промышленности и сельского хозяйства, затем резкое падение численности населения и в конечном итоге экологическую катастрофу. При допущении в модели возможности получения неограниченных ресурсов произойдет чрезмерное загрязнение окружающей среды и, как следствие, наступит экологическая катастрофа. Если допустить, что общество сможет найти вариант эффективной охраны природы, то тогда рост населения, промышленной и сельскохозяйственной продукции будет развиваться до тех пор, пока не исчерпаются резервы пахотной земли, что приведет опять к катастрофе. Вследствие такого компьютерного моделирования авторы предложили вариант глобального равновесия на земле, связанный со стабилизацией численности населения планеты и производства на современном уровне. Человеческая деятельность в сфере искусства, науки, просвещения, спорта может развиваться неограниченно, поскольку не требует большого расхода невосполнимых ресурсов.

В современной коммерческой практике последствия принимаемых решений касаются большого числа людей и связаны со значительными затратами трудовых ресурсов, товарных, финансовых, транспортных, энергетических и других ресурсов. Поэтому степень ответственности за последствия принимаемых решений многократно возросла, что требует более широкого использования формальных методов, изложенных в теории принятия решений.

Необходимость выбора действия обусловливается наличием противоречий, которыми наполнена коммерческая практика.

Противоречие проявляется в виде проблемы, имеющей два состояния – существующее и желаемое, причем имеется более одного способа достижения желаемого состояния (цели). У коммерсантов в такой ситуации есть несколько альтернативных вариантов решения и, следовательно, возникает задача выбора. Варианты решения различаются своими конечными результатами (последствиями, исходами). Последние характеризуют степень достижения поставленной цели. В таких случаях у лица, принимающего решение, есть свои представления о достоинствах и недостатках отдельных исходов. В реальных условиях представления о задаче обычно оказывается неполным и нечетким, отсутствует целостное восприятие и объективное отношение к последствиям.

Описание задачи выбора исключает, с одной стороны, альтернативные варианты решений, а с другой – состояние среды, которая может влиять на исход активно, сознательно или пассивно, что характеризует своеобразное столкновение, поскольку конечный результат определяется совместными состояниями или действиями. Такое положение является типичным для коммерческой сферы.

Вид связи средств и результатов определяет тип зависимости альтернатив и исходов от условий:

1) *определенности*, когда каждая альтернатива приводит к единственному исходу и, следовательно, имеется функциональная однозначная зависимость исходов от альтернатив;

2) *риска* (стохастические), когда каждая альтернатива может привести к одному из нескольких исходов, каждый из которых имеет определенную вероятность появления, т.е. имеется стохастическая зависимость исходов от альтернатив;

3) *неопределенности*, когда каждая альтернатива может привести к одному из нескольких исходов, причем даже стохастическая зависимость исходов от альтернатив отсутствует.

Субъективная информированность лица, принимающего решение о типе связи, может не совпадать с объективной, что и влияет на конечный результат.

В следующем разделе рассмотрим применение алгоритма моделирования к решению задач в коммерческой деятельности.

1.3. Математическое моделирование задач коммерческой деятельности

Любая коммерческая ситуация складывается в результате взаимодействия (поведения) совокупности элементов, составляющих организации, предприятия, объединения, концерны и т.д. Поведение элементов коммерческих служб зависит от целого ряда факторов, состояние которых предвидеть не всегда представляется возможным, например конъюнктуры на рынке, спрос населения на товары, поставки товаров из смежных отраслей народного хозяйства и т.д. Информированность о состоянии, действиях отдельных элементов систем влияет на эффективность принятых экономических решений, обусловливает необходимость и целесообразность построения моделей. Такие модели помогают иллюстрировать экономический анализ. Они показывают, что рекомендации этого анализа более соответствуют объективным условиям принятия решений, а математическая формулировка является удачной базой поиска и принятия управленческих решений в коммерческой сфере.

При выборе решения возможны различные варианты-альтернативы, которых существует множество в любой коммерческой ситуации. Предпочтительность выбора лучше проводить по количественному критерию, позволяющему сравнивать решения. Такой критерий называют показателем эффективности. Он формально отображает цель, которая преследуется в рассматриваемой ситуации. В соответствии с этим выбранное решение будет в наибольшей степени способствовать достижению цели. В качестве таких критериев могут выступать показатели: товарооборот, прибыль, издержки, доход, рентабельность, производительность труда и др.

Характерными задачами для предпринимателей являются, например, выбор типа открываемого предприятия, банка, юридического адреса, определение состава учредителей, величины уставного фонда, долей взноса учредителями в уставный фонд, видов деятельности создаваемого предприятия, выбор генерального директора, главного бухгалтера, поставщиков товаров, партнеров и др. Таким образом, необходимость заставляет постоянно решать задачи выбора. К сожалению, для правильного решения таких задач зачастую нет достаточно полного множества альтернатив для проведения выбора, что объясняет появление неверных решений и, как следствие, приводит к значительному ущербу. Например, для решения задачи приобретения автомобиля необходимо сформировать список потребительских характеристик, выявить множество торгующих организаций, установить показатели операции покупки автомобиля, группу людей, с которыми следует провести эту операцию, выбрать день покупки, затем осуществить эту операцию на практике. После выполнения всей этой работы обнаруживается, что необходимо было еще учесть решение, например, задачи «рэкета». В дальнейшем обнаруживается, что выпала из поля зрения задача своевременного выбора предприятия по антикоррозийной обработке автомобиля и т.д.

Таким образом, возникающих в процессе работы задач больше, чем представляется вначале, и по каждой из них тоже необходимо решать задачу выбора и устанавливать логическую очередность их решения. Другой особенностью при формировании исходной информации для решения задачи выбора является отсутствие в представленном множестве именно лучшего варианта, который позже, в процессе практической деятельности, может быть обнаружен. Именно тогда происходит фактическая оценка недостающей ранее информации, а проявившиеся ошибки оборачиваются ущербом и зачастую очень большим. Для решения такого класса задач существуют специальные математические методы и модели.

Коммерсантам чаще приходится принимать решения в условиях неопределенности, снижающих уверенность в действиях. В самом деле, трудно предвидеть сложности в работе, касающиеся капризов природы, объемов и времени завоза товаров в розничные и оптовые предприятия, работоспособности транспортных средств, наличия на местах продавцов, кассиров, товароведов, грузчиков, уборщиц, заведующих секциями и др. В таких случаях пытаются отыскать наиболее удачный вариант решения исходя из собственного опыта, интуиции или советов других лиц. Подобный субъективный подход, когда принятое решение затрагивает интересы большого количества людей, может быть неэффективным даже ущербным. При этом совокупность реализации состояний среды не обладает статистической устойчивостью, их нельзя отнести к категории случайных величин или функций, но принимаемые решения все же необходимо аргументировать и лучше обосновывать количественно.

Принятие решения – это процесс, итогом которого является выбор по критерию эффективности одной возможности из множества имеющихся в распоряжении. Качество решения задачи зависит от того, насколько полно известны лицу, ответственному за принятие решения, допустимые варианты управленческих воздействий. Поэтому формирование всего множества вариантов активного воздействия является важным этапом анализа.

При постановке задачи учитываются только существенные факторы. Они подразделяются на неуправляемые (ограничения) и управляемые, оптимальные значения которых необходимо найти в результате решения задачи. Поэтому вначале необходимо установить, значениями каких характеристик или переменных можно варьировать, не игнорируя при этом постоянные факторы, поскольку без их учета решения могут быть ошибочны.

Важно заметить, что для количественного анализа приходится привлекать специалистов различного профиля, что обеспечивает больший объем знаний и возможность выявления таких решений, которые не могли быть найдены при узкой профессиональной ориентации исследователей. Взаимосвязь критерия эффективности F с управляемыми показателями $x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n$ и неуправляемыми, $b_1, b_2, b_3, ..., b_j, ..., b_n$ записывается в обобщенном варианте в виде целевой функции:

$$F=f(x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n; b_1, b_2, b_3, ..., b_j, ..., b_n) \to \text{extr}.$$

В оптимизационной задаче оптимальные значения критерия соответствуют определению оптимальных значений управляемых показателей:

$$x_1^0 = ? \quad x_2^0 = ? \quad x_3^0 = ? \quad x_n^0 = ?$$

При такой постановке решения задачи возникает вопрос о построении математической модели экономических показателей, которые позволили бы определить значение критерия эффективности. Этому служат математические методы дифференцирования, интегрирования, теории игр и статистических решений, линейного и нелинейного программирования, сетевого планирования и управления, теории вероятностей, статистики, корреляционного анализа, теории массового обслуживания.

Рассмотрим общую постановку задач принятия решений в различных условиях.

Модель постановки задач выбора решений

В теории принятия решений под задачей понимается такая задача, которая может быть сформулирована в терминах цели, средств достижения цели и результата. Принятие решения – это процесс, а итогом его является выбор одной возможности достижения цели из имеющихся. Математическая модель этой задачи представляет собой формальное описание составляющих ее элементов: цели, средств, результатов, а также способа связи между средствами и результатами. Описание средств и результатов можно представить в виде двух множеств: множество X, элементы которого x называют альтернативами (из чего выбираем), и множество A, элементы которого называются исходами (к чему приходим).

Вполне очевидно, что исход определяется двумя факторами: выбором альтернативы и состоянием среды, определяемым множеством состояний Y. Тогда каждый исход a есть так называемая функция реализации двух аргументов: $a = F(x, y)$, где $x \in X, y \in Y$. Таким образом, эта функция сопоставляет исход для каждого сочетания альтернативы и состояния среды. Если множества альтернатив и состояний среды конечны, т.е.

$$X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_m),\ Y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_i, ..., y_n),$$

то функцию реализации F удобно представить в матричном виде (табл. 1.3.1).

Таким образом представляют в форме функции реализации задачи принятия решений в условиях определенности, риска и неопределенности. Приведенная классификация задач целена-

Таблица 1.3.1

F	Y_1	Y_2	...	Y_j	...	Y_n
x_1	$F(x_1, y_1)$	$F(x_1, y_2)$	...	$F(x_1, y_j)$	...	$F(x_1, y_n)$
x_2	$F(x_2, y_1)$	$F(x_2, y_2)$	...	$F(x_2, y_j)$	...	$F(x_2, y_n)$
...	...	...	...	...	...	...
x_j	$F(x_i, y_1)$	$F(x_i, y_2)$	...	$F(x_i, y_j)$	...	$F(x_i, y_n)$
...	...	...	...	...	...	...
x_m	$F(x_m, y_1)$	$F(x_m, y_2)$	...	$F(x_m, y_j)$	...	$F(x_m, y_n)$

правленно определяет подбор методов, моделей выбора управленческих решений в коммерческой деятельности.

Условия принятия решений определяются степенью информированности лица, принимающего решение, о возможностях появления тех или иных состояний среды $y \in Y$. Лицо, принимающее решение, может точно знать состояние среды, что свидетельствует о наличии определенности, или знать вероятность появления P_j каждого состояния среды y_j, что является условием частичной неопределенности. И наконец, если не располагает никакой информацией о возможностях появления состояний среды, кроме их конечного перечня состояний $y_1, y_2, ..., y_j, ..., y_n$, то это свидетельствует об условиях полной неопределенности (см. гл. 3).

Рассмотрим построение моделей и методы принятия решений в коммерческой деятельности при различных условиях.

Модели выбора решений в условиях определенности

Принятие решений в условиях определенности характеризуется детерминированной связью между принятым решением и его результатом. Задачи, возникающие в условиях определенности, называют детерминированными. В таких случаях действуют так, как это может быть при совершенной уверенности в сведениях о точности значений факторов, воздействующих на решение. В условиях определенности каждая стратегия ведет к единственному исходу, поэтому решение по ее выбору сводится к выбору исхода. Лучшая стратегия та, которая приведет к лучшему исходу, максимальной полезности, минимальным затратам, если описание исходов сведено к единственному критерию. В таких случаях при численной оценке исходов задача принятия решения сводится к нахождению экстремума целевой функции, что и указывает на оптимальность управленческого решения.

Например, в задаче планирования перевозки товаров из оптовых предприятий в торговую сеть в качестве альтернатив выступают неотрицательные значения компонентов матриц, определяющие количество товара, предназначенного для перевозки, при соответствующих ограничениях, где решением является план перевозок, а критерием выбора в целевой функции – общая стоимость перевозок. Задача принятия решений может носить одно или многошаговый характер. В таких задачах любой альтернативе соответствует вполне определенный исход, полезность которого оценивается некоторым числом. Математической моделью задачи принятия решений в условиях определенности с численной оценкой исходов является функция, заданная на множестве альтернатив.

Рассмотрим пример распределения работников коммерческой сферы по операциям. Проведенный хронометраж по затратам времени t_{ij} каждого из трех коммерсантов $m = 3$ на выполнение трех операций представлен в виде матрицы (табл. 1.3.2).

Таблица 1.3.2

Коммерсанты	Затраты времени t_{ij} на выполнение операций, ч					
	1 – закупка		2 – сбыт		3 – перевозка	
Иванов	$t_{11} = 2$	$x_{11} = 1$	$t_{12} = 2$	$x_{12} = 0$	$t_{13} = 4$	$x_{13} = 0$
Сидоров	$t_{21} = 3$	$x_{21} = 0$	$t_{22} = 3$	$x_{22} = 0$	$t_{23} = 2$	$x_{23} = 1$
Петров	$t_{31} = 6$	$x_{31} = 0$	$t_{32} = 1$	$x_{32} = 1$	$t_{33} = 5$	$x_{33} = 0$

Допустим, если коммерсант i назначен на выполнение операции j, то $x_{ij} = 1$, иначе $x_{ij} = 0$. Решением задачи является матрица распределения X коммерсантов по операциям.

Для оценки исходов используем в качестве критерия общее число человеко-часов T, необходимых для выполнения всех операций. Из условия задачи следует, что каждой стратегии S_k соответствует альтернативное сочетание распределения по операциям. Количество стратегий определяется числом возможных перестановок $P_n = n! = 3! = 6$. Следовательно, мы имеем шесть альтернативных стратегий, каждая из которых приводит к исходу, определяемому целевой функцией вида

$$T_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Проведенные вычисления исходов для каждой стратегии представлены в виде матрицы исходов (табл. 1.3.3), из которой оптимальную стратегию S_t находят по минимальной величине общих затрат $T_6 = 5$ чел.-ч на все операции.

Таблица 1.3.3

Стратегии S_k	Исходы T_k (чел.-ч)
S_1 $(x_{12} = x_{22} = x_{31} = 1)$	$T_1 = 4 + 3 + 6 = 13$
S_2 $(x_{12} = x_{23} = x_{31} = 1)$	$T_2 = 2 + 2 + 6 = 10$
S_3 $(x_{11} = x_{22} = x_{33} = 1)$	$T_3 = 2 + 3 + 5 = 13$
S_4 $(x_{13} = x_{21} = x_{32} = 1)$	$T_4 = 4 + 3 + 1 = 8$
S_5 $(x_{12} = x_{21} = x_{33} = 1)$	$T_5 = 2 + 3 + 5 = 10$
S_6 $(x_{11} = x_{23} = x_{32} = 1)$	$T_6 = 2 + 2 + 1 = 5$

Результаты решения задачи занесены в матрицу распределения (табл. 1.3.3), где значения $x_{11} = x_{23} = x_{32} = 1$ указывают на распределение коммерсантов по операциям.

Сложности решения проблемы коммерческой сферы даже в таких условиях определенности могут быть значительно большими, чем кажется на первый взгляд. Они увеличиваются при расширении масштабов задачи, когда растет число альтернативных стратегий S_k. Так, например, в задаче распределения для 10 работников по 10 операциям число стратегий увеличивается до $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$. Очевидно, все стратегии и исходы в этом случае труднообозримы. Однако эту задачу можно легко решить с помощью специальных методов, для чего следует представить ее в виде задачи линейного программирования:

найти такие неотрицательные значения переменных $x_{ij} \geq 0$, которые бы обеспечили минимум функции цели

$$T_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \to \min$$

при следующих условиях-ограничениях

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n; \\ x_{ij} \in \{0;\ 1\}. \end{cases}$$

В такой формулировке решение задачи можно получить, используя метод целочисленного линейного программирования.

Следует заметить, что исход решения в некоторых задачах может быть исчерпывающе описан двумя показателями, например затратами ресурсов и объемом выгоды – прибыли, дохода и т.д. В других задачах оценку и сравнение исходов необходимо проводить по нескольким показателям, которые могут носить противоречивый характер, т.е. улучшение одних показателей приводит к ухудшению других. Такие задачи называют многокритериальными. В них, как правило, не существует исхода, наилучшего сразу по всем показателям, поэтому оптимальное решение чаще всего является компромиссным.

Рассмотрим другой интересный пример моделирования задач коммерческой деятельности при задании *отношений предпочтения* на множестве альтернатив.

При выборе одного решения возможны различные варианты-альтернативы, которых существует множество в любой коммерческой ситуации. Предпочтительность выбора проводят по количественному критерию, позволяющему сравнивать разные решения. Такой критерий называют показателем эффективности. Он формально отображает цель, которая преследуется в рассматриваемой ситуации. В качестве таких критериев могут выступать различные показатели: товарооборот, прибыль, издержки, доход, рентабельность, производительность труда и др.

В этом случае при формулировании цели необходимо определить худший и лучший варианты ее реализации. Одной из характеристик цели является связанное с ней предпочтение на множестве возможных исходов. Тогда можно построить отношение предпочтения этого множества. Выявить предпочтение из множества A значит указать множество всех пар, для которых a_i предпочтительнее a_j, т.е. задать отношение предпочтения в явном виде. Отношение предпочтения обозначают знаком $\succ$, полагая, что это есть отношение доминирования, тогда $b_{ij} = 2$, при этом $b_{ji} = 0$, а отношение безразличия – знаком $\sim$, тогда $b_{ij} = b_{ji} = 1$. В таком случае лицо, выбирающее решение, может провести попарное сравнение всех объектов этого множества, указав для каждой пары (a_i, a_j) наличие или отсутствие предпочтения. Например, можно осуществить выбор среди напитков: фанта, пепси, компот, чай, кофе, или мест будущей работы. Выявленное предпочтение можно представить в виде матрицы доминирования – безразличия на основе субъективного представления. Однако в большинстве случаев личность в коммерческой сфере является носителем интересов какой-либо организации, поэтому выявление предпочтений должно базироваться на логических, причинно-следственных, а не на личностно-психологических мотивах.

В практической деятельности приходится рассматривать сложные объекты, которые невозможно целостно сопоставить. В таких случаях выделяют существенные показатели этих объектов, а затем проводят сравнение их значений. При этом первичная информация задается в виде таблицы значений показателей, где представлены множество сравниваемых объектов a, a_2, a_3, ..., a_i, ..., a_m, все наименования показателей P_1, P_2, P_3, ..., P_j, ..., P_n и значения этих показателей по каждому объекту $p_1(a_1)$, $p_2(a_2)$, $p_3(a_3)$, ..., $p_j(a_i)$, ..., $p_n(a_m)$.

Для выявления предпочтения необходимо ввести систему решающих правил. Например, если по каждому показателю $p_j(a_i)$

можно вычислить его вес M_j, определяющий его значимость, то взвешенную сумму этих показателей можно рассматривать как суммарную оценку объекта a_i:

$$F(a_i) = \sum_{i=1}^{n} M_j p_j(a_i).$$

Тогда можно ввести решающее правило: a_i предпочтительнее a_j, если $F(a_i) > F(a_j)$. По указанной системе решающих правил отношение, выражающее доминирование, определяется построением матрицы попарного сравнения В, элемент которой определяется таким образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } P_1 \text{ равнозначен } P_2; \\ 0, \text{ если } P_1 \text{ менее значим, чем } P_2; \\ 2, \text{ если } P_1 \text{ доминирует над } P_2. \end{cases}$$

Рассмотрим решение задачи выбора легкового автомобиля марки ВАЗ. Прежде всего формируем множество автомобилей, которые выпускаются серийно и представлены в продаже: ВАЗ-1111, 2110, 2111, 21043, 2115, 21051, 21053, 2106, 21061, 21063, 2107, 21072, 21074, 2108, 21081, 21083, 2109, 21093, 2199, 2121 – около 20 моделей. Для анализа ограничим это множество только базовыми моделями: ВАЗ-2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 21099, 2121 (табл. 1.3.4).

Теперь необходимо сформировать множество показателей, по которым можно провести сравнение автомобилей. Выпишем из руководства по эксплуатации автомобилей наиболее существенные показатели (табл. 1.3.5).

Сопоставим эти показатели с помощью метода парных сравнений, а результаты запишем в таблицу 1.3.6.

После заполнения матрицы элементами сравнения находим по строкам суммы баллов по каждому показателю:

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij},$$

где n – количество показателей, $n = 11$.

Таблица 1.3.4

Модель автомобиля	Рабочий объем двигателя, л	Мощность двигателя, л.с.	Длина, мм	Снаряженная масса, кг	Время разгона до 100 км/ч, с	Максимальная скорость, км/ч	Расход топлива на 100 км, л			Год начала выпуска
							при 90 км/ч	при 120 км/ч	при городском цикле	
ВАЗ-2104	1,294	69	4115	1020	18,5	137	7,5	10,2	10,2	1984
ВАЗ-2105	1,294	69	4130	955	18	145	7,3	10,2	10,2	1979
ВАЗ-2106	1,568	80	4166	1045	16	154	7,7	10,5	10,7	1975
ВАЗ-2107	1,451	77	4145	1030	15	152	7,9	10,7	10,9	1982
ВАЗ-2108	1,289	65	4006	900	15	150	5,9	8,2	8,4	1984
ВАЗ-2109	1,289	64	4006	915	18	148	5,7	7,8	8,6	1987
ВАЗ-21099	1,499	75	4205	970	14	153	5,8	7,9	8,6	1988
ВАЗ-2121	1,568	80	3720	1150	23	132	10,5	13,1	13,4	

Таблица 1.3.5

Показатель	Обозначение	Единица измерения	Показатели ВАЗ	
			2106	2105
Вместимость	Чм	чел.	5	5
Снаряженная масса	См	кг	1035	955
Дорожный просвет	Дп	мм	170	170
Максимальная скорость	Vмах	км/ч	154	145
Время разгона до 100 км/ч	Т р	с	16	18
Расход топлива на 100 км	Рт	л	7,7	7,3
Мощность	М	л.с.	80	69
Емкость топливного бака	Еб	л	39	39
Рабочий объем двигателя	Ро	л	1,57	1,3
Число цилиндров	Чц	шт.	4	4
Длина	Дл	мм	4165	4130
Цена	Ц	долл.	6000	5700

Таблица 1.3.6

	$Ч_м$	$С_м$	$Д_п$	$У_м$	$Т_р$	$Р_т$	М	$Е_б$	$Р_о$	$Ч_ц$	$Д_л$	S_i	M_i	R_i
$Ч_м$	1	0	2	0	0	0	0	2	0	2	2	9	0,0743	7
$С_м$	2	1	2	0	1	0	0	2	0	2	2	12	0,0992	6
$Д_п$	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	2	5	0,0413	9
$V_м$	2	2	2	1	0	0	0	2	0	2	2	13	0,1074	5
$Т_р$	2	1	2	2	1	0	1	2	0	2	2	15	0,123	4
$Р_т$	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	21	0,173	1
М	2	2	2	2	1	0	1	2	2	2	2	18	0,148	2
$Е_б$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	3	0,025	10
$Р_о$	2	2	2	2	2	0	0	2	1	2	2	17	0,140	3
$Ч_ц$	0	0	2	0	0	0	0	2	0	1	2	7	0,057	8
$Д_л$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0,008	11

Правильность заполнения матрицы определяется равенством

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = n^2 = 121.$$

Затем определяем вес показателей по формуле

$$M_i = \frac{S_i}{n^2} = \frac{S_i}{121}.$$

Следует заметить, что

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 1{,}0.$$

Приоритет показателей распределяется по рангу, который пропорционален значению коэффициента веса: чем больше его значение, тем выше ранг, причем наибольшему значению M_i соответствует $R_i = 1$. На этом основании ранжированный перечень потребительских характеристик автомобиля будет иметь следующий вид:

1. $Р_т$ – расход топлива на 100 км, л;
2. М – мощность двигателя, л.с.;
3. $Р_о$ – рабочий объем двигателя, л;
4. $Т_р$ – время разгона до 100 км/ч, с;
5. $V_{мах}$ – максимальная скорость, км/ч;
6. $С_м$ – снаряженная масса, кг;
7. $Ч_м$ – вместимость, чел.;
8. $Ч_ц$ – число цилиндров, шт.;
9. $Д_п$ – дорожный просвет, км;
10. $Е_б$ – емкость топливного бака, л;
11. $Д_л$ – длина, мм.

Предварительный анализ показателей, проведенных в табл. 1.4, указывает на необходимость вернуться к более четкой формулировке цели, например определить назначение применения автомобиля. Так, автомобиль ВАЗ-2121 («Нива»), очень удобный в условиях бездорожья сельской местности, для города менее комфортен, чем другие автомобили. ВАЗ-2104 («Универсал») тоже имеет свои особенности, которые некоторых покупателей не устраивают. Кроме того, ВАЗ-2107, 2108, 2109, особенно ВАЗ-21099, 2110 – самые угоняемые автомобили, поэтому в перечне для анализа оставлены модели ВАЗ-2105 и 2106. Для проведения выбора введем балльную оценку показателей, например Ц, $Р_т$, М, $Р_о$, $Т_р$, $V_{мах}$. Предположим, что чем лучше качественное содержание показателя, тем выше балл. Тогда, используя данные табл. 1.3.4, можно построить следующую матрицу балльных оценок показателей (табл. 1.3.7).

Таблица 1.3.7

	1	2	3	4	5	M_i
Ц	9000	8000	7500	6000	5800	0,16
$V_{мах}$	125	140	145	150	155	0,09
$Т_р$	23	18	16	15	14	0,104
$Р_о$	1100	1289	1294	1451	1568	0,118
М	65	70	75	77	80	0,125
$Р_т$	10,5	7,7	7,3	5,8	5,7	0,145

На основе данных табл. 1.3.7 можно определить значения интегральных оценок автомобилей без учета цены:

$$F(2105) = 0{,}1074 \cdot 3 + 0{,}123 \cdot 2 + 0{,}14 \cdot 3 + 0{,}148 \cdot 2 + 1{,}173 \cdot 3 = 1{,}8;$$

$$F(2106) = 0{,}1074 \cdot 5 + 0{,}123 \cdot 3 + 0{,}14 \cdot 5 + 0{,}148 \cdot 5 + 1{,}173 \cdot 2 = 2{,}692.$$

Поскольку $F(2106) > F(2105)$, следует покупать автомобиль ВАЗ-2106.

Можно воспользоваться и другой системой решающих правил. Считаем, что, например, автомобиль a_1 доминирует над a_2, если:

1) число показателей, по которым автомобиль a_1 лучше a_2 больше, чем число показателей, по которым автомобиль a_2 лучше автомобиля a_1;

2) для автомобиля a_1 ни один из показателей не принимает наименьшего (наихудшего) значения.

При использовании этой системы решающих правил, учитывая балльную оценку и попарно сравнивая указанный перечень характеристик, получим следующую матрицу:

α	2105	2106	Σ
2105	0	0	0
2106	1	0	1

В соответствии с этими правилами выбор приходится тоже на автомобиль ВАЗ-2106.

Следующим шагом можно ввести сравнение по критерию «цена/качество», для чего надо исключить показатель «цена» из метода парных сравнений, что позволит вычислить показатель «качество».

Если предположить, что интегральные оценки отображают качество автомобилей, то выбор можно проводить по отношению цена/качество:

$$\min\left(\frac{Ц_i}{Q_i}\right) = \min\left(\frac{5800}{1{,}832};\ \frac{6000}{2{,}692}\right) = \min\,(3166;\ 2229) = 2229 \to \text{ВАЗ-2106}.$$

После обсуждения решения задачи на площадке предпродажной подготовки можно установить еще дополнительный перечень характеристик операции приобретения автомобиля: продолжительность операции, возможность страховки, обеспеченность рынка запасными частями, ремонтопригодность, наличие оперативной ремонтной службы, затраты на доводку купленного автомобиля, вероятность угона, наличие гаража, год начала выпуска марки модели автомобиля, совокупные годовые затраты, затраты на выбор лучшего автомобиля в магазине, сезон, месяц года покупки, затраты на операцию, наличие модели хронологической последовательности выполнения операции (предусмотрительность), цена, модель истории стоимостных и временных затрат по обслуживанию автомобиля на 100 км пробега, диагностика и советы в момент обращения. Используя метод парных сравнений, проводим ранжирование этих показателей:

1. $В_у$ – вероятность угона;
2. Ц – цена, руб.;
3. $Н_г$ – наличие гаража;
4. $С_{га}$ – совокупность годовых затрат;
5. $О_{пр}$ – наличие оперативной ремонтной службы;
6. $О_б$ – обеспеченность рынка запасными частями;
7. $З_д$ – затраты на доводку купленного автомобиля;
8. Р – ремонтопригодность;
9. $З_а$ – затраты на выбор автомобиля;
10. $З_{оп}$ – затраты на операцию;
11. $С_{тр}$ – возможность страховки;
12. $М_{од}$ – наличие модели выполнения операции;
13. $С_{оз}$ – сезон, время года покупки;
14. $Г_в$ – год начала выпуска модели автомобиля;
15. $Т_{оп}$ – продолжительность операции.

На основе полученных результатов можно провести более аргументированное обоснование выбора решения.

По аналогии можно моделировать и другие задачи выбора решений в коммерческой деятельности.

Контрольные вопросы

1. Что такое аналогия?

2. Каково определение терминов «модель» и «экономико-математическая модель»?

3. Приведите примеры моделей из различных сфер деятельности человека.

4. Какие примеры видов изображения моделей вы можете привести?

5. Каких вы знаете модельеров?

6. Каково определение термина «моделирование»?

7. Каково определение терминов «цель», «критерий», «управление»?

8. Зачем нужен алгоритм моделирования?

9. Каковы этапы алгоритма моделирования?

Задачи

Проведите моделирование процесса выбора товара на основе следующих данных:

1. Швейцарские механические мужские наручные часы

Фирма	Калибр, мм	Число функциональных камней	Точность хода, с/сутки	Время непрерывной работы, ч	Водонепроницаемость, м	Дополнительно, шт.			Цена, долл.
						циферблат	шкалы	функции	
Breitling	36,0; 5,4	31	±0,2	42	100	3	1	1	320
Bucherer	29,6; 3,58	25	±2,8	38	30	1	0	0	210
Longines	32,0; 3,85	27	–0,8	42	30	1	1	1	230
Omega	27,2; 3,16	37	0,05	48	100	1	0	0	260
Rado	23,5; 3,2	25	±2	40	200	1	0	2	350
Tissot	34,2; 4,2	25	±1,5	42	150	1	0	0	350

2. Микроволновые печи

Фирма	Объ-ем, л	Мощ-ность, кВт	Гриль	Кон-век-ция	Покрытие	Управле-ние	Цена, долл.
Moulinex	27	0,9	+	Есть	Нержавею-щая сталь	Сенсор-ное	540
Panasonic	36	0,8	+	Есть	Керамичес-кое	Сенсор-ное	820
Samsung	17	0,8	—	Нет	Термостой-кое	Механи-ческое	149
Sharp	24	0,85	—	Есть	Нержавею-щая сталь	Сенсор-ное	445
Whirlpool	27	1,0	+	Есть	Нержавею-щая сталь	Сенсор-ное	399

3. Холодильники

Страна-изгото-витель	Модель	Вес, кг	Га-ран-тия, лет	Срок служ-бы, лет	Габариты, см×см×см	Объем камер		Цена, долл.
						моро-зиль-ной, л	холо-диль-ной, л	
Россия	Stinol	78	3	15	185×60×60	80	235	310
Таиланд	Sharp	69	1	10	170×60×70	96	270	750
Южная Корея	Samsung	56	2	10	160×60×65	93	280	450
Испания	Bosch	52	2	10	155×55×60	54	194	410
Южная Корея	LG	69	1	10	170×60×63	110	230	600
Южная Корея	Daewoo	71	1	7	175×75×75	138	280	840
Швеция	Electrolux	75	2	15	175×60×60	127	186	680

4. Трубки сотового телефона

Модель	Вес с батареей, г	Габариты В×Ш×Г, мм	Режим непрерывных разговоров, ч	Режим ожидания, ч	Наличие меню на русском языке	Количество строк в дисплее	Цена МТС, долл.
Ericson A1018	163	130×49×27	3,5	100	Нет	3	162
Ericson T18s	146	105×49×24	4	100	Нет	3	342
Motorola V3188	218	139×48×25	6	50	Нет	4	131
Motorola V3688	83	82×43×26	3	100	Есть	7	630
Nokia 6150	142	129×47×28	2 ч 30 мин	60–270	Есть	5	328
Nokia 8850	91	110×44×17	2 ч – 3 ч 20 мин	50–150	Есть	5	840

5. Составьте матрицу оценки потребительских характеристик автомобилей, выпускаемых на Волжском автозаводе (ВАЗ).

6. Определите перечень потребительских характеристик автомобилей ВАЗ, используя информацию о их продаже.

7. Составьте перечень потребительских характеристик фирм, торгующих автомобилями, и проведите операцию выбора одной из них.

8. Проведите сравнение предлагаемых к постройке или продаже вариантов деревянных бань на основе рекламных сообщений, например из газеты «Экстра-М», по следующим характеристикам: пожаробезопасность, вентилируемость, время получения температуры 70°С воздуха, а затем воды, функциональные возможности, стоимость, время постройки или установки бани «под ключ», штрафные санкции по пунктам договора, наличие удовлетворенных покупателей фирмы.

9. Сформируйте перечень туристских фирм по наличию тура в какую-либо страну, например Египет, затем составьте перечень

характеристик этих фирм и тура, проведите операцию выбора фирмы по реализации поездки в Египет (см. п. 6.5).

10. Стиральные машины

Показатели	Indesit	Siemens	Bosch	Вятка
1. Цена, руб.	7020	7254	13754	5720
2. Загрузка, кг	5	4,5	6	5
3. Количество программ	8	11	18	6
4. Число оборотов при отжиме	400	800	1000	400
5. Габариты, см	85×60×51	85×60×53	85×60×59	85×80×60
6. Потребляемая мощность, кВт · ч	2,2	2,3	2,2	2,5
7. Среднее время стирки, ч	2,3	2,3	2,2	2,5
8. Эксплуатационные затраты на 1 стирку, руб.	5,36	5,36	5,36	7,64
9. Количество стирок в год	100	150	75	100
10. Затраты на ремонт, руб.				
1-й год	100	100	100	50
2-й год	200	200	200	100
3-й год	200	200	200	200
4-й год	1000	1000	1000	500
5-й год	100	100	100	300
11. Итого затраты на ремонт, руб.				
1-й год	100	100	100	50
2-й год	300	300	300	150
3-й год	500	500	500	350
4-й год	1500	1500	1500	850
5-й год	1600	1600	1600	1150
12. Сумма затрат на 1 стирку, руб.				
1-й год	6,36	6,02	6,39	8,14
2-й год	6,86	5,36	7,36	8,39
3-й год	7,02	6,47	7,58	8,8
4-й год	9,11	7,86	10,36	9,76
5-й год	8,56	7,49	9,62	9,94

11. Фотоаппараты

Характеристика	OLYMPUS LT-1 QD	PENTAXEs-pio Mini	YASHICA T5	PRACTICA P 90AF Mini II
Цена, у.е.	1220	1078	1023	601
Страна-изготовитель	Китай	Филиппины	Япония	Германия
Гарантийный срок, мес.	6	12	12	6
Габариты: ширина × высота × толщина, мм	117×67×38	107×58×35	118×64,5×35	116,5×63,5××40,8
Масса без батареек, г	200	155	190	182
Защита объектива	Чехол	Крышка	Шторки	Стекло
Ресурс 1 комплекта батареек, 24-кадр. пленки	20	30	20	15
Фокусное расстояние, мм	35	32	35	29
Минимальная дистанция, м	0,35	0,3	0,35	0,5
Диапазон выдержки, с: со вспышкой без вспышки	 единый 1/500-1/15	 1/4001/50 1/400-2	 1/700-1/60 1/700-1	 единый 1/250-1/4
Диапазон диафрагмы	3,5-16	3,5-16	3,5-15,5	4,5-н/д
Видоискатель	Станд.	Уменьш.	Станд. + уменьш.	Станд.
Диапазон чувствительности	50-32000	25-32000	50-3200	100/200; 400

ГЛАВА 2

МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В настоящее время множество задач планирования и управления в отраслях народного хозяйства, а также большой объем частных прикладных задач решаются методами математического программирования. Наиболее развитыми в области решения оптимизационных задач являются методы линейного программирования. Эти методы позволяют описать с достаточной точностью широкий круг задач коммерческой деятельности, таких, как: планирование товарооборота; размещение розничной торговой сети города; планирование товароснабжения города, района; прикрепление торговых предприятий к поставщикам; организация рациональных перевозок товаров (транспортная задача); распределение работников торговли по должностям (задача о назначении); организация рациональных закупок продуктов питания (задача о диете); распределение ресурсов; планирование капиталовложений; оптимизация межотраслевых связей; замена торгового оборудования; определение оптимального ассортимента товаров в условиях ограниченной площади; установление рационального режима работы.

В задачах линейного программирования критерий эффективности и функции в системе ограничений линейны.

Если содержательный смысл требует получения решения в целых числах, то такая задача является задачей целочисленного программирования.

Если в задаче математического программирования имеется переменная времени, а критерий эффективности выражается через уравнения, описывающие течение операций во времени, то такая задача является задачей динамического программирования.

Во многих экономических моделях зависимости между постоянными и переменными факторами можно считать линейными.

Использование методов математического программирования в коммерческой деятельности связано со сбором необходимой информации коммерсантом, экономистом, финансистом, затем постановкой задачи вместе с математиком. Поскольку методы математического программирования уже реализованы на компьютере в виде пакета стандартных программ, то доступ к ним обычно прост, автоматизирован и не составляет особых трудностей.

2.1. Общая задача линейного программирования

Постановка задачи коммерческой деятельности может быть представлена в виде математической модели линейного программирования, если целевая функция может быть представлена в виде линейной формы, а связь с ограниченными ресурсами описывается посредством линейных уравнений или неравенств. Кроме того, вводится дополнительное ограничение – значения переменных должны быть неотрицательны, поскольку они представляют такие величины, как товарооборот, время работы, затраты и другие экономические показатели.

В целом экономико-математическая формулировка и модель **общей задачи линейного программирования** (ОЗЛП) имеют следующий вид:

найти максимальное (минимальное) значение линейной целевой функции

$$F(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max(\min) \tag{2.2.1}$$

при условиях-ограничениях:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,k}; & (2.2.2) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i, \quad i = \overline{k+1,m}, \quad k \le m; & (2.2.3) \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,l}; \ l \le n, & (2.2.4) \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины.

Стандартной задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения целевой функции (2.2.1) при выполнении условий (2.2.2) – нетривиальных и (2.2.4) – тривиальных.

Канонической (или основной) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения целевой функции (2.2.1) при выполнении условий (2.2.3) и (2.2.4).

Для перехода от стандартной формы записи задачи линейного программирования к канонической необходимо ограничение – неравенство исходной задачи линейного программирования, имеющее вид «≤», преобразуется в ограничение – равенство с добавлением к левой части дополнительной неотрицательной переменной. Ограничение – неравенство вида «≥» преобразуется в ограничение – равенство вычитанием из левой части дополнительной неотрицательной переменной.

В системе из m линейных уравнений с n переменными базисными (*основными*) называются любые m переменные, если соответствующий им определитель матрицы коэффициентов отличен от нуля, а остальные $(n-m)$ переменные называются свободными (неосновными).

В базисном решении все $(n-m)$ свободные переменные равны нулю.

Допустимое базисное решение (*опорный план*) содержит только неотрицательные переменные, среди которых свободные равны нулю.

Допустимое базисное решение является **невырожденным**, если все базисные переменные строго положительны, и **вырожденным** – в противном случае.

Оптимальное решение задачи линейного программирования совпадает с одним из ее допустимых базисных решений.

Совокупность чисел $\bar{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих тривиальным и нетривиальным ограничениям задачи, называется допустимым решением (или в экономических задачах – **планом).** Совокупность допустимых решений формирует область допустимых решений (*ОДР*).

План $\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, при котором целевая функция задачи принимает экстремальное значение, называется **оптимальным.**

В случае, когда требуется найти минимум функции $F(X) = (c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n)$, можно перейти к нахождению максимума функции $F_1(X) = -F(X) = -(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n)$, так как $\min F(X) = -F_1(X)$, тогда полученное решение целевой функции следует записать с обратным знаком.

Контрольные вопросы

1. Каковы особенности задач линейного программирования?
2. Какое решение системы линейных уравнений является планом?
3. Что называют планом ОЗЛП, опорным планом, оптимальным планом?
4. Какой опорный план называется вырожденным, невырожденным?
5. Как привести к канонической форме ОЗЛП: а) если требуется найти минимум линейной функции цели; б) если функциональные ограничения заданы в виде неравенств разного вида $\geq$ и $\leq$?

2.2. Постановка задач коммерческой деятельности

Рассмотрим примеры задач коммерческой деятельности, построения экономико-математических моделей, преобразования их к общей и канонической задаче линейного программирования.

2.2.1. Коммерческая деятельность предприятия

Коммерческому отделу поручили проанализировать совместную деятельность подразделений фабрики по изготовлению и продаже двух видов краски для внутренних (В) и наружных (Н) работ, которая поступает в продажу по цене 3 тыс. руб. и 2 тыс. руб. за 1 т. Для производства красок используют два вида сырья А и В, максимально возможные суточные запасы которых составляют 3 т и 4 т. Расходы сырья на производство 1 т красок приведены в табл. 2.2.1.

Таблица 2.2.1

Сырье	Расход сырья на 1 т краски, т		Запасы сырья, т
	наружных работ, Н	внутренних работ, В	
А	0,5	1,0	3
В	1,0	0,5	4
Цена 1 т, тыс. руб.	2	3	

Изучение конъюнктуры спроса на рынке сбыта показало, что суточный спрос на краску для внутренних работ никогда не превышал спроса на краску для наружных работ более чем на 1,5 т, а спрос на краску для внутренних работ никогда не превышал 2 т в сутки. Какое количество краски каждого вида необходимо производить, чтобы доход от ее реализации был максимальным?

Кроме того, известно, что план фабрики должен предусмотреть обязательный выпуск красок, производство которых не опускалось ниже 0,25 т, для красок для наружных работ и ниже 0,5 т – для красок для внутренних работ.

Построение экономико-математической модели задачи

Поскольку в задаче необходимо определить объемы производства для продажи краски, то суточные объемы производства красок для наружных и внутренних работ обозначим $x_н$ и $x_в$ тонн соответственно.

Критерием, по которому определяется степень достижения поставленной цели, является доход от продажи краски, который должен быть максимально возможным. На этом основании целевую функцию можно записать таким образом:

$$F(\overline{X}) = (2x_н + 3x_в) \to \max.$$

Решение любой задачи осуществляется в рамках ограниченных ресурсов. В данном случае необходимо учесть ограничения на расход сырья, запасы которого на фабрике небесконечны, а также ограничения на спрос краски. Математически эти ограничения можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} 0{,}5x_{н} + x_{в} \le 3 \text{ – запасы сырья А,} \\ x_{н} + 0{,}5x_{в} \le 4 \text{ – запасы сырья В,} \\ x_{в} - x_{н} \le 1{,}5 \text{ – соотношение спроса на краски,} \\ x_{в} \le 2 \text{ – максимальная величина спроса на краску В.} \end{cases}$$

Объемы производства и соответственно продажи краски не могут принимать отрицательных значений. В связи с этим необходимо записать тривиальное условие неотрицательности переменных: $x_{н} \ge 0$; $x_{в} \ge 0$.

Таким образом, в целом экономико-математическую модель задачи можно представить в таком виде.

Определить суточные объемы производства красок – вектор

$$\overline{X} = (x_{н}, x_{в}),$$

который при заданных условиях-ограничениях

$$\begin{cases} 0{,}5x_{н} + x_{в} \le 3; \\ x_{н} + 0{,}5x_{в} \le 4; \\ x_{в} - x_{н} \le 1{,}5; \\ x_{в} \le 2; \\ x_{н} \ge 0{,}25; \\ x_{в} \ge 0{,}5 \end{cases}$$

обеспечивает максимальный доход от продажи краски в соответствии с целевой функцией

$$F(\overline{X}) = (2x_{н} + 3x_{в}) \to \max.$$

Полученная модель является задачей линейного программирования, так как все входящие в нее функции линейны. Решение задачи такого класса возможно с использованием либо геометрического, либо алгебраического симплексного методов, которые рассмотрены ниже в п. 2.3.1 и 2.3.2.

2.2.2. Планирование товарооборота

Коммерческое предприятие реализует товары нескольких групп: $A_j (j = \overline{1,\ n})$. Для реализации этих товаров используются ресурсы с ограниченным объемом: b_1 – рабочее время (чел.-ч); b_2 – площадь залов (м^2); b_3 – издержки обращения (руб.). Известны нормы расхода каждого вида ресурса на реализацию единицы j-й группы товара – a_{ij} $(i = \overline{1,3}; j = \overline{1,\ n})$. Доход от продажи в расчете на единицу товара составляет c_j.

Необходимо составить оптимальный план товарооборота по критерию максимума дохода (или по другому критерию – минимум издержек обращения).

Построение экономико-математической модели задачи

Известно, что величина дохода линейно связана с объемом продажи товаров x_j. В связи с этим целевую функцию можно записать в виде

$$F(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max.$$

Очевидно, что объем продажи товаров не может быть отрицательной величиной. Поэтому $x_j \geq 0, j = \overline{1,\ n}$.

Учитывая нормы затрат ресурсов и их объемы, запишем ограничения в виде системы:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x \leq b_1; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \leq b_2; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{3j}x_j \leq b_3; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Решение задачи можно получить с помощью симплексного метода, рассмотренного ниже в п. 2.3.2.

2.2.3. Производственная задача

Предприятие изготавливает несколько видов продукции, расходуя на это изготовление различные виды сырья. Запасы сырья ограничены. Доход, получаемый от реализации каждого вида продукции, различен. Необходимо составить такой план выпуска продукции, при котором доход предприятия был бы максимальным.

Для изготовления n видов продукции $P_j(1 \le j \le n)$ используется m видов сырья $S_i(1 \le i \le m)$.

Запасы сырья составляют $b_i(i = \overline{1, m})$. Нормативы затрат сырья на изготовление единицы продукции составляют a_{ij}. Доход, получаемый от реализации единицы продукции j-го вида, составляет D_j, $(j = \overline{1, n})$.

Необходимо составить такой план выпуска продукции, при котором доход от ее реализации будет максимальным.

Построение экономико-математической модели задачи

Обозначим x_j количество единиц продукции j-го вида $(j = \overline{1, n})$, запланированных к производству. Тогда целевая функция будет иметь вид:

$$F(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} D_j \cdot x_j \to \max.$$

Для изготовления всей продукции потребуется $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j$ единиц сырья i-го вида. Поскольку его количество ограничено величиной b_i, получаем неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Учитывая нормативы затрат и ограничения на ресурсы, запишем систему неравенств:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j \le b_1; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot x_j \le b_2; \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \cdot x_j \le b_n; \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Рассмотрим примеры построения экономико-математических моделей.

Пример 1. Построить экономико-математическую модель определения структуры выпуска первых и вторых блюд предприятия общественного питания при заданном квартальном плане товарооборота 270 тыс. руб. и получении максимального дохода на основе данных, приведенных в табл. 2.2.2.

Таблица 2.2.2

Ресурсы	Плановый фонд ресурсов	Нормативные затраты ресурсов на 100 блюд				
		1-е блюда	2-е мясные	2-е рыбные	2-е молочные	2-е прочие
Затраты труда на производство, чел.-ч	78 000	3,4	5,0	38,0	2,6	23
Затраты труда на обслуживание, чел.-ч	130 000	2,1	5,2	5,1	2,8	3
Издержки производства и обращения, руб.	16 300	4,3	6,9	6,7	26	4,1
Доход, руб.		1,3	2,0	1,5	0,3	1,7
Товарооборот, руб.	270 000	25	37	23	22	20

Экономико-математическая модель задачи имеет следующий вид.

Найти такое количество выпускаемых блюд – вектор

$$\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_5),$$

которое при заданных ограничениях по использованию ресурсов, представленных в виде системы линейных неравенств

$$\begin{cases} 3{,}4x_1 + 5x_2 + 38x_3 + 2{,}6x_4 + 23x_5 \le 78\,000, \\ 2{,}1x_1 + 5{,}2x_2 + 5{,}1x_3 + 2{,}8x_4 + 3x_5 \le 130\,000, \\ 4{,}3x_1 + 6{,}9x_2 + 6{,}7x_3 + 26x_4 + 4{,}1x_5 \le 16\,300, \\ 25x_1 + 37x_2 + 23x_3 + 22x_4 + 20x_5 \le 270\,000, \\ x_j > 0; \quad j = \overline{1, 5} \end{cases}$$

обеспечивает максимум дохода в соответствии с целевой функцией вида

$$F(\overline{X}) = (1{,}3x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + 0{,}3x_4 + 1{,}7x_5) \to \max.$$

Пример 2. Построить экономико-математическую модель определения структуры выпуска блюд на предприятии общественного питания, обеспечивающую максимальный доход на основе заданных объемов, ресурсов и нормативов затрат продуктов на первые и вторые блюда, представленных в табл. 2.2.3.

Таблица 2.2.3

Ресурсы	Плановый фонд ресурсов	Нормативные затраты ресурсов на 100 блюд				
		1-е блюда	2-е мясные	2-е рыбные	2-е молочные	2-е прочие
Мясо, кг	40 000	4,0	8,0	–	–	3,8
Рыба, кг	25 000	2,5	–	10	–	–
Овощи, кг	27 000	3,2	2,0	3,0	–	4,6
Мука, крупа, кг	20 000	2,1	2,6	2,3	–	2,8
Молоко, л	50 000	6,5	–	–	21	–
Доход, руб.		1,3	2,0	1,5	0,3	1,7

Экономико-математическая модель задачи имеет следующий вид.

Найти такое количество выпускаемых блюд – арифметический вектор

$$\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_5),$$

который при заданных ограничениях

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 3{,}8x_5 \le 4000, \\ 2{,}5x_1 + 0x_2 + 10x_3 + 0x_4 + 0x_5 \le 25\,000, \\ 3{,}2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 4{,}6x_5 \le 27\,000, \\ 2{,}1x_1 + 2{,}6x_2 + 2{,}3x_3 + 0x_4 + 2{,}8x_5 \le 20\,000, \\ 6{,}5x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \le 50\,000, \\ x_j > 0; \;\; j = \overline{1, 5} \end{cases}$$

обеспечивает максимум дохода в соответствии с целевой функцией

$$F(\overline{X}) = (1{,}3x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + 0{,}3x_4 + 1{,}7x_5) \to \max.$$

2.2.4. Формирование рациональных смесей

В коммерческой деятельности возникают задачи, связанные с осуществлением рациональных закупок продуктов, обеспечивающих необходимый рацион питания для поддержания нормальной жизнедеятельности человека, или формирование диетического питания в больницах, или задачи составления кормовых смесей на животноводческих фермах.

Задачи о рациональном питании решаются в условиях ограниченного ассортимента, товарных запасов, стоимости, суточных норм потребления питательных веществ и их содержания в продуктах. Причем из всех возможных вариантов необходимо выбрать самый дешевый.

Построение экономико-математической модели задачи

Допустим, имеется набор продуктов: мясо, рыба, молоко, сахар, яйца, картофель, овощи, фрукты, хлеб, мука по ценам соответственно $c_1, c_2, ..., c_j, ..., c_n$, причем запасы этих продуктов ограничены величинами: $a_1, a_2, ..., a_j, ..., a_n$.

Содержание питательных веществ – белков, жиров, углеводов, витаминов и минеральных солей – в 1 кг каждого продукта известны и составляют соответственно $q_{ij}(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$.

Кроме того, известны нормы суточной потребности человека в каждом питательном веществе: $b_1, b_2, ..., b_i, ..., b_m$.

Необходимо определить количество закупаемых продуктов $x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n$, которое обеспечит потребность в питательных веществах каждого вида и будет иметь минимальную стоимость. Так как содержание питательных веществ в рационе должно быть не менее $b_1, b_2, ..., b_m$, то получим систему линейных ограничений:

$$\begin{cases} q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + ... + q_{1j}x_j + ... + q_{1n}x_n \geq b_1, \\ q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + ... + q_{2j}x_j + ... + q_{2n}x_n \geq b_2, \\ ... \\ q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + ... + q_{ij}x_j + ... + q_{in}x_n \geq b_i, \\ ... \\ q_{m1}x_1 + q_{m2}x_2 + ... + q_{mj}x_j + ... + q_{mn}x_n \geq b_m. \end{cases}$$

Кроме того, количество каждого продукта в рационе не может быть величиной отрицательной, а размер закупок ограничен запасами.

$$0 \leq x_1 \leq a_1,\quad 0 \leq x_2 \leq a_2, ...,\quad 0 \leq x_j \leq a_j, ...,\quad 0 \leq x_n \leq a_n.$$

Общая стоимость рациона запишется в виде линейной целевой функции:

$$F(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n \to \min.$$

Пример 1. Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку ежедневно необходимо потреблять 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг имеющихся в магазине продуктов питания, а также их стоимость приведены в табл. 2.2.4.

Таблица 2.2.4

Питательные вещества	Содержание питательных веществ в 1 кг продуктов, q_{ij}							Нормы суточной потребности
	мясо	рыба	моло-ко	масло	сыр	крупа	карто-фель	
Белки, г	180	190	30	70	260	130	21	$b_1 = 118$
Жиры, г	20	3	40	865	310	30	2	$b_2 = 56$
Углеводы, г	0	0	50	6	20	650	200	$b_3 = 500$
Минеральные соли, г	9	10	7	12	60	20	70	$b_4 = 8$
Стоимость 1 кг продукта, руб.	1,9	1,0	0,28	3,4	2,9	0,56	0,1	
Количество продукта в рационе, кг	$x_1 = ?$	$x_2 = ?$	$x_3 = ?$	$x_4 = ?$	$x_5 = ?$	$x_6 = ?$	$x_7 = ?$	

Требуется составить суточный рацион, содержащий не менее суточной потребности человека в необходимых питательных веществах и обеспечивающий минимальную общую стоимость продуктов.

Экономико-математическую модель задачи можно сформировать так.

Найти оптимальное количество закупаемых продуктов питания – вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_7)$, связанных с суточной нормой потребления системой линейных неравенств:

$$\begin{cases} 180x_1 + 190x_2 + 30x_3 + 10x_4 + 260x_5 + 130x_6 + 27x_7 \geq 118, \\ 20x_1 + 3x_2 + 40x_3 + 865x_4 + 310x_5 + 30x_6 + 2x_7 \geq 56, \\ 50x_3 + 6x_4 + 20x_5 + 650x_6 + 200x_7 \geq 500, \\ 9x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 12x_4 + 60x_5 + 20x_6 + 10x_7 \geq 8, \\ x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0, \quad x_4 > 0, \quad x_5 > 0, \quad x_6 > 0, \quad x_7 > 0, \end{cases}$$

обеспечивающих минимум затрат на покупку продуктов питания:

$$F(\overline{X}) = 1{,}9x_1 + x_2 + 0{,}28x_3 + 3{,}4x_4 + 2{,}9x_5 + 0{,}56x_6 + 0{,}1x_7 \to \min.$$

Решение этой задачи на компьютере состоит из ввода оператором в компьютер данных, обращения к стандартной программе, вывода на печать результатов решения задачи, однако экономическое пояснение результатов дает человек.

2.2.5. Перевозка грузов

В современных условиях большие транспортные расходы связаны с простоями в ожидании обслуживания на погрузочно-разгрузочных работах, порожними пробегами, встречными и нерациональными перевозками, затратами на бензин, техническое обслуживание и заработную плату водителей. В связи с этим необходимо решать задачи оптимального планирования перевозок грузов в коммерческой деятельности из пунктов отправления (баз, станций, фабрик, совхозов, заводов) в пункты назначения (магазины, склады) методами, позволяющими оптимизировать план по какому-либо экономическому показателю, например финансовых затрат или времени на перевозку грузов.

Для решения подобного рода задач в линейном программировании существуют специально разработанные методы, а задачи такого рода называются транспортными задачами.

Построение экономико-математической модели задачи

Имеется m пунктов отправления (поставщиков) грузов:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i \ldots, A_m,$$

на которых сосредоточены запасы какого-либо однородного груза в объемах соответственно:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots, a_m.$$

Величины a_i определяют максимально возможные размеры вывоза груза с пунктов отправления. Суммарный запас груза поставщиков составляет $\sum_{i=1}^{m} a_i$ Кроме того, имеется n пунктов назначения:

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_j, \ldots, B_n,$$

которые подали заявки на поставку грузов в объемах соответственно:

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_j, \ldots, b_n.$$

Суммарная величина заявок составляет $\sum_{j=1}^{n} b_j$. Стоимость перевозки одной единицы груза от поставщика A_i к потребителю B_j обозначим через c_{ij} (транспортный тариф), образующих матрицу транспортных издержек C. В качестве критерия оптимальности выбираем суммарные издержки по перевозке грузов.

Тогда транспортная задача формулируется следующим образом: необходимо составить оптимальный план, т.е. найти такие значения объема перевозок грузов $\| x_{ij} \|$ от поставщиков A_i к потребителям B_j, чтобы вывести все грузы от поставщиков; удовлетворить заявки каждого потребителя и обеспечить минимальные транспортные расходы на перевозку груза.

Все исходные данные транспортной задачи можно записать в виде табл. 2.2.5, которая называется транспортной: C и X.

Задача заключается в определении плана перевозок – матрицы X ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$), которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Таблица 2.2.5

Пункты отправления	Пункты назначения						Запасы a_i
	B_1	B_2	...	B_i	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	c_{i2} x_{i2}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Заявки b_j	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_j$

и обеспечивает минимальное значение целевой функции

$$F(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min.$$

В таком виде экономико-математическая постановка транспортной задачи считается законченной, а ее решение изложено ниже в разд. 2.6.

Транспортная задача может быть решена на компьютере, поскольку математические методы, как правило, реализованы в виде специальных программ.

2.2.6. Задача о назначениях

В коммерческой сфере возникают задачи, связанные с необходимостью выбора такого варианта распределения ресурсов: трудовых, товарных, финансовых, энергетических, материальных, природных и других по некоторым объектам – магазинам, городам, предприятиям, цехам и т.п., который обеспечил бы минимальные затраты денег, времени или максимальные прибыль и доход и минимальные издержки.

Так, например, всегда актуальной является проблема формирования трудового коллектива.

Известно, что один и тот же работник может выполнять различные функции с разной производительностью в зависимости от опыта работы, квалификации, индивидуальных особенностей. Поэтому возникает задача о назначениях, предполагающая такое распределение работников по должностям, при котором производительность труда в коллективе была бы максимальной.

Построение экономико-математической модели задачи

На коммерческом предприятии имеется m работников:

$$A_1, A_2, A_3, ..., A_i, ..., A_m,$$

каждый из которых должен выполнять одну B_j из имеющихся n видов работ:

$$B_1, B_2, B_3, ..., B_i, ..., B_m.$$

Для каждого работника A_i на рабочем месте B_j рассчитывается производительность труда c_{ij}. Необходимо определить, кого и на какую работу следует назначить, чтобы добиться максимальной или минимальной стоимости назначения суммарной производительности при условии, что каждый работник может быть назначен только на одну работу.

Обозначим x_{ij} назначение i-го работника на j-ю работу. Количество работников m равно количеству работ, поэтому x_{ij} может принимать только два целочисленных значения: 1, если i-й работник назначен на выполнение j-й работы; 0, если не назначен. При назначении i-го работника на j-ю работу производительность или стоимость назначения равна $c_{ij} x_{ij}$. Необходимо построить квадратную матрицу распределения по должностям X, которая обеспечивает максимальное или минимальное значение линейной функции цели

$$F(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \max(\min)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad (i = \overline{1, m}); \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad (j = \overline{1, m}); \\ x_{ij} \in \{0;\ 1). \end{cases}$$

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, поэтому для ее решения можно воспользоваться любым алгоритмом линейного программирования, однако более эффективным является венгерский метод.

2.2.7. Формирование торговой сети

В регионе расположены населенные пункты, численность жителей которых, а также расстояние между ними, стоимость поездок известны. Кроме того, задано множество типовых проектов предприятий общественного питания. Необходимо найти оптимальный план размещения предприятий общественного питания в регионе, обеспечивающий минимальные приведенные затраты на их строительство, эксплуатацию и на поездки населения между населенными пунктами.

Построение экономико-математической модели задачи

Введем обозначения показателей, которые относятся к содержанию задачи:

n – количество населенных пунктов;
j – номер населенного пункта; $j = \overline{1,\ n}$;
N_j – численность населения j-го населенного пункта;
r_{ij} – расстояние между пунктами i и j;

i — индекс пункта размещения предприятия общественного питания ($i = \overline{1, m}$);

Q_j — количество типовых вариантов предприятий для j-го пункта;

q — номер типового предприятия общественного питания $q = \overline{1,Q}$;

B_j — спрос населения в j-м населенном пункте на продукцию общественного питания;

b — норма обеспеченности продукцией общественного питания одного человека;

$R_{\text{доп}}$ — максимально допустимый радиус передвижения населения;

x_{ij} — численность населения j-го пункта, обслуживаемого предприятием i-го пункта;

x_{iq} — типовой вариант q предприятия общественного питания i-го пункта;

c_{iq} — текущие затраты для x_{iq};

p_{iq} — единовременные затраты для x_{iq};

c_{ij} — затраты на поездку одного жителя из пункта i в пункт j;

$E_{\text{н}}$ — нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений.

В качестве критерия оптимальности принимаем приведенные затраты C на строительство, эксплуатацию и на поездки населения. Тогда формальная запись задачи представляет такой вид: найти такие типовые варианты x_{iq} предприятий общественного питания для каждого i-го пункта и x_{ij} численности населения j-го пункта, обслуживаемого предприятиями i-го пункта, обеспечивающие минимум затрат в соответствии с целевой функцией вида

$$C_q = \sum_{i=1}^{m} (c_{iq} + E_{\text{н}} P_{iq}) x_{iq} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} \cdot x_{ij}) \to \min$$

при следующих условиях-ограничениях:

предложение продукции общественного питания, предоставляемое населению района предприятиями общественного питания j-го пункта, должно соответствовать мощности предприятия:

$$\sum_{j=1}^{n} (b \cdot x_{ij}) \le x_{iq}, \quad i = \overline{1, m};$$

потребность населения j-го пункта в продукции, обеспечиваемой предприятиями района, должна быть удовлетворена:

$$\sum_{i=1}^{m}(b \cdot x_{ij}) \le B_j, \quad j=\overline{1,n};$$

расстояние от j-го пункта расселения до i-го пункта размещения предприятия не должно превышать допустимого радиуса обслуживания $r_{ij} \le R_{\text{доп}}$. Кроме того, существуют ограничения на переменные $x_{ij} \ge 0$.

Решение этой задачи проводят путем последовательного подбора типовых мощностей предприятий торговли или общественного питания x_{iq} в модели и определении величин затрат для каждого варианта.

2.2.8. Выбор портфеля ценных бумаг

При инвестировании денежных средств в ценные бумаги: акции, облигации, валюты, векселя, возникают задачи оптимизации. Обычно денежные средства вкладывают в несколько видов ценных бумаг, которые образуют портфель активов.

Доходность портфеля характеризуется средневзвешенной доходностью его составляющих, которая для портфеля из двух активов рассчитывается следующим образом:

$$Д = W_a \cdot Д_a + W_b \cdot Д_b,$$

где $Д$ – общая доходность портфеля;
W_a – удельный вес актива A;
$Д_a$ – доходность актива A;
W_b – удельный вес актива B;
$Д_b$ – доходность актива B.

Будущая стоимость ценных бумаг (в отличие от текущей) не определена, зависит от большого количества различных факторов. Количественная мера этой неопределенности называется риском. При этом методы линейного программирования можно использовать для контроля систематического риска при формировании портфеля активов.

Допустим, имеется множество активов A_i ($i = \overline{1, m}$), а ожидаемые доходы для них соответственно равны $Д_i$. Доли каждого из этих активов в портфеле соответственно равны W_i и являются переменными, которые могут корректироваться. Риск портфеля R определяется как средневзвешенная величина рисков активов r_i.

Цель процедуры оптимизации заключается в максимизации дохода по портфелю при заданном ограничении уровня риска портфеля.

Построение экономико-математической модели задачи

Определим оптимальные пропорции (веса́) каждого из активов, которые приведут к максимальному ожидаемому доходу при условии заданного максимального уровня риска. Эта задача может быть сформулирована следующим образом.

Ограничения:

первое ограничение связано с тем, что:

1) риск R портфеля не должен превышать $R_{доп}$;

2) в каждый актив обязательно должны быть проведены положительные инвестиции;

3) все средства должны быть полностью инвестированы. Таким образом, ограничения имеют следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{m} W_i \cdot r_i \le R_{доп},$$

где все активы могут иметь только неотрицательные веса $0 \le W_i \le 1$; причем $\sum_{i=1}^{m} W_i = 1$, поскольку средства должны быть полностью инвестированы.

Все ограничения линейны и представлены в виде равенств и неравенств. Целевая функция имеет вид:

$$Д = \sum_{i=1}^{m} W_i \cdot Д_i \to \max.$$

Поскольку доход по каждому активу предопределен, то в целевой функции могут изменяться только веса.

2.2.9. Построение кольцевых маршрутов

Коммерческая деятельность обычно связана с командировками, поездками по городам для заключения сделок. Расстояния между любой парой множества из n городов известны и составляют a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}, i \neq j$). Если прямого маршрута между городами i и j не существует, то допускают, что $a_{ij} = \infty$.

Коммерсант, выезжая из какого-либо города, должен посетить все города, побывав в каждом из них один и только один раз, и вернуться в исходный город. Необходимо определить такую последовательность объезда городов, при которой длина маршрута была бы наименьшей.

Экономико-математическая постановка этой задачи может быть представлена как задача целочисленного линейного программирования. Переменные определим следующим образом: $x_{ij} = 1$, если коммивояжер переезжает из города i в город j ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}, i \neq j$); в противном случае $x_{ij} = 0$.

Задача заключается в определении матрицы целых неотрицательных значений переменных x_{ij}, минимизирующих целевую функцию вида

$$F(x) = \sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n}(a_{ij} \cdot x_{ij}) \to \min, \quad (1 \leq i \leq m); \quad (1 \leq j \leq n)$$

при ограничениях:

1) для въезда в город j только один раз:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, m};$$

2) для выезда из города i только один раз:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}.$$

В такой постановке задача коммивояжера представляет собой задачу целочисленного линейного программирования. Действительно, условия $a_{ij} = \infty$ исключают в оптимальном решении значения $x_{ij} = 1$ как не имеющие смысла, а ограничения требуют:

1) чтобы маршрут включал только один въезд в каждый город; 2) чтобы маршрут включал лишь один выезд из каждого города, а целевая функция включала длину маршрута коммивояжера; 3) чтобы маршрут образовывал контур, проходящий через все города. Таким образом формируется экономный вариант маршрута в виде кольца.

Решение этой задачи строится, например, методом ветвей и границ целочисленного программирования.

Контрольные вопросы

1. Как формулируется общая задача линейного программирования (ОЗЛП)?

2. Какие задачи коммерческой деятельности можно представить в виде ОЗЛП?

3. Какие показатели хозяйственной деятельности предприятий имеют линейную форму связи?

4. Какие показатели коммерческой деятельности могут входить в постановку задач линейного программирования?

5. Приведите пример формализации задачи коммерческой деятельности.

Задачи

1. Постройте экономико-математическую модель оптимизации плана хозяйственной деятельности предприятия розничной торговли, определите объем продажи товаров x_j по каждой товарной группе, обеспечивающий максимум прибыли П при заданной величине товарооборота Q_n с учетом следующих данных:

n — количество товарных групп;
j — номер товарной группы, $j = \overline{1, n}$;
$\overline{p}_i$ — средняя розничная цена единицы товара j-й группы, руб.;
X_j — объем продажи j-й товарной группы, руб.;
$Q_{пл}$ — плановый объем товарооборота;
C_j — уровень издержек обращения, % к товарообороту j-й товарной группы;

λ_j – уровень торговой скидки, % к товарообороту j-й товарной группы;

S – полезная площадь торговых залов, м^2;

S_j – полезная площадь отдела, в котором продаются товары j-й товарной группы, м^2;

q_j^s – норматив товарооборота j-й товарной группы на 1 м^2 площади залов, руб./м^2;

b^l – рабочее время продавцов квалификации l, $l = \overline{1, L}$;

q_j^l – норматив товарооборота по j-й товарной группе на группу продавцов квалификации l в единицу времени, руб./ч;

b^h – издержки обращения по статье h, руб.;

q_i^h – плановый норматив издержек обращения по статье h, руб.;

h – номер статьи издержек обращения, $h = \overline{1, H}$ ($h = 1$ соответствует заработной плате, $h = 2$ – транспортным расходам и т.д.);

H – количество статей издержек обращения;

$Q_{j\text{пл}}$ – плановый уровень товарооборота j-й товарной группы.

2. Постройте экономико-математическую модель оптимизации плана хозяйственной деятельности предприятия розничной торговли, позволяющую определить товарооборот по каждой товарной группе X_j, обеспечивающий максимальный объем товарооборота Q при заданной величине прибыли $П_{\text{пл}}$ и условиях задачи 1.

3. Торговое предприятие в течение месяца осуществляет реализацию n товарных групп $j = \overline{1, n}$, каждая из которых включает r видов товара $r = \overline{1, R}$. На реализацию товаров r-го вида каждой товарной j-й группы заданы верхний $q_{jr}^{\max}$ и нижний $q_{jr}^{\min}$ пределы товарооборота. Предприятию установлен месячный план товарооборота $Q_{\text{пл}}$ (тыс. руб.).

Постройте экономико-математическую модель, позволяющую получить оптимальный месячный план продажи товаров $\overline{X} = \|x_{jr}\|$, обеспечивающий максимальную прибыль П при следующих условиях:

S_{ir} – площадь торговых залов на единицу товарооборота в натуральном выражении при реализации r вида товара из j-й группы;

S – производственная площадь торгового предприятия, м^2;

b^l – месячный фонд времени работы продавцов квалификации l, $l = \overline{1, L}$, чел.-ч;
q_{jr}^l – норматив товарооборота на группы продавцов квалификации l при реализации r-го вида товара из j-й группы в единицу времени;
$П_{jr}$ – торговая прибыль от продажи единицы r-го вида товара из j-й группы, руб.;
$\overline{Р}_{jr}$ – средняя розничная цена r-го вида товара из j-й группы, руб.;
b^h – месячный лимит статьи h издержек обращения, $h = \overline{1, H}$, руб.;
q_{jr}^h – расходы по статье h издержек обращения на 1 тыс. руб. товарооборота по реализации r-го вида товара из j-й группы, руб.;
$Q_{пл}$ – плановый объем товарооборота.

4. Торговое предприятие в течение месяца осуществляет продажу n товарных групп, каждая из которых включает r видов товара $r = \overline{1, R}$. На реализацию товара r-го вида каждой товарной j-й группы $j = \overline{1, n}$ заданы верхний $q_{jr}^{\max}$ и нижний $q_{jr}^{\min}$ пределы товарооборота.

Постройте экономико-математическую модель, позволяющую получить оптимальный месячный план продажи x по каждому виду товара x_{jr}, обеспечивающий при заданной величине торговой прибыли $П_{пл}$ максимальный объем товарооборота Q по условиям задачи 3.

5. Постройте экономико-математическую модель организации снабжения товарами предприятий розничной торговой сети в городе, обеспечивающую минимум затрат на транспортные расходы C по завозу товаров при следующих условиях:

R – количество наименований товарных позиций;
r – номер наименования товара, $r = \overline{1, R}$;
m – количество розничных торговых предприятий;
i – номер розничного торгового предприятия, $i = \overline{1, m}$;
n – количество оптовых торговых предприятий;
j – номер оптового торгового предприятия, $j = \overline{1, n}$;
$З_{jr}$ – запасы r-го товара на j-м оптовом предприятии;
$М_{ir}$ – объем реализации товара r-го наименования на i-м розничном предприятии;

S_r – спрос населения на товар r-го вида;
C_{ijr} – стоимость перевозки единицы товара r-го вида из j-го оптового торгового предприятия в i-е розничное;
X_{ijr} – объем перевозок товаров r-го вида из j-го оптового в i-е розничное торговое предприятие.

6. Постройте экономико-математическую модель организации снабжения товарами предприятий розничной торговли в городе, позволяющую получить максимальный доход по условиям задачи 5.

7. Постройте экономико-математическую модель развития предприятий розничной торговли сети в регионе, обеспечивающую минимум затрат на поездку жителей из населенных пунктов в торговые центры при следующих условиях:

n – число населенных пунктов;
j – номер населенного пункта, $j = \overline{1, n}$;
N_j – численность населения j-го пункта;
m – количество торговых центров;
i – номер торгового центра, $i = \overline{1, m}$;
C_{ij} – затраты на поездку одного жителя из пункта j в пункт i торгового центра;
X_{ij} – численность населения j-го пункта, обслуживаемого в i-м центре;
R – количество наименований товарных позиций;
b_r – норма обеспеченности одного жителя товаром r-вида, $r = \overline{1, R}$;
M_{ir} – объем реализации товара r в i-м торговом центре;
S_j – спрос всего населения N_j в пункте j на товары.

8. Постройте экономико-математическую модель развития предприятий розничной торговли в регионе, обеспечивающую получение максимального дохода по условиям задачи 7.

9. Постройте экономико-математическую модель размещения предприятий розничной торговли в регионе, имеющем n населенных пунктов, среди которых следует выбрать такие m, где будут расположены торговые центры, которые представляли бы населению соответствующие r товары в объеме b_r и ассорти-

менте R, соответствующие нормам обеспеченности всего населения региона в целом S, и при этом средневзвешенные затраты времени на поездку T были бы минимальны с учетом следующих данных:

R — количество наименований товарных позиций;
r — номер наименования товара, $r = \overline{1, R}$;
b_r — норма обеспеченности одного человека товарами r вида;
j — номер населенного пункта, $j = \overline{1, n}$;
N_j — численность населения в j-м пункте;
$N_{\min}$ — минимально допустимая численность населения, обслуживаемая торговым центром;
i — номер предприятия розничной торговли, $i = \overline{1, m}$;
S — объем спроса на товары всего населения региона;
t_{ij} — затраты времени на поездку из j-го пункта до i-го торгового центра;
$T_{\max}$ — максимально допустимые затраты времени на поездку до торгового центра;
x_{ij} $= 1$, если i-й пункт прикреплен к i-му центру, в противоположном случае он равен 0.

10. Постройте экономико-математическую модель размещения предприятий розничной торговли, позволяющую минимизировать транспортные издержки на доставку товаров по условиям задачи 9.

2.3. Методы решения задач коммерческой деятельности

2.3.1. Геометрический метод

Свойства основной задачи линейного программирования связаны со свойствами выпуклых множеств.

Множество точек называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками содержит и их произвольную выпуклую комбинацию.

Геометрический смысл этого определения состоит в том, что множеству вместе с его произвольными точками полностью принадлежит и прямолинейный отрезок, их соединяющий. Примерами выпуклых множеств являются прямолинейный отрезок, полуплоскость, круг, шар, куб, полупространство и др.

Угловыми точками выпуклого множества называются точки, не являющиеся выпуклой комбинацией двух произвольных точек множества. Например, угловыми точками треугольника являются его вершины, круга – точки окружности, которые его ограничивают.

Множество планов основной задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто). Непустое множество планов называется многогранником решений, а всякая угловая точка многогранника решений – вершиной.

Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то целевая функция задачи принимает максимальное значение в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение достигается более чем в одной вершине, то целевая функция принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Непустое множество планов основной задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник, каждая вершина которого определяет опорный план. Для одного из опорных планов (т.е. в одной из вершин многогранника решений) значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов).

Вершину многогранника решений, в которой целевая функция принимает максимальное значение, можно найти достаточно просто, если задача в стандартной форме содержит не более двух переменных:

$$F(\overline{X}) = (c_1x_1 + c_2x_2) \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, & i = \overline{1, k}; \\ x_j \ge 0, & j = 1,\ 2. \end{cases}$$

Пересечение полуплоскостей, определяемое системой линейных неравенств, называется областью решений (ОР) системы, а если она удовлетворяет условиям неотрицательности $x_j \geq 0$, то называется областью допустимых решений (ОДР).

Если система неравенств совместна, то областью допустимых решений задачи является выпуклое множество, которое называется многоугольником решений. Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки точных равенств.

Решение задачи линейного программирования геометрическим методом включает следующие этапы.

1. На плоскости X_1OX_2 строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3. Строят многоугольник решений.

4. Строят вектор $\vec{N}(c_1, c_2)$, который указывает направление возрастания целевой функции.

5. Строят начальную прямую целевой функции $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ и затем передвигают ее параллельно самой себе в направлении вектора $\vec{N}$ до крайней угловой точки многоугольника решений. В результате находят точку, в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо множество точек с одинаковым максимальным значением целевой функции альтернативный оптимум, если начальная прямая сливается с одной из сторон многоугольника решений, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов ($F(\overline{X}) \to \infty$).

6. Определяют координаты точки максимума функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Минимальное значение линейной функции цели находится путем передвижения начальной прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ в направлении, противоположном вектору $\vec{N}(c_1, c_2)$.

Пример 1. Найдите максимум и минимум линейной функции

$$F(\overline{X}) = (-2x_1 + 4x_2) \to extr$$

при условиях-ограничениях:

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 \le 12; \\ -x_1 + 2x_2 \le 5; \\ x_1 + x_2 \ge 1; \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Построим на плоскости X_1OX_2 многоугольник решений (рис. 2.3.1). Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств.

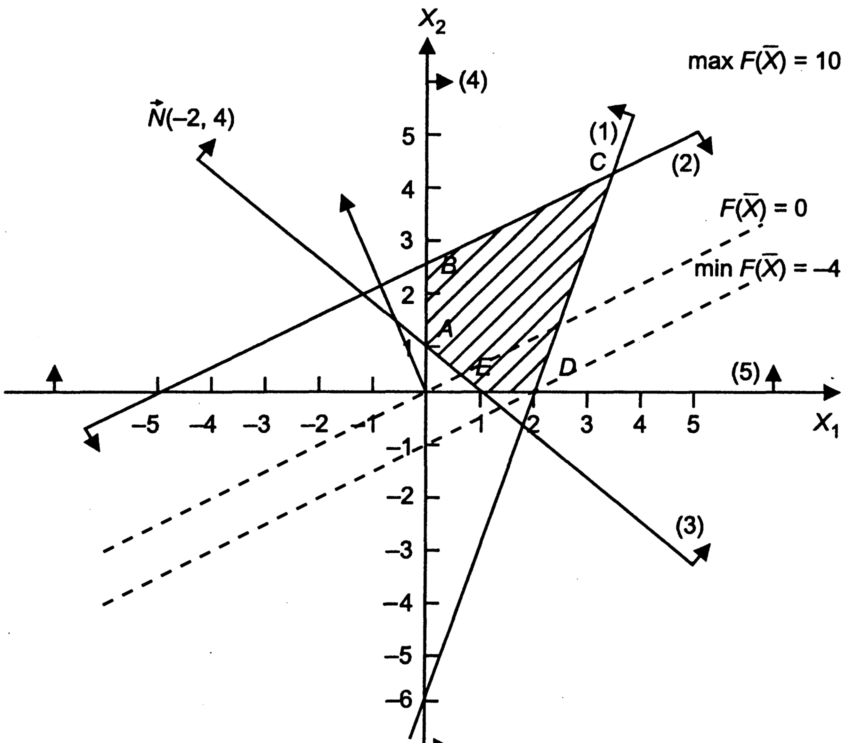


Рис. 2.3.1. Построение многоугольника решений

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 = 12; & (1) \\ -x_1 + 2x_2 = 5; & (2) \\ x_1 + x_2 = 1; & (3) \\ x_1 = 0; & (4) \\ x_2 = 0. & (5) \end{cases}$$

Построив прямые системы, найдем соответствующие полуплоскости и их пересечения.

Многоугольником решений задачи является пятиугольник $ABCDE$, координаты точек которого удовлетворяют условию неотрицательности переменных и неравенствам системы ограничений задачи.

Для нахождения точек экстремума построим начальную прямую $F(\overline{X}) = -2x_1 + 4x_2 = 0$ и вектор $\overline{N}(-2, 4)$. Передвигая прямую $F(\overline{X}) = 0$ в направлении вектора $\overline{N}$, найдем точку C, в которой начальная прямая принимает положение опорной прямой. Следовательно, в точке C целевая функция имеет максимальное значение. Так как точка C получена в результате пересечения прямых 1 и 2, то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 = 12, \\ -x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим: $x_1 = 3{,}4$; $x_2 = 4{,}2$; откуда найдем максимальное значение целевой функции $F_{\max}(\overline{X}) = -2 \cdot 3{,}4 + 4 \cdot 4{,}2 = 10$.

По условию задачи начальная прямая параллельна прямой (2), так как коэффициенты при переменных x_1, x_2 пропорциональны: $-2/-1 = 4/2 = 2$. Следовательно, начальная прямая займет положение опорной прямой в точках B, C и в любой точке отрезка BC, в которых $F(\overline{X})$ принимает одно и то же максимальное значение. Для определения координат точки B решим систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2{,}5. \end{cases}$$

Максимальное значение целевой функции в точке B равно:

$$F(\overline{X}) = -2 \cdot 0 + 4 \cdot 2{,}5 = 10.$$

Запишем множество оптимальных решений как линейную выпуклую комбинацию углов точек отрезка BC:

$$x_1{}^* = \alpha \cdot x_1^{(C)} + (1 - \alpha) \cdot x_1^{(B)}$$
$$x_2{}^* = \alpha \cdot x_2^{(C)} + (1 - \alpha) \cdot x_2^{(B)},$$

где $0 \le \alpha \le 1$.

Подставив координаты угловых точек, получим:

$$x_1{}^* = \alpha \cdot 3{,}4 + (1 - \alpha) \cdot 0 = 3{,}4\alpha;$$

$$x_2{}^* = \alpha \cdot 4{,}2 + (1 - \alpha) \cdot 2{,}5 = 2{,}5 + 1{,}7\alpha.$$

Тогда $\overline{X}^* = \{3{,}4\alpha;\ 2{,}5 + 1{,}7\alpha\}$, где $0 \le \alpha \le 1$.

Подставляя любые значения α от 0 до 1, получим координаты множества точек отрезка BC, в каждой из которых целевая функция принимает максимальное значение, равное 10.

Для нахождения минимального значения целевой функции задачи перемещаем начальную прямую в направлении, противоположном вектору $\vec{N}(c_1, c_2)$. Начальная прямая займет положение опорной прямой в вершине D, где $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, а минимальное значение целевой функции равно:

$$F_{\min}(\overline{X}) = -2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = -4.$$

Пример 2. Геометрический метод решения задачи линейного программирования рассмотрим на примере поставленной задачи и построенной модели коммерческой деятельности предприятия, представленной в п. 2.2.1. Так как модель имеет только две переменные, то данную задачу можно решить геометрическим методом.

Построим на плоскости X_1OX_2 (рис. 2.3.2) многоугольник допустимых решений задачи. Для этого в неравенствах системы ограничений знаки неравенств заменим на знаки точных равенств:

$$\begin{cases} 0{,}5x_н + x_в \le 3, & (1) \\ x_н + 0{,}5x_в \le 4, & (2) \\ x_в - x_н \le 1{,}5, & (3) \\ x_в \le 2, & (4) \\ x_н \ge 0{,}25, & (5) \\ x_в \ge 0{,}5, & (6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}5x_н + x_в = 3, & (1) \\ x_н + 0{,}5x_в = 4, & (2) \\ x_в - x_н = 1{,}5, & (3) \\ x_в = 2, & (4) \\ x_н = 0{,}25, & (5) \\ x_в = 0{,}5, & (6) \end{cases}$$

$$F(\overline{X}) = 2x_н + 3x_в \qquad F(\overline{X}) = 2x_н + 3x_в = 0.$$

Построив полученные ограничивающие прямые, найдем соответствующие полуплоскости допустимых значений переменных, а затем их пересечение (рис. 2.3.2).

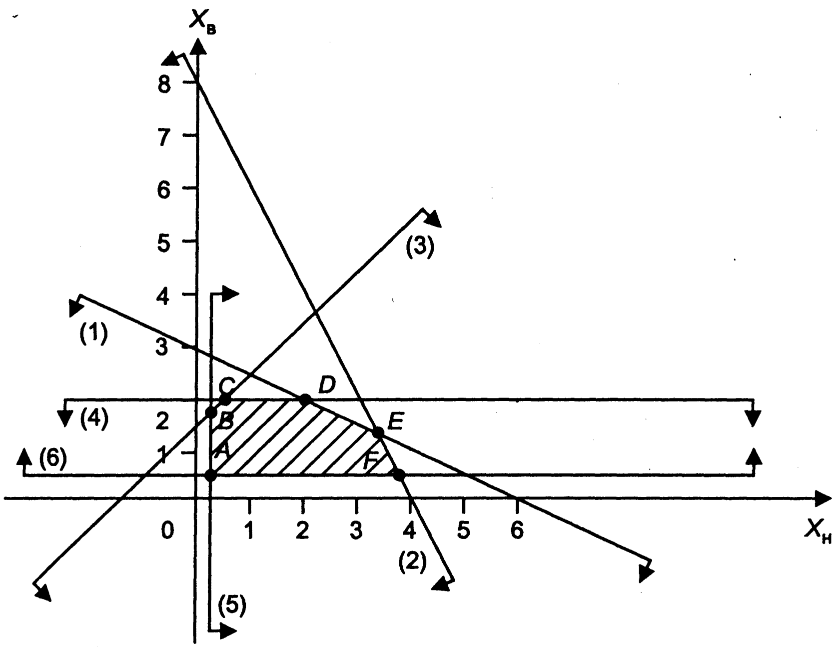


Рис. 2.3.2. Построение области допустимых решений

Направление стрелок от каждой граничной прямой определяется путем непосредственной подстановки в неравенство координат произвольно взятой точки, например (0;0), и при удовлетворении данного неравенства направляем стрелки в сторону контрольной точки, в противном случае – наоборот.

Полученная область решений есть многоугольник *ABCDEF*.

Угловые точки многоугольника решений имеют следующие координаты: $A\,(0{,}25;\ 0{,}5)$, $B\,(0{,}25;\ 1{,}75)$, $C\,(0{,}5;\ 2)$, $D\,(2;\ 2)$, $E\,(3^1/_3;\ 1^1/_3)$, $F\,(3{,}75;\ 0{,}5)$.

Для нахождения минимума и максимума целевой функции строим начальную прямую и вектор-градиент $\bar{N}$ (2; 3) (рис. 2.3.3). Координатами вектора $\bar{N}$ являются коэффициенты линейной целевой функции при переменных $x_н$ и $x_в$. Для построения графика целевой функции задаем произвольное значение $F(\bar{X})$. Если $F(\bar{X}) = 0$, то прямая проходит через начало координат. Для ее построения, полагая $x_н = 1$, получим $x_в = -^2/_3$, а при $x_в = 1$, получим $x_н = -^3/_2$ (рис. 2.3.3). Полагая $F(\bar{X}) = 6$, таким же образом построим линию целевой функции.

Затем для $x_н = 0{,}25$ и $x_в = 0{,}5$ определяем минимальное значение $F_{\min}(\bar{X}) = 2$. Таким образом построим на графике ряд параллельных прямых (рис. 2.3.3), где вектор-градиент $\vec{N}(2;\ 3)$ показывает направление роста целевой функции.

Максимальное значение $F(\bar{X})$ будет в точке *E*. Так как точка *E* получена в результате пересечения прямых (1) и (2), то для определения ее координат решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}5x_н + x_в = 3 \\ x_н + 0{,}5x_в = 4 \end{cases} \Rightarrow x_н^* = 3\tfrac{1}{3};\ \ x_в^* = 1\tfrac{1}{3}.$$

Максимальное значение целевой функции

$$F_{\max}(\bar{X}) = 2x_н + 3x_в = 2 \cdot 3^1/_3 + 3 \cdot 1^1/_3 = 10^2/_3 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Целевая функция $2x_н + 3x_в = 10^2/_3$ пересекает ось $x_в$ в точке $x_в = 3^5/_9$, а ось $x_н$ в точке $x_н = 5^1/_3$.

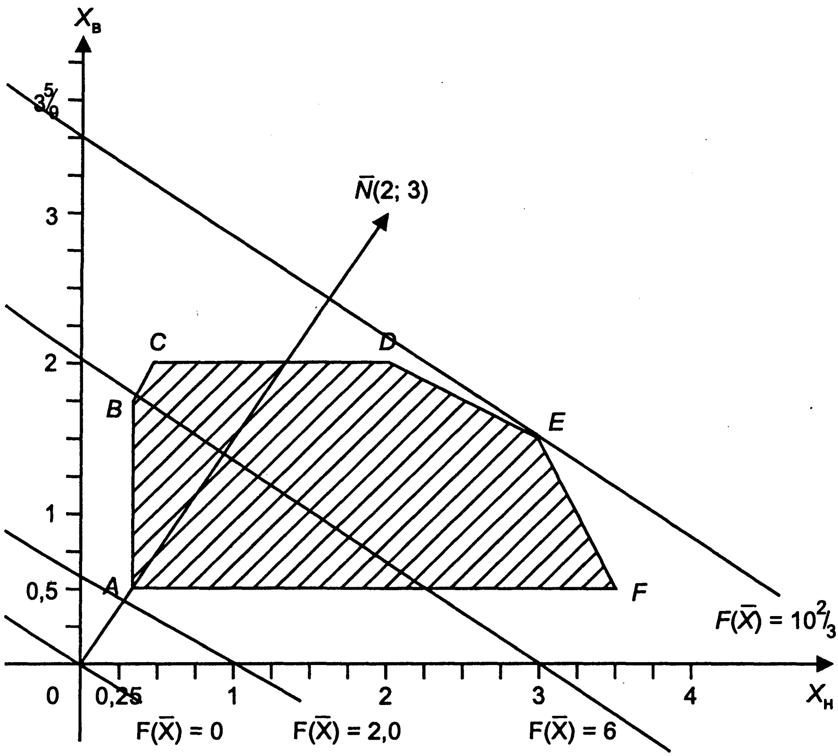


Рис. 2.3.3. Определение экстремальных значений целевой функции

Таким образом, суточный объем производства краски для наружных работ должен быть равен $3^1/_3$ т, а для внутренних работ – $1^1/_3$ т. Доход продажи в этом случае будет максимальным и составит $10^2/_3$ тыс. руб.

Если бы значения целевой функции на концах отрезка *DE* совпадали, то все его точки определили бы множество **альтернативных оптимальных решений.**

Справедливо предположить, что полученное статическое решение устареет еще до момента его реализации, поэтому следует предусмотреть динамический характер условий производства и продажи красок. Например, важно знать, как повлияют на оптимальное решение увеличение или уменьшение спроса, изменение рыночных цен или запасов сырья. Поэтому необходимо провести анализ модели на чувствительность, определить зоны устойчивого функционирования предприятия на рынке сбыта продукции, что и рассмотрено ниже в п. 2.7.

Контрольные вопросы

1. Какие задачи решаются геометрическим методом?
2. Что показывает направление вектора-градиента $\vec{N}$ и в каких точках области допустимых решений находятся максимум и минимум целевой функции?
3. В каком случае оптимальный план не является единственным?

Задачи

Постройте на плоскости область допустимых решений системы линейных неравенств и найдите максимальное и минимальное значения линейной функции цели:

1а. $$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 \ge 0, \\ x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 6x_1 \le 36, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$F(X) = 6x_1 - 4x_2 \to \text{extr}.$

1б. $$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \le 21, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ x_1 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$F(X) = 14x_1 + 6x_2 \to \text{extr}.$

2а. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge -3, \\ 7x_1 - x_2 \ge 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 5x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$F(X) = -14x_1 + 2x_2 \to \text{extr}.$

2б. $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \ge -3, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \ge 3, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$F(X) = -2x_1 + 2x_2 \to \text{extr}.$

3а. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 5, \\ 4x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$

$F(X) = -2x_1 + 6x_2 \to \text{extr}.$

3б. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ 4x_1 - 3x_2 \geq 0, \\ 5x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$

$F(X) = -3x_1 + 6x_2 \to \text{extr}.$

4а. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -4, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 32, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$

$F(X) = 3x_1 - 1{,}5x_2 \to \text{extr}.$

4б. $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ 7x_1 + x_2 \geq 7, \\ x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$

$F(X) = 4x_1 + 4x_2 \to \text{extr}.$

5. Фирма производит для автомобилей запасные части типа А и В. Фонд рабочего времени составляет 5000 чел.-ч в неделю. Для производства одной детали типа А требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа В – 2 чел.-ч. Производственная мощность позволяет выпускать максимум 2500 деталей типа А и 2000 деталей типа В в неделю. Для производства деталей типа А уходит 2 кг полимерного материала и 5 кг листового материала, а для производства одной детали типа В – 4 кг полимерного материала и 4 кг листового металла. Еженедельные запасы каждого материала – соответственно 10 и 12 т. Общее число производимых деталей в течение одной недели должно составлять не менее 1500 штук.

Определите, сколько деталей каждого вида следует производить, чтобы обеспечить максимальный доход от продажи за неделю, если доход от продаж одной детали типа А и В составляет соответственно 110 и 150 руб.

6. Туристская фирма в летний сезон обслуживает в среднем 7500 туристов в месяц и располагает флотилией из двух типов судов, характеристики которых представлены в таблице.

Показатели	Судно	
	I	II
Пассажировместимость, чел.	2000	1000
Горючее, т	12 000	7000
Экипаж, чел.	125	100

В месяц выделяется 60 000 т горючего. Потребность в рабочей силе не превышает 600 человек.

Определите количество судов I и II типа, чтобы обеспечить максимальный доход, который составляет от эксплуатации судов I типа 20 млн руб., а II типа – 10 млн руб. в месяц.

7. Фирма производит и продает столы и шкафы из древесины хвойных и лиственных пород. Расход каждого вида в кубометрах на каждое изделие задан в таблице.

	Расход древесины, $м^3$		Цена изделия, тыс. руб.
	хвойные	лиственные	
Стол	0,15	0,2	0,8
Шкаф	0,3	0,1	1,5
Запасы древесины, $м^3$	80	40	

Определите оптимальное количество столов и шкафов, которое следует поставлять на продажу для получения максимального дохода фирмы.

8. С Курского вокзала Москвы ежедневно отправляются скорые и пассажирские поезда. Пассажировместимость и количество вагонов железнодорожного депо станции отправления указаны в таблице.

Тип вагона		Багажный	Почтовый	Жесткий	Купейный	Мягкий
Количество вагонов в поезде	скорый	1	1	8	4	1
	пассажирский	1	0	5	6	3
Пассажировместимость, чел.				58	40	32
Парк вагонов		14	8	90	80	30

Определите оптимальное количество пассажирских и скорых поездов, обеспечивающих максимальное количество ежедневно отправляемых пассажиров с вокзала.

9. Малое предприятие арендовало мини-пекарню для производства чебуреков и беляшей. Мощность пекарни позволяет выпускать в день не более 50 кг продукции. Ежедневный спрос на чебуреки не превышает 260 шт., а на беляши — 240 шт. Суточные запасы теста и мяса и расходы на производство каждой единицы продукции приведены в таблице.

	Расход на производство, кг/шт.		Суточные запасы сырья, кг
	чебурека	беляша	
Мясо	0,035	0,06	21
Тесто	0,065	0,03	22
Цена, руб./шт.	5	4,8	

Определить оптимальный план ежедневного производства чебуреков и беляшей, обеспечивающих максимальную выручку от продажи.

10. Издательский дом «Геоцентр-Медиа» издает два журнала: «Автомеханик» и «Инструмент», которые печатаются в трех типографиях: «Алмаз-Пресс», «Карелия-Принт» и Hansaprint (Финляндия), где общее количество часов, отведенное для печати, и производительность печати одной тысячи экземпляров ограничены и представлены в следующей таблице:

Типография	Время печати одной тысячи экземпляров		Ресурс времени, отведенный типографией, ч
	«Автомеханик»	«Инструмент»	
Алмаз-Пресс	2	14	112
Карелия-Принт	4	6	70
Hansaprint	6	4	80
Оптовая цена, руб./шт.	16	12	

Спрос на журнал «Автомеханик» составляет 12 тыс. экземпляров, а на журнал «Инструмент» – не более 7,5 тыс. экземпляров в месяц.

Определите оптимальное количество издаваемых журналов, которые обеспечат максимальную выручку от продажи.

11. Фирма решила открыть на основе технологии производства чешского стекла, фарфора и хрусталя линию по изготовлению ваз и графинов и их декорированию. Затраты сырья на производство этой продукции представлены в таблице.

Сырье	Расход сырья на производство		Поставки сырья в неделю, кг
	ваза	графин	
Кобальт	20	15	30
Сусальное 24-каратное золото	20	10	25
Оптовая цена, руб./шт.	700	500	

Определите оптимальный объем выпуска продукции, обеспечивающий максимальный доход от продаж, если спрос на вазы не превышает 800 шт. в неделю.

12. Фирма производит одежду для охотников, туристов и охранных структур. Дополнительно фирма решила изготавливать

шапки и подстежки из натурального меха. Затраты на производство этих изделий и запасы сырья представлены в таблице. Спрос на шапки составляет не более 300 шт. в месяц, а подстежек – не более 400 шт. в месяц.

Сырье	Расход сырья на производство, дм		Средний запас в месяц, дм
	шапки	подстежки	
Мех	22	140	61 600
Ткань	1,5	30	15 000
Оптовая цена, руб./шт.	400	800	

Определите объемы производства этих изделий, обеспечивающих максимальный доход от продажи.

13. Коммерческие расчеты, проведенные студентами в деревне, привели к более выгодному использованию яблок и груш путем их засушки и последующей продажи зимой в виде смеси сухофруктов, варианты которых представлены в таблице.

Плоды	Вес 1 кг в составе сухофруктов		Сбор плодов, кг/день
	смесь 1	смесь 2	
Анис (яблоки)	0,25	0,25	15
Штрейфлинг (яблоки)	0,75	0,25	25
Груши	0	0,5	16
Оптовая цена, руб./шт.	40,0	50,0	

Изучение спроса в магазине «Вишенка» показало, что в неделю продавалось 28 упаковок смеси 1 и 56 упаковок смеси 2. Из 1 кг плодов получается 200 г сушеных яблок, а груш — 250 г.

Определите оптимальное количество упаковок сухофруктов по 1 кг смесей первого и второго вида, которое необходимо заготавливать в деревне ежедневно для обеспечения максимального дохода от продажи в день.

14. Кондитерская фабрика в Покрове освоила выпуск новых видов шоколада «Лунная начинка» и «Малиновый дождик», спрос на которые составляет соответственно не более 12 и 7 т в месяц. По причине занятости трех цехов выпуском традиционных видов шоколада каждый цех может выделить только ограниченный ресурс времени в месяц. В силу специфики технологического оборудования затраты времени на производство шоколада разные, данные представлены в таблице.

Номер цеха	Время на производство 1 г шоколада, ч		Время, отведенное цехами под производство, ч/мес
	«Лунная начинка»	«Малиновый дождик»	
I	1	7	56
II	2	3	36
III	3	2	42
Оптовая цена, руб./т	80	60	

Определите оптимальный объем выпуска шоколада, обеспечивающий максимальную выручку от продажи.

2.3.2. Алгебраический симплексный метод

Для решения задач линейного программирования предложено немало различных алгоритмов. Наиболее эффективным среди них является алгоритм, известный под названием *симплексный метод*, или метод последовательного улучшения плана.

Впервые симплексный метод был предложен американским ученым Дж. Данцингом в 1949 г., однако еще в 1939 г. идеи метода были разработаны российским математиком Л.В. Канторовичем.

Симплексный метод – это итеративный процесс направленного решения системы уравнений по шагам, который начинается с опорного решения и в поисках лучшего варианта движется по угловым точкам области допустимого решения, улучшающих значение целевой функции до тех пор, пока целевая функция не достигнет оптимального значения.

Допустимое множество базисных решений системы линейных уравнений образует в объеме многогранное тело, например тетраэдр, вершины которого – угловые точки.

Каждой угловой точке многогранника решений соответствует опорный план (допустимое базисное решение).

Количество перебираемых допустимых базисных решений можно сократить и проводить не беспорядочный перебор, а последовательный по специальному алгоритму, улучшая значение целевой функции.

В тех случаях, когда модель содержит m уравнений, для построения опорных решений используются m переменных, принимающих некоторые положительные значения при нулевых значениях остальных свободных переменных. Вычислительная процедура может быть представлена в виде следующей последовательности.

Итеративный переход от одного допустимого базисного решения проводится направленно от одной вершины области допустимых решении к другой, заключающегося в *обмене* базисных и свободных переменных: базисная переменная приравнивается к нулю и переходит в свободную, а соответственно свободная переменная переводится на место базисной. Если в столбце свободных членов все элементы положительны, то решение является допустимым. Если в строке целевой функции все элементы неотрицательные, то решение является оптимальным при решении задачи на максимум.

В соответствии с *симплексным методом* на первом шаге находят начальное опорное решение – допустимый вариант, удовлетворяющий всем ограничениям. Затем последовательно за определенное число итераций направленно осуществляется переход от одного опорного решения к другому вплоть до оптимального. Следует заметить, что на первом шаге в качестве базисных переменных следует выбрать такие m переменные, каждая из которых входит только один раз в одно из m уравнений системы, при этом нет таких уравнений системы, в которые не входит ни одна из этих переменных. При этом если выбранные переменные имеют те же знаки, что и соответствующие им свободные члены в правых частях, то полученное базисное решение будет допустимым. В процессе решения системы линейных уравнений необходимо ориентироваться на сохранение неотрицательности всех переменных, поскольку это определяет допустимость решения.

Для использования рассмотренного алгоритма симплексного метода к минимизации линейной формы связи $F(\overline{X})$ следует искать максимум функции $\overline{F_1}(X) = - F(X)$, а затем полученное решение взять с обратным знаком.

Предложенный алгоритм приводит к оптимальному решению для любой модели линейного программирования за конечное число итераций, если система линейных уравнений задачи совместна.

Симплексный метод основан на последовательном переходе от одного базисного решения (опорного плана) задачи линейного программирования к другому опорному плану, при этом значение целевой функции изменяется в лучшую сторону. Рассмотрим алгоритм симплексного метода на примере решения задачи планирования товарооборота предприятия торговли.

Коммерческое предприятие реализует n товарных групп, располагая m ограниченными материально-денежными ресурсами $b_i > 0$ $(i = \overline{1, m})$. Известны расходы ресурсов каждого i-вида на реализацию единицы товара по каждой группе, представленной в виде матрицы $A = (a_{ij})$, и прибыль c_j, получаемая предприятием от реализации единицы товара j-группы (табл. 2.3.1). Необходимо определить объем и структуру товарооборота x_j $(j = \overline{1, n})$, при которых прибыль коммерческого предприятия была бы максимальной.

Математическую модель задачи запишем следующим образом.

Определить вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, который удовлетворяет ограничениям вида

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i, & i = \overline{1, m} \\ x_j \ge 0, & j = \overline{1, n} \end{cases}$$

и обеспечивает максимальное значение целевой функции

$$F(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max.$$

Алгоритм симплексного метода включает следующие этапы.

1. Составление первого опорного плана. Система ограничений задачи, решаемой симплексным методом, задана в виде системы неравенств смысла «≤», правые части которых $b_i \geq 0$. Перейдем от системы неравенств к системе уравнений путем введения неотрицательных дополнительных балансовых переменных. Векторы-столбцы при этих переменных представляют собой единичные векторы и образуют базис, а соответствующие им переменные называются базисными:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

где x_{n+i} – дополнительные переменные, $i = \overline{1, m}$,
x_j – базисные переменные, $j = \overline{1, n}$.

Решим эту систему относительно дополнительных переменных:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j, \quad (i = \overline{1, m}),$$

а функцию цели перепишем в виде уравнения

$$F(\overline{X}) = 0 - \left(-\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \right).$$

Следует заметить, что опорным решением называется базисное неотрицательное решение.

Полагая, что основные переменные $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots x_n = 0$, получим допустимое базисное решение – опорный план $\overline{X}_1$ = (0, 0, ..., 0, b_1, b_2, ..., b_m); $F(\overline{X}_1) = 0$, который заносим в симплексную табл. 2.3.2. Она состоит из коэффициентов системы ограничений и свободных членов. Последняя строка таблицы называется индексной и заполняется коэффициентами функции цели, взятыми с противоположным знаком.

2. Проверка плана на оптимальность. Если значение базисных переменных неотрицательны, то решение является допустимым. Если все коэффициенты индексной строки симплексной таблицы при решении задачи на максимум неотрицательны (≥ 0), то план является оптимальным. Если найдется хотя бы один коэффициент индексной строки меньше нуля, то план не оптимальный, и его необходимо улучшить.

3. Определение ведущих столбца и строки. Из отрицательных коэффициентов индексной строки выбираем наибольший по абсолютной величине, что и определяет ведущий столбец, который показывает, какая переменная на следующей итерации перейдет из свободных в базисные.

Затем элементы столбца свободных членов симплексной таблицы делим на элементы того же знака ($^+/_+$; $^-/_-$) ведущего столбца. Результаты заносим в отдельный столбец θ_i, которые должны быть всегда положительны. Строка симплексной таблицы, соответствующая минимальному значению θ_i, является ведущей. Она и определяет переменную x_i, которая на следующей итерации выйдет из базиса и станет свободной (обмен).

Элемент симплексной таблицы, находящийся на пересечении ведущих столбца и строки, называют разрешающим и выделяют, например, кружком.

4. Построение нового опорного плана. Переход к новому плану осуществляется в результате пересчета симплексной таблицы методом Жордана – Гаусса. Сначала заменим переменные в базисе, т.е. вместо x_i в базис войдет переменная x_j, соответствующая ведущему столбцу (замена).

Разделим все элементы ведущей строки предыдущей симплексной таблицы на разрешающий элемент и результаты деления занесем в строку следующей симплексной таблицы, соответствующей введенной в базис переменной x_j. В результате этого на месте разрешающего элемента в следующей симплексной таблице запишем 1, а в остальных клетках j столбца, включая клетку столбца индексной строки, записываем нули. Остальные новые элементы нового плана находятся по правилу прямоугольника:

$$НЭ = СТЭ - \frac{А \cdot В}{РЭ},$$

где СТЭ – элемент старого плана;
РЭ – разрешающий элемент;
А и В – элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

Далее возвращаемся ко второму этапу алгоритма – проверке плана на оптимальность.

При решении задачи линейного программирования на минимум целевой функции признаком оптимальности плана являются **отрицательные значения** всех коэффициентов индексной строки симплексной таблицы.

Если в ведущем столбце все коэффициенты $a_{ij} \leq 0$, то функция цели $F(\bar{X})$ не ограничена на множестве допустимых планов, т.е. $F(\bar{X}) \to \infty$ и задача не имеет решения.

Если в столбце θ_i симплексной таблицы содержатся два или несколько одинаковых наименьших значений, то новый опорный план будет вырожденным (одна или несколько базисных переменных станут равными нулю). Вырожденные планы могут привести к зацикливанию, т.е. к многократному повторению процесса вычислений, не позволяющему получить оптимальный план. В таких случаях для выбора ведущей строки используют метод Креко, который заключается в следующем. Элементы строк, имеющие одинаковые наименьшие значения θ_i, делятся на предполагаемые разрешающие элементы, а результаты заносятся в дополнительные строки. За ведущую строку выбирается та, в которой раньше встретится наименьшее частное при чтении таблицы слева направо по столбцам. Например, таблица, содержащая три равных значения $\theta_i = 2$, имеет следующий вид:

План	Базисные перемен-ные	Значения базисных переменных	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
I	x_4	4	2	3	6	1	0	0	2	$^4/_2 = 2$
	x_5	8	4	8	1	0	1	0	4	$^8/_4 = 2$
	x_6	10	5	12	−1	1	0	1	5	$^{10}/_5 = 2$

Допустим, разрешающим столбцом является x_7, тогда разрешающим элементом может быть 2, 4 или 5. Следуя указанному правилу, получим таблицу:

Значения базисных переменных	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
2	1	**1,5**	3	0,5	0	0	1
2	1	2	0,25	0	0,25	0	1
2	1	2,4	–0,2	0,2	0	0,2	1

Сравниваем последовательно слева направо полученные частные по столбцам. В первом и втором столбцах все частные одинаковы, а в третьем столбце наименьшее частное 1,5 в первой строке, следовательно, эта строка и будет разрешающей с разрешающим элементом 2.

Если в оптимальный план вошла дополнительная переменная x_{n+1}, то при реализации такого плана имеются недоиспользованные ресурсы i-го вида в количестве, полученном в столбце свободных членов симплексной таблицы.

Если в индексной строке симплексной таблицы оптимального плана находится нуль, принадлежащий свободной переменной, не вошедшей в базис, а в столбце, содержащем этот нуль, имеется хотя бы один положительный элемент, то задача имеет множество оптимальных планов. Свободную переменную, соответствующую указанному столбцу, можно внести в базис, выполнив соответствующие этапы алгоритма. В результате будет получен второй оптимальный план с другим набором базисных переменных.

Пример 1. Коммерческое предприятие, располагающее материально-денежными ресурсами, реализует три группы товаров А, В и С. Плановые нормативы затрат ресурсов на 1 тыс. руб. товарооборота, доход от продажи товаров на 1 тыс. руб. товарооборота, а также объем ресурсов заданы в табл. 2.3.1.

Определите плановый объем продажи и структуру товарооборота так, чтобы доход торгового предприятия был максимальным.

Таблица 2.3.1

Виды материально-денежных ресурсов	Норма затрат материально-денежных ресурсов на 1 тыс. руб. товарооборота			Объем ресурсов b_i
	группа A	группа B	группа C	
Рабочее время продавцов, чел.-ч	0,1	0,2	0,4	1100
Площадь торговых залов, м^2	0,05	0,02	0,02	120
Площадь складских помещений, м	3	1	2	8000
Доход, тыс. руб.	3	5	4	max

Решение. Дадим математическую модель задачи.

Определим вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3)$, который удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 \le 1100, \\ 0{,}05x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}02x_3 \le 120, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8000, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$$

и обеспечивает максимальное значение целевой функции

$$F(\overline{X}) = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max.$$

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных x_4, x_5, x_6:

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 + x_4 = 1100, \\ 0{,}05x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}02x_3 + x_5 = 120, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 8000. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов $A = (a_{ij})$ этой системы уравнений имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\bar{A}_4$, $\bar{A}_5$, $\bar{A}_6$ – линейно независимы, так как определитель, построенный на этих векторах, отличен от нуля. Следовательно, соответствующие этим векторам переменные x_4, x_5, x_6 являются базисными и в этой задаче определяют объемы неиспользованных ресурсов.

Решим систему уравнений относительно базисных переменных.

$$\begin{cases} x_4 = 1100 - (0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3), \\ x_5 = 120 - (0{,}05x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}02x_3), \\ x_6 = 8000 - (3x_1 + x_2 + 3x_3). \end{cases}$$

Функцию цели запишем в виде уравнения:

$$F(\bar{X}) = 0 - (-3x_1 - 5x_2 - 4x_3).$$

Полагая, что свободные переменные $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, получим первый опорный план $\bar{X}_1 = (0, 0, 0, 1100, 120, 8000)$, $F(\bar{X}_1) = 0$, в котором базисные переменные $x_4 = 1100$, $x_5 = 120$, $x_6 = 8000$. Следовательно, товары не продаются, доход равен нулю, а ресурсы не используются. Полученный первый опорный план запишем в симплексную табл. 2.3.2.

Первый опорный план неоптимальный, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты: –3, –5, –4.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_2, так как наибольший коэффициент по модулю: $|-5| > \{|-3|, |-4|\}$.

Вычислим значения d_i по строкам как частное от деления $\frac{b_i}{a_{i2}}$ и из них выберем наименьшее:

$$\min\theta_i = \min\left(\frac{b_i}{a_{i2}}\right) = \min\left[\frac{1100}{0{,}2};\ \frac{120}{0{,}02};\ \frac{8000}{1}\right] = 5500.$$

Таблица 2.3.2

План	Базисные переменные	Значения базисных переменных	Значения коэффициентов при						θ_i min
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
I	$\rightarrow x_4$ x_5 x_6	1100 120 8000	0,1 0,05 3	0,2 0,02 1	0,4 0,02 2	1 0 0	0 1 0	0 0 1	5500 6000 8000
Индексная срока	$F(\overline{X}_1)$	0	−3	↑ −5	−4	0	0	0	
II	x_2 $\rightarrow x_5$ x_6	5500 10 2500	0,5 0,04 2,5	1 0 0	2 −0,02 0	5 −0,1 −5	0 1 0	0 0 1	11 000 250 1000
Индексная строка	$F(\overline{X}_2)$	27 500	−0,5	0	6	25	0	0	
III	x_2 x_1 x_6	5375 250 1875	0 1 0	1 0 0	2,25 − 0,5 1,25	6,25 −2,5 1,25	−12,5 25 −62,5	0 0 1	
Индексная строка	$F(\overline{X}_3)$	27 625	0	0	5,75	23,75	12,5	0	

Следовательно, первая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен 0,2 и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки и выделен в табл. 2.3.2.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_4 в план II войдет переменная x_2. Строка, соответствующая переменной x_2 в плане II, получена в результате деления всех элементов строки x_4 плана I на разрешающий элемент РЭ = 0,2. На месте разрешающего элемента в плане II получаем 1. В остальных клетках столбца x_2 плана II записываем нули.

Таким образом, в новом плане II заполнены строка x_2 и столбец x_2. Все остальные элементы нового плана II, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ = 0,2. Во второй вершине по диагонали находится старое значение элемента, например значение целевой функции $F(X_1) = 0 =$ СЭ, которое указывает на место расположения нового НЭ в новом плане II. Третий элемент А = 1100 и четвертый элемент В = –5 завершают построение прямоугольника в недостающих двух вершинах и расположены по другой диагонали. Значение нового элемента в плане II находится из выражения:

$$\text{НЭ} = \text{СЭ} - (\text{А} \cdot \text{В}) / \text{РЭ} = 0 - \frac{1100 \cdot (-5)}{0{,}2} = 27\,500.$$

Элементы строки определяются аналогично:

$$120 - \frac{1100 \cdot 0{,}02}{0{,}2} = 10, \qquad 0{,}05 - \frac{0{,}1 \cdot 0{,}02}{0{,}2} = 0{,}04,$$

$$0{,}02 - \frac{0{,}4 \cdot 0{,}02}{0{,}2} = -0{,}02, \qquad 0 - \frac{0{,}02 \cdot 1}{0{,}2} = -0{,}1.$$

Все элементы, расположенные на пересечении строк и столбцов, соответствующих одноименным базисным элементам, равны 1, остальные элементы столбца в базисах векторов, включая индексную строку, равны 0. Аналогично проводятся расчеты по всем строкам таблицы, включая индексную.

Выполняя последовательно все этапы алгоритма, формируем план II.

На третьей итерации табл. 4.2 получаем план III, который является оптимальным, так как все коэффициенты в индексной строке ≥ 0.

Оптимальный план можно записать так:

$$\bar{X}^* = (250,\ 5375,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1875),\ F(\bar{X}^*) = 27\,625 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, необходимо продавать товаров первой группы А – 250 ед., а второй группы В – 5375 ед. При этом торговое предприятие получает максимальный доход в размере 27 625 тыс. руб. Товары группы С не реализуются.

В оптимальном плане среди базисных переменных находится дополнительная переменная x_6. Это указывает на то, что ресурсы третьего вида (площадь складских помещений) недоиспользована на 1875 м^2, так как переменная x_6 была введена в третье ограничение задачи, характеризующее собой использование складских помещений этого ресурса.

В индексной строке оптимального плана в столбцах переменных x_3, x_4, x_5, не вошедших в состав базисных, получены ненулевые элементы, поэтому оптимальный план задачи линейного программирования является единственным.

Пример 2. Рассмотрим применение симплексного метода на примере поставленной задачи анализа коммерческой деятельности предприятия в разделе 2.2.1 и уже полученного решения в разделе 2.3.1 геометрическим методом. Для упрощения процедуры решения оставим условия неотрицательности переменных $x_н \geq 0$; $x_в \geq 0$.

Для построения первого опорного плана систему неравенств преобразуем к системе уравнений путем введения дополнительных балансовых переменных x_1, x_2, x_3, x_4, определяющих объем неиспользованных ресурсов:

$$\begin{cases} 0{,}5x_н + x_в + x_1 = 3, \\ x_н + 0{,}5x_в + x_2 = 4, \\ -x_н + x_в + x_3 = 1{,}5, \\ x_в + x_4 = 2, \end{cases}$$

а целевую функцию представим в виде уравнения

$$F(\overline{X}) = 0 - (-2x_н - 3x_в).$$

Полагая, что основные переменные $x_н = x_в = 0$, получим первый опорный план:

$$\overline{X}_1 = (0; 0; 3; 4; 1{,}5; 2);\ F(\overline{X}_1) = 0,$$

в котором базисные переменные равны:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - (0{,}5x_н + x_в) = 3, \\ x_2 = 4 - (x_н + 0{,}5x_в) = 4, \\ x_3 = 1{,}5 - (x_в - x_н) = 1{,}5, \\ x_4 = 2 - x_в = 2. \end{cases}$$

Первый опорный план заносим в симплексную табл. 2.3.3, который не является оптимальным, поскольку в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты (–2) и (–3). Затем, действуя в соответствии с изложенными выше правилами, переходим последовательно от одного плана к другому, пока не построим оптимальный план V, в котором в индексной строке отсутствуют отрицательные элементы. Запишем оптимальный план:

$$\overline{X}_5^* = (3^1/_3;\ 1^1/_3;\ 0;\ 0;\ 3{,}5;\ ^2/_3)\ F(\overline{X}_5^*) = 10^2/_3 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, для получения максимального дохода от дневной продажи краски $10^2/_3$ тыс. руб. предприятию необходимо выпускать в сутки $3^1/_3$ т краски наружных работ и $1^1/_3$ т краски для внутренних работ. В оптимальный план вошли дополнительные переменные $x_3 = 3{,}5$ и $x_4 = {}^2/_3$, что свидетельствует о величине недоиспользованных ресурсов третьего и четвертого вида. Следует заметить, что остальные ресурсы использованы полностью, поскольку $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

Полученный оптимальный план является невырожденным, так как при расчете столбца θ_i отсутствуют одинаковые минимальные значения отношений и все значения базисных переменных в оптимальном плане отличны от нуля. Кроме того, поскольку в индексной строке в столбцах переменных x_1 и x_2, не вошедших в состав базисных, получены не нулевые элементы, то оптимальный план является единственным.

Пример 3. Рассмотрим решение предыдущей задачи примера 2 с учетом дополнительных ограничений другого вида $\geq$, тогда получим:

Таблица 2.3.3

План	Базисные переменные	Значения базисных переменных	$x_н$	$x_в$	x_1	x_2	x_3	x_4	θ_i min
I	x_1	3	0,5	1	1	0	0	0	3
	x_2	4	1	0,5	0	1	0	0	8
	x_3	1,5	–1	1	0	0	1	0	1,5
	x_4	2	0	1	0	0	0	1	2
	$F(\overline{X}_1)$	0	**–2**	**–3**	0	0	0	0	
II	x_1	1,5	1,5	0	1	0	–1	0	1
	x_2	3,25	1,5	0	0	1	–0,5	0	$^{13}/_{6}$
	$x_в$	1,5	–1	1	0	0	1	0	–
	x_4	0,5	1	0	0	0	–1	1	0,5
	$F(\overline{X}_2)$	4,5	**–5**	0	0	0	3	0	
III	x_1	0,75	0	0	1	0	0,5	–1,5	1,5
	x_2	2,5	0	0	0	1	1	–1,5	2,5
	$x_в$	2	0	1	0	0	0	1	–
	$x_н$	0,5	1	0	0	0	–1	1	–
	$F(\overline{X}_3)$	7	0	0	0	0	**–2**	5	
IV	x_3	1,5	0	0	2	0	1	–3	–
	x_2	1	0	0	–2	1	0	1,5	$^{2}/_{3}$
	$x_в$	2	0	1	0	0	0	1	2
	$x_н$	2	1	0	2	0	0	–2	–
	$F(\overline{X}_4)$	10	0	0	4	0	0	**–1**	
V	x_3	3,5	0	0	–2	2	1	0	
	x_4	$^{2}/_{3}$	0	0	$-^{4}/_{3}$	$^{2}/_{3}$	0	1	
	$x_в$	$1^{1}/_{3}$	0	1	$^{4}/_{3}$	$-^{2}/_{3}$	0	0	
	$x_н$	$3^{1}/_{3}$	1	0	$-^{2}/_{3}$	$^{4}/_{3}$	0	0	
	$F(\overline{X}_5)$	$10^{2}/_{3}$	0	0	$2^{2}/_{3}$	$^{2}/_{3}$	0	0	

$$\begin{cases} 0{,}5x_н + x_в \le 3, \\ x_н + 0{,}5x_в \le 4, \\ -x_н + x_в \le 1{,}5, \\ x_в \le 2, \\ x_в \ge 0{,}25, \\ x_н \ge 0{,}5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}5x_н + x_в + x_1 = 3, \\ x_н + 0{,}5x_в + x_2 = 4, \\ -x_н + x_в + x_3 = 1{,}5, \\ x_в + x_4 = 2, \\ -x_в + x_5 = -0{,}25, \\ -x_н + x_6 = -0{,}5, \end{cases}$$

$$F(\overline{X}) = 2x_н + 3x_в \to \max \qquad F(\overline{X}) = 0 - (-2x_н - 3x_в) \to \max.$$

Заполним симплексную табл. 2.3.4 и проведем соответствующие операции, учитывая, что при вычислении частных θ_i необходимо деление проводить только с числами одинакового знака.

Таблица 2.3.4

План	Базисные переменные	Значения базисных переменных	$x_н$	$x_в$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i min
I	x_1	3	0,5	1	1	0	0	0	0	0	3
	x_2	4	1	0,5	0	1	0	0	0	0	8
	x_3	1,5	–1	1	0	0	1	0	0	0	1,5
	x_4	2	0	1	0	0	0	1	0	0	2
	x_5	–1/4	0	–1	0	0	0	0	1	0	$^1/_4$
	x_6	–0,5	–1	0	0	0	0	0	0	1	–
	$F(\overline{X}_1)$	0	–2	–3	0	0	0	0	0	0	
VI	x_3	3,5	0	0	–2	2	1	0	0	0	
	x_4	$^2/_3$	0	0	$-^4/_3$	$^2/_3$	0	1	0	0	
	x_5	$1^1/_{12}$	0	0	$^4/_3$	$-^2/_3$	0	0	1	0	
	$x_н$	$3^1/_3$	1	0	$-^2/_3$	$^4/_3$	0	0	0	0	
	$x_в$	$1^1/_3$	0	1	$^4/_3$	$-^2/_3$	0	0	0	0	
	x_6	$2^5/_6$	0	0	$-^2/_3$	$^4/_3$	0	0	0	1	
	$F(\overline{X}_6)$	$10^2/_3$	0	0	$2^2/_3$	$^2/_3$	0	0	0	0	

После нескольких итераций, часть которых в таблице пропущена, получим оптимальный план

$$\bar{X}_6^* = (3^1/_3; 1^1/_3; 0; 0; 3{,}5; {}^2/_3; 1^1/_{12}; 2^5/_6).$$

Решение задачи закончено и $F_{\max}(\bar{X}_6^*) = 10^2/_3$ тыс. руб.

Решите задачи № 1–4 раздела 2.3.1 симплексным методом.

2.3.3. Метод искусственного базиса

Симплексный метод решения задач базируется на введении дополнительных переменных, позволяющих образовать единичную матрицу, в которую не допускаются отрицательные и другие числа, кроме нуля и единицы. Наличие единичной матрицы является необходимым условием при решении задач симплексным методом.

Если же ограничения задачи заданы в виде неравенств вида $\geq$ или уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq b_i \quad \text{и(или)} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$$

то невозможно сразу получить начальное базисное решение, если матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных системы ограничений, не позволяет образовать единичную матрицу. Причем уравнения отражают жесткие условия ограничений по ресурсам, не допускающие никаких отклонений. Для соблюдения равенств вводятся искусственные переменные y_i равные нулю. Векторы искусственных переменных образуют необходимую для решения единичную матрицу. Такой базис называется искусственным, а метод решения называется **методом искусственного базиса**. Причем искусственные переменные не имеют отношения к содержанию поставленной задачи, однако они позволяют построить стартовую точку, а процесс оптимизации вынуждает эти переменные принимать нулевые значения и обеспечить допустимость оптимального решения. Рассмотрим примеры постановки и решения задач такого рода.

Преобразование ограничений, заданных в виде уравнений, рассмотрим на примере:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 25, \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 29, \\ 4x_2 + 2x_3 = 31. \end{cases}$$

В систему равенств вводим искусственные переменные y_1, y_2, y_3 с коэффициентами, равными единице, позволяющими образовать искусственный базис решения:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 25, \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 0y_1 + 1y_2 + 0y_3 = 29, \\ 0x_1 + 4x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 1y_3 = 31. \end{cases}$$

Целевая функция имеет вид:
при решении задачи на **максимум** –

$$F(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + (-M)y_1 + (-M)y_2 + (-M)y_3 \to \max;$$

при решении задачи на **минимум** –

$$F(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + My_1 + My_2 + My_3 \to \min.$$

За использование искусственных переменных, вводимых в целевую функцию, накладывается так называемый штраф величиной M, очень большое положительное число, которое обычно не задается ($M \to \infty$).

Преобразования ограничений в виде неравенств вида $\geq$ рассмотрим на примере:

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 30, \\ 4x_2 + x_3 \geq 12, \\ 11x_1 + 10x_3 \geq 41. \end{cases}$$

Для получения системы уравнений вводим дополнительные переменные x_4, x_5, x_6.

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 30, \\ 4x_2 + x_3 - x_5 = 12, \\ 11x_1 + 10x_3 - x_6 = 41. \end{cases}$$

Поскольку на главной диагонали единичной матрицы не могут находиться (−1), то в систему вводим искусственные переменные y_1, y_2, y_3 с коэффициентами (+1), которые образуют искусственный базис решения

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 1x_4 - x_5 - 0x_6 + 1y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 30, \\ 0x_1 + 4x_2 + x_3 - 0x_4 - 1x_5 - 0x_6 + 0y_1 + 1y_2 + 0y_3 = 12, \\ 11x_1 + 0x_2 + 10x_3 - 0x_4 - 0x_5 - 1x_6 + 0y_1 + 0y_2 + 1y_3 = 41. \end{cases}$$

Целевая функция имеет вид:
при решении задачи на **максимум** –

$$F(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + (-M)y_1 + (-M)y_2 + \\ + (-M)y_3 \to \max;$$

при решении задачи на **минимум** –

$$F(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + My_1 + My_2 + My_3 \to \min.$$

Преобразование разнородных ограничений, представляющих собой смесь уравнений и неравенств разного вида, заключается в образовании базиса решения путем одновременного введения свободных и искусственных переменных, что придает симплекс-ному методу большую гибкость. Например, ограничения заданы в виде системы:

$$\begin{cases} 20x_1 + 7x_2 + 2x_3 \le 43, \\ 3x_1 + 9x_2 + 10x_3 = 33, \\ 6x_1 + 12x_2 + 7x_3 \ge 23. \end{cases}$$

Сначала образуем систему уравнений, для чего вводим в первое неравенство дополнительную переменную x_4, а в третье неравенство – дополнительную переменную x_5:

$$\begin{cases} 20x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 43, \\ 3x_1 + 9x_2 + 10x_3 = 33, \\ 6x_1 + 12x_2 + 7x_3 - 1x_5 = 23. \end{cases}$$

Для образования единичной матрицы вводим недостающие элементы: во второе уравнение искусственную переменную y_1, а в третье y_2:

$$\begin{cases} 20x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 0x_5 + 1x_4 + 0y_1 + 0y_2 = 43, \\ 3x_1 + 9x_2 + 10x_3 - 0x_5 + 0x_4 + 1y_1 + 0y_2 = 33, \\ 6x_1 + 12x_2 + 7x_3 - 1x_5 + 0x_4 + 0y_1 + 1y_2 = 23. \end{cases}$$

Целевая функция имеет вид:
при решении задачи на **максимум** –

$$F(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + 0x_4 + 0x_5 - My_1 - My_2 \to \max;$$

при решении задачи на **минимум** –

$$F(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + My_1 + My_2 \to \min.$$

Поставленные таким образом задачи можно решать симплексным методом.

Пример 4. Определим минимальное и максимальное значения целевой функции $F(\overline{X}) = x_1 + 3x_2$ при следующих смешанных условиях-ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 8x_2 \ge 8, \\ x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Запишем систему ограничений в виде равенств, для чего введем дополнительные переменные x_3 и x_4, в результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 5, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Затем введем искусственные переменные y_1 и y_2 в первое и второе уравнения:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 0 \cdot x_3 + 1y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot x_4 = 3, \\ 4x_1 + 8x_2 - 1x_3 + 0 \cdot y_1 + 1y_2 + 0 \cdot x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 - 0 \cdot x_3 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 1x_4 = 5. \end{cases}$$

Для постановки задачи на минимум целевую функцию запишем так:

$$F(\overline{X}) = x_1 + 3x_2 + My_1 + My_2 \to \min.$$

С целью формулировки задачи для решения ее в табличной форме воспользуемся выражениями из системы уравнений для искусственных переменных:

$$\begin{cases} y_1 = 3 - 2x_1 - x_2, \\ y_2 = 8 - 4x_1 - 8x_2 + x_3, \end{cases}$$

которые подставим в целевую функцию:

$$F(\overline{X}) = x_1 + 3x_2 + M(3 - 2x_1 - x_2) + M(8 - 4x_1 - 8x_2 + x_3) =$$
$$= (1 - 6M)x_1 + (3 - 9M)x_2 + Mx_3 + 11M \to \min.$$

Таким образом, стартовая точка решения определяется $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 5$, $y_1 = 3$, $y_2 = 8$, следовательно, уравнение целевой функции для симплексной таблицы будет иметь такой вид:

$$F(\overline{X}) = 11\text{M} - (6M - 1) - (9M - 3) - (-M)x_3.$$

Последовательность решения задачи симплексным методом представлена в табл. 2.3.5.

Таблица 2.3.5

План	Базисные переменные	Значения базисных переменных	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	θ_i min
I	y_1	3	2	1	0	0	1	0	3
	y_2	8	4	8	−1	0	0	1	1
	x_4	5	1	2	0	1	0	0	2,5
	$F(\overline{X}_1)$	$11M$	$6M-1$	$9M-3$	$-M$	0	0	0	
II	y_1	2	1,5	0	$^1/_8$	0	1	$-^1/_8$	$1^1/_3$
	x_2	1	$^1/_2$	1	$-^1/_8$	0	0	$^1/_8$	2
	x_4	3	0	0	$^1/_4$	1	0	$-^1/_4$	–
	$F(\overline{X}_2)$	$3+2M$	$(0,5+1,5M)$	0	$\frac{M-3}{8}$	0	0	$\frac{3-9M}{8}$	
III	x_1	$1^1/_3$	1	0	$^1/_{12}$	0	$^2/_3$	$-^1/_{12}$	
	x_2	$^1/_3$	0	1	$-^1/_6$	0	$-^1/_3$	$^1/_6$	
	x_4	3	0	0	$^1/_4$	1	0	$-^1/_4$	
	$F(\overline{X}_3)$	$2^1/_3$	0	0	$-^5/_{12}$	0	$\left(-\frac{1}{3}-M\right)$	$\frac{3-9M}{8}$	

Поскольку задача решается на минимум, то ведущий столбец выбирают по максимальному положительному числу в индексной строке в плане I ($9M-3$), а все остальные преобразования проводятся по стандартной схеме до тех пор, пока не получатся в индексной строке только неположительные числа (≤ 0), а в оптимальном решении должны отсутствовать положительные значения искусственных переменных y_1 и y_2. Оптимальному решению соответствует точка с координатами $x_1 = 1^1/_3$ и $x_2 = {}^1/_3$, где $F_{\min}(\overline{X}) = 2^1/_3$, а $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$.

Следует заметить, что геометрический метод решения позволяет получить такой же результат.

Для решения этой же задачи на максимум целевую функцию следует записать иначе:

$$F(\overline{X}) = x_1 + 3x_2 - My_1 - My_2 \to \max.$$

Затем, подставив выражения для искусственных переменных, получим:

$$F(\overline{X}) = (1 + 6M)x_1 + (3 + 9M)x_2 - Mx_3 - 11M.$$

Таблица 2.3.6

План	Базисные переменные	Значения базисных переменных	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	θ_i min
I	y_1	3	2	1	0	0	1	0	3
	y_2	8	4	8	–1	0	0	1	1
	x_4	5	1	2	0	1	0	0	2,5
	$F(\overline{X}_1)$	$-11M$	–6M –1	–9M –3	M	0	0	0	
II	y_1	2	1,5	0	$^{1}/_{8}$	0	1	$-^{1}/_{8}$	1
	x_2	1	$^{1}/_{2}$	1	$-^{1}/_{8}$	0	0	$^{1}/_{8}$	2
	x_4	3	0	0	$^{1}/_{4}$	1	0	$-^{1}/_{4}$	–
	$F(\overline{X}_2)$	3 – 2M	0,5 – –1,5 M	0	$\frac{-M-3}{8}$	0	0	$\frac{3+9M}{8}$	
III	x_1	$1^{1}/_{3}$	1	0	$^{1}/_{12}$	0	$^{2}/_{3}$	$-^{1}/_{12}$	16
	x_2	$^{1}/_{3}$	0	1	$-^{1}/_{6}$	0	$-^{1}/_{3}$	$^{1}/_{6}$	–
	x_4	3	0	0	$^{1}/_{4}$	1	0	$-^{1}/_{4}$	12
	$F(\overline{X}_3)$	$2^{1}/_{3}$	0	0	$-^{5}/_{12}$	0	$-\frac{1}{3}+M$	$\frac{5}{12}+M$	
IV	x_1	$^{1}/_{3}$	1	0	0	$-^{1}/_{3}$	$^{2}/_{3}$	0	
	x_2	$2^{1}/_{3}$	0	1	0	$^{2}/_{3}$	$-^{1}/_{3}$	0	
	x_3	12	0	0	1	4	0	–1	
	$F(\overline{X}_4)$	$7^{1}/_{3}$	0	0	0	$1^{2}/_{3}$	M – $^{1}/_{3}$	M	

Преобразуем это выражение в удобную форму для записи в симплексную таблицу:

$$F(\overline{X}) = -11M - (-6M - 1)x_1 - (-9M - 3)x_2 - (+M)x_3.$$

Полученные выражения вместе с условиями ограничения записываем для преобразования в симплексную табл. 2.3.6.

Преобразования проводим до тех пор, пока все значения в индексной строке не станут неотрицательными. В плане IV получили $x_1 = {}^1/_3$, $x_2 = 2^1/_3$, а $F_{\max}(\overline{X}_4) = 7^1/_3$, что совпадает с решением задачи, полученным геометрическим методом.

2.3.4. Метод Гомори. Целочисленное решение

Значительная часть задач коммерческой деятельности требует целочисленного решения. К ним относятся задачи, у которых переменные величины означают количество единиц неделимой продукции, например распределение товаров между коммерческими предприятиями, раскрой материалов, число станков при загрузке оборудования, распределение транспортных средств по рейсам, распределение коммерческих заказов между оптовыми предприятиями, продажа автомобилей, распределение самолетов по авиалиниям, количество вычислительных машин в управляющем комплексе и др. Линейные задачи, решение которых должно быть получено в целых числах, называют задачами целочисленного программирования.

Задача целочисленного программирования формулируется так же, как и задача линейного программирования, но включает дополнительное требование, состоящее в том, что значения переменных должны быть целыми неотрицательными числами, например $x_1 = 30$ станков, $x_2 = 16$ самолетов, $x_3 = 7$ человек.

Методы целочисленной оптимизации можно разделить на три основные группы: а) методы отсечения; б) комбинированные методы; в) приближенные методы. Рассмотрим один из методов отсечения — метод Гомори.

Сущность методов отсечения состоит в том, что сначала задача решается без условия целочисленности. Если полученный план целочисленный, то задача решена. В противном случае к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами:

а) оно должно быть линейным;

б) должно отсекать найденный оптимальный нецелочисленный план;

в) не должно отсекать ни одного целочисленного плана.

Дополнительное ограничение, обладающее указанными свойствами, называется **правильным отсечением**.

Алгоритм Гомори, основанный на симплексном методе, имеет простой способ построения правильного отсечения и содержит следующие этапы.

1. Задача линейного программирования решается без учета условия целочисленности симплексным или двойственным симплексным методом. Если все элементы оптимального плана целые числа, то решение заканчивается для задачи целочисленного программирования.

2. Если среди элементов оптимального решения есть нецелые числа, то необходимо выбрать элемент с наибольшей дробной частью и составить дополнительное ограничение (сечение), которое отсекает нецелочисленные решения.

Дополнительное ограничение дается в том случае, если значение базисной переменной в оптимальном плане $x_i = b_i$ – дробное число. Тогда некоторые элементы a_{ij} в i-й строке симплексной таблицы также дробные числа. Обозначим $[b_i]$ и $[a_{ij}]$ целые части чисел b_i и a_{ij}, т.е. наибольшие целые числа, не превышающие b_i и a_{ij}. Величины дробных частей q_i и q_{ij} определяются как разности следующим образом:

$q_i = b_i - [b_i]$; $q_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}]$ и являются положительными числами.

Тогда неравенство $q_i - q_{i1} \cdot x_1 - q_{i2} \cdot x_2 - \dots - q_{im} \cdot x_n \leq 0$, сформированное по i-й строке симплексной таблицы, обладает всеми свойствами правильного отсечения.

3. Неравенство преобразуется в уравнение путем введения дополнительной неотрицательной переменной и включается в оптимальную симплексную таблицу.

4. Полученная расширенная задача решается двойным симплексным методом. Если новый оптимальный план будет целочисленным, то задача решена. В противном случае необходимо вернуться к п. 2 алгоритма.

Если в процессе решения в симплексной таблице появится уравнение с нецелым свободным членом b_i и целыми коэффициентами a_{ij}, то данная задача не имеет целочисленного оптимального решения.

Пример. Маркетинговые исследования указали на необходимость освоения выпуска новой продукции. Поэтому на предприятии решено установить новое технологическое оборудование на освободившейся площади 10 м^2. На приобретение оборудования двух видов выделено 6 млн руб. Комплект первого вида оборудования стоимостью 1 млн руб. устанавливается на площади 5 м^2 и позволяет увеличить доход предприятия на 8 млн руб. Комплект второго вида оборудования занимает площадь 2 м^2, стоит 1 млн руб. и обеспечивает увеличение дохода предприятия на 5 млн руб. Определите, какое количество технологического оборудования каждого вида следует закупить, чтобы обеспечить максимальное увеличение дохода предприятия от продажи выпускаемой продукции.

Решение. Обозначим через x_1, x_2 количество комплектов технологического оборудования соответственно первого и второго видов, через $F(x)$ — доход предприятия от продажи продукции.

Тогда математическая модель задачи имеет вид:

$$F(x) = 8x_1 + 5x_2 \to \max,$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \le 0,\ \ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

где x_1, x_2 — целые числа.

Приведем задачу к каноническому виду, для чего введем дополнительные неотрицательные переменные x_3, x_4 и решим ее симплексным методом, а результаты запишем в табл. 2.3.7.

Таблица 2.3.7

Базисные переменные	Значения базисных переменных	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
$\leftarrow x_3$ x_4 $F(x)$	20 6 0	5 ↑ 1 –8	2 1 –5	1 0 0	0 1 0	4 6 max
x_1 $\leftarrow x_4$ $F(x)$	4 2 32	1 0 0	$^2/_5$ $^3/_5$ ↑ $-^9/_5$	$^1/_5$ $-^1/_5$ $^8/_5$	0 1 0	10 $^{10}/_3$ max
x_1 x_2 $F(x)$	$^8/_3$ $^{10}/_3$ $^{114}/_3$	1 0 0	0 1 0	$^1/_3$ $-^1/_3$ 1	$-^2/_3$ $^5/_3$ 3	

В табл. 2.3.7 на третьей итерации получен оптимальный план $x^* = (^8/_3, {}^{10}/_3)$, в котором $x_1 = {}^8/_3$ и $x_2 = {}^{10}/_3$ — дробные числа.

По первому уравнению с переменной x_1, получившей нецелочисленное значение в оптимальном плане с наибольшей дробной частью ($^2/_3$), составляем дополнительное ограничение:

$$q_1 - q_{11} \cdot x_1 - q_{12} \cdot x_2 - q_{13}x_2 - q_{14} \cdot x_4 \leq 0;$$
$$q_1 = b_1 - [b_1] = {}^8/_3 - 2 = {}^2/_3;$$
$$q_{11} = a_{11} - [a_{11}] = 1 - 1 = 0;$$
$$q_{12} = a_{12} - [a_{12}] = 0 - 0 = 0;$$
$$q_{13} = a_{13} - [a_{13}] = {}^1/_3 - 0 = {}^1/_3;$$
$$q_{14} = a_{14} - [a_{14}] = -{}^2/_3 + 1 = {}^1/_3.$$

Дополнительное ограничение имеет вид:

$$^2/_3 - {}^1/_3x_3 - {}^1/_3x_4 \leq 0.$$

Преобразуем полученное неравенство в уравнение:

$$^2/_3 - {}^1/_3x_3 - {}^1/_3x_4 + x_5 = 0,$$

коэффициенты которого введем дополнительной строкой в оптимальную симплексную табл. 2.3.7; тогда получим продолжение табл. 2.3.8.

Таблица 2.3.8

Базисные переменные	Значения базисных переменных	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$^8/_3$	1	0	$^1/_3$	−2/3	0
x_2	$^{10}/_3$	0	1	$-^1/_3$	5/3	0
$\leftarrow x_5$	$-^2/_3$	0	0	$-^1/_3 \uparrow$	−1/3	1
$F(x)$	$^{114}/_3$	0	0	1	3	0
θ	max	–	–	3	9	–
x_1	2	1	0	0	−1	1
x_2	4	0	1	0	2	−1
x_3	2	0	0	1	1	−3
$F(x)$	36	0	0	0	2	3

Применяя алгоритм двойственного симплексного метода, проводим одну итерацию, в результате которой получаем оптимальное целочисленное решение: $X = (2, 4, 2)$; $F_{\max}(X^*) = 36$ млн руб.

Таким образом, предприятию необходимо установить два комплекта оборудования первого вида и четыре комплекта второго вида. Это позволит максимально увеличить доход предприятия.

В задачах 1 и 2 найти оптимальные решения методом Гомори.

1) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 24, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \end{cases}$

x_1, x_2 – целые числа,
$F(x) = x_1 + 2x_2 \to \max.$

2) $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 30, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \end{cases}$

x_1, x_2 – целые числа,
$F(x) = x_1 + 2x_2 \to \max.$

Контрольные вопросы

1. Какие задачи линейного программирования можно решать симплексным методом?
2. Каков признак оптимальности в симплексном методе?
3. Как строится опорный план?
4. Как определяются ведущий столбец и ведущая строка симплексной таблицы?
5. Как осуществляется перерасчет элементов симплексной таблицы?
6. Каковы основные случаи при реализации симплексного метода?
7. В каких вариантах постановки задач следует пользоваться для их решения методом искусственного базиса?
8. Какие задачи следует решать методом Гомори?

Задачи

1—7. Для реализации трех групп товаров коммерческое предприятие располагает тремя видами ограниченных материально-денежных ресурсов в количестве b_1, b_2, b_3 единиц. При этом для продажи первой группы товаров на 1 тыс. руб. товарооборота расходуется ресурса первого вида в количестве a_{11} единиц, ресурса второго вида – в количестве a_{21} единиц, ресурса третьего вида – в количестве a_{31} единиц. Для продажи второй и третьей групп товаров на 1 тыс. руб. товарооборота расходуется соответственно ресурса первого вида в количестве a_{12}, a_{13} единиц, ресурсов второго вида – в количестве a_{22}, a_{23} единиц, ресурсов третьего вида – в количестве a_{32}, a_{33} единиц. Доход от продажи трех групп товаров на 1 тыс. руб. товарооборота составляет соответственно c_1, c_2, c_3 (тыс. руб.).

Определите плановый объем и структуру товарооборота так, чтобы доход торгового предприятия был максимальным.

1. $a_{11} = 3$, $a_{12} = 6$, $a_{13} = 4$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 1$, $a_{23} = 2$, $a_{31} = 2$, $a_{32} = 3$, $a_{33} = 1$, $b_1 = 180$, $b_2 = 50$, $b_3 = 40$, $c_1 = 6$, $c_2 = 5$, $c_3 = 5$.

2. $a_{11} = 3$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 1$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 1$, $a_{23} = 3$, $a_{31} = 4$, $a_{32} = 2$, $a_{33} = 1$, $b_1 = 420$, $b_2 = 600$, $b_3 = 900$, $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = 4$.

3. $a_{11} = 16$, $a_{12} = 18$, $a_{13} = 9$, $a_{21} = 7$, $a_{22} = 7$, $a_{23} = 2$, $a_{31} = 9$, $a_{32} = 2$, $a_{33} = 3$, $b_1 = 520$, $b_2 = 140$, $b_3 = 810$, $c_1 = 8$, $c_2 = 6$, $c_3 = 4$.

4. $a_{11} = 4$, $a_{12} = 8$, $a_{13} = 2$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 8$, $a_{23} = 4$, $a_{31} = 12$, $a_{32} = 4$, $a_{33} = 6$, $b_1 = 116$, $b_2 = 240$, $b_3 = 432$, $c_1 = 83$, $c_2 = 6$, $c_3 = 6$.

5. $a_{11} = 8$, $a_{12} = 10$, $a_{13} = 20$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 13$, $a_{23} = 8$, $a_{31} = 2$, $a_{32} = 18$, $a_{33} = 12$, $b_1 = 800$, $b_2 = 520$, $b_3 = 940$, $c_1 = 3$, $c_2 = 6$, $c_3 = 7$.

6. $a_{11} = 1$, $a_{12} = 4$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 3$, $a_{23} = 1$, $a_{31} = 2$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = 5$, $b_1 = 36$, $b_2 = 50$, $b_3 = 80$, $c_1 = 6$, $c_2 = 16$, $c_3 = 25$.

7. $a_{11} = 17$, $a_{12} = 5$, $a_{13} = 5$, $a_{21} = 8$, $a_{22} = 6$, $a_{23} = 6$, $a_{31} = 4$, $a_{32} = 2$, $a_{33} = 4$, $b_1 = 850$, $b_2 = 1120$, $b_3 = 1060$, $c_1 = 8$, $c_2 = 7$, $c_3 = 4$.

8. На кондитерскую фабрику г. Покров перед Новым годом поступили заказы на подарочные наборы конфет из магазинов. Возможные варианты наборов, их стоимость и товарные запасы представлены в таблице.

Наименование конфет	Вес конфет в наборе, кг			Запасы конфет, кг
	A	B	C	
«Сникерс»	0,3	0,2	0,4	600
«Марс»	0,2	0,3	0,2	700
«Баунти»	0,2	0,1	0,1	500
Цена, руб.	72	62	76	

Определите оптимальное количество подарочных наборов, обеспечивающее максимальный доход от продажи.

9. Нормы затрат на производство разных видов пиццы, объемы ресурсов и стоимость приведены в таблице. Определите оптимальное количество пиццы, обеспечивающее максимальный доход от продаж.

Продукты	Нормы затрат на изготовление 100 шт. пиццы, кг			Запасы продуктов, кг
	ассорти	грибная	салями	
Грибы	6	7	2	20
Колбаса	5	2	8	18
Тесто	10	8	6	25
Цена за 100 шт., тыс. руб.	9	6	5	

10. Постройте экономико-математическую модель определения структуры блюд на предприятии общественного питания, обеспечивающую максимальный доход, на основе заданных нормативов затрат продуктов на первые и вторые блюда, представленных в следующей таблице:

Ресурсы	Плановый фонд ресурсов	Нормативные затраты ресурсов, кг на 100 блюд				
		1-е блюда	2-е мясные	2-е рыбные	2-е молочные	2-е прочие
Мясо	40	4,0	8,0	–	–	3,8
Рыба, т	25	2,5	–	10	–	–
Овощи, т	27	3,2	2,0	3,0	–	4,6
Мука, крупа, макаронные изделия, т	20	2,1	2,6	2,3	–	2,8
Молоко, л	50 000	6,5	–	–	21	–
Доход, руб.		1,3	2,0	1,5	0,3	1,7

11. Предприниматель арендовал технологическую линию деревообрабатывающих станков для изготовления вагонки. Магазин «Стройматериалы» заказал комплекты из трех элементов: две вагонки длиной 2 м и одной вагонки длиной 1,25 м. Поставщик завозит на грузовом автомобиле доски толщиной 20 мм, шириной 100 мм, длиной по 6,5 м – 200 шт. и длиной по 4 м – 50 шт.

Рассчитайте, как распилить доски, чтобы продать максимальное количество комплектов.

12. Составьте самый дешевый вариант 1 т кормовой смеси в соответствии с требованиями, представленными в следующей таблице.

Питательные вещества	Требования, % от веса	Содержание питательных веществ, %			
		люцерновая мука	сухая барда	рыбная мука	соевый шрот
Белок	Не менее 35	17	25	60	45
Жиры	Не менее 1,5	2	5	7	0,5
Клетчатка	Не более 8	25	3	1	6,5
Вес	1т	1	1	1	1
Стоимость, руб. за 1 т	?	700	900	1500	1000

13. По предписанию врача пациенту необходимо перейти на диету и за сезон употребить питательных веществ, содержащихся во фруктах, в количествах, указанных в таблице.

Вещества	Содержание питательных веществ в 1 кг фруктов			Нормы потребления, г
	клубника	яблоки	смородина	
p_1	3	2	1	30
p_2	1	3	4	70
p_3	0	0	5	40
p_4	1	0	1	50
Цена, руб. за 1 кг	50	40	30	

Определите, какое количество фруктов каждого вида необходимо купить, чтобы выполнить предписание врача с минимальными расходами.

14. Постройте экономико-математическую модель определения структуры выпуска первых и вторых блюд на предприятии общественного питания при заданном квартальном плане товарооборота 300 000 руб. и получении максимального дохода от реализации на основе данных, приведенных в следующей таблице.

Ресурсы	Плановый фонд ресурсов	Нормы затрат ресурсов на 100 блюд			
		1-е блюда	2-е мясные	2-е рыбные	2-е молочные
Затраты труда на производство, чел.-ч	80 000	3,6	6,0	37,0	2,5
Затраты труда на обслуживание, чел.-ч	140 000	2,2	5,3	5,2	2,7
Издержки производства и обращения, руб.	17 000	4,4	6,7	6,8	25
Доход, руб.		1,4	2,1	1,6	0,31
Товарооборот, руб.	300 000	30	38	24	23

15. Брокеру биржи клиент поручил разместить 100 000 долл. США на фондовом рынке. Необходимо сформировать такой портфель с ценными бумагами, чтобы получить максимальные проценты с вложенного капитала. Выбор ограничен четырьмя возможными объектами инвестиций-акций А, В, С, Д, которые позволяют получить доход в размерах соответственно 6, 8, 10 и 9% годовых от вложенной суммы. При этом клиент поручил не менее половины инвестиций вложить в акции А и В. С целью обеспечения ликвидности не менее 25% общей суммы капитала нужно поместить в акции Д. Учитывая прогноз на изменение ситуации в будущем, в акции С можно вложить не более 20% капитала. Специфика налогообложения указывает на необходимость вложения в акции А не менее 30% капитала.

Определите распределение инвестиций капитала, обеспечивающее максимальный годовой доход.

16. Сформируйте оптимальный ассортиментный набор торгового предприятия, включающий 60 наименований товаров, если известны ежедневный товарооборот в целом и по товарным позициям количественно-суммового учета, статистические данные количественного учета неудовлетворенного спроса по всем наименованиям товаров, остатки товарных запасов, торговая площадь, расстояние до поставщиков, транспортные расходы, вид транспорта и графики завоза товаров.

Определите потери товарооборота за счет неудовлетворенного спроса и затрат на дополнительные расходы по его удовлетворению. Введите условные обозначения показателей хозяйственной деятельности и постройте экономико-математическую модель формирования оптимального ассортиментного набора.

17. Авиакомпания «Аэрофлот» располагает парком из самолетов семи типов.

Тип самолета	Загрузка пассажирами		Время полета без посадки, ч	Парк самолетов, шт.
	минимальная	максимальная		
1. ТУ-154	132	158	4	10
2. ИЛ-62	132	162	12	10
3. ИЛ-86	316	350	5	12
4. ИЛ-96	235	–	10	4
5. В-737	137	–	12	3
6. В-777	231	–	22	2
7. А-310	179	191	12	4

Самолеты используются для перевозки пассажиров на пяти авиалиниях, по каждой из них задан объем ежемесячных перевозок. Постройте оптимальный план перевозки пассажиров.

Рейс	Протяженность линий, ч	Количество промежуточных посадок	Объем пассажирских перевозок, чел.
I. Египет – Хургада	5,5	0	4000
II. Испания – Малага	4,5	0	3500
III. Япония – Токио	11	2	35 000
IV. Франция – Париж	3,5	1	7000
V. США – Нью-Йорк	9	2	6000

18–25. Решить задачи методом искусственного базиса.

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 7. \\ x_k \geq 0, \ k = \overline{1,4} \end{cases}$

$F(\overline{X}) = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

19. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 \geq 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 \geq 1. \\ x_k \geq 0, \ k = \overline{1,4} \end{cases}$

$F(\overline{X}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min$

20. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 24, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 46, \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 20. \\ x_k \geq 0, \ k = \overline{1,3} \end{cases}$

$F(\overline{X}) = 90x_1 + 10x_2 + 120x_3 \to \min$

21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 20, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 10. \\ x_k \geq 0, \ k = \overline{1,3} \end{cases}$

$F(\overline{X}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$

22. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 24, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 18. \\ x_k \geq 0, \ k = \overline{1,3} \end{cases}$

$F(\overline{X}) = 192x_1 + 210x_2 + 234x_3 \to \min$

23. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16, \\ 6x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 24, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 11. \\ x_k \geq 0, \ k = \overline{1,3} \end{cases}$

$F(\overline{X}) = 6x_1 + 12x_2 + 3x_3 \to \max$

24. $\begin{cases} 16x_1 + 6x_2 - 32x_3 \geq 48, \\ -8x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 96, \\ -8x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 16. \\ x_k \geq 0, \ k = \overline{1,3} \end{cases}$

$F(\overline{X}) = x_1 + 48x_2 + 16x_3 \to \min$

25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 11, \\ x_2 + x_3 - 4x_4 \leq 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 46. \\ x_k \geq 0, \ k = \overline{1,4} \end{cases}$

$F(\overline{X}) = 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 \to \max.$

2.4. Двойственные задачи линейного программирования

В этой главе вводится новое понятие теории линейного программирования – понятие двойственности. Будучи исключительно важным в теоретическом отношении, оно представляет и большой практический интерес. На основе теории двойственности разработан алгоритм решения задач линейного программирования – двойственный симплексный метод и эффективные методы анализа моделей на чувствительность. Любой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие другую задачу, сформулированную по стандартным правилам таким образом, что решение любой из них является и решением другой задачи. Такие задачи называются взаимодвойственными.

2.4.1. Построение двойственной задачи

Двойственная обратная задача – задача линейного программирования, формулируемая с помощью определенных правил непосредственно из условий исходной, или прямой, задачи. В литературе по линейному программированию в большинстве случаев рассматриваются формулировки двойственной задачи, соответствующие различным формам прямой задачи, которые, в свою очередь, определяются типом ограничений, знаками переменных и направлением оптимизации (максимизация или минимизация). Опыт показывает, что на начальной стадии изучения теории линейного программирования детали различных формулировок двойственной задачи нередко затрудняют восприятие материала.

Рассмотрим обобщенную формулировку двойственной задачи линейного программирования, которая применима к любой форме представления прямой задачи. В основу такой формулировки положен тот факт, что использование симплекс-метода требует приведения любой задачи линейного программирования к стандартной форме. Так как все методы вычислений, основанные на соотношениях двойственности, предполагают непосредственное использование симплекс-таблиц, формулировка двойственной задачи в соответствии со стандартной формой прямой задачи представляется достаточно логичной. Следует, однако, помнить, что приводимая ниже формулировка двойственной задачи является обобщенной в том смысле, что она применима ко всем формам прямой задачи.

Прямая задача линейного программирования в стандартной форме записывается следующим образом:
максимизировать

$$F(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.4.1}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1, m}, & (2.4.2) \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. & (2.4.3) \end{cases}$$

Чтобы сформулировать условия двойственной задачи, проведем симметричное структурное преобразование условий прямой задачи в соответствии со следующими правилами:

1) каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи;

2) каждой переменной прямой задачи соответствует ограничение двойственной задачи;

3) коэффициенты при некоторой переменной, фигурирующие в ограничениях прямой задачи, становятся коэффициентами левой части соответствующего ограничения двойственной задачи, а коэффициент, фигурирующий при той же переменной в выражении для целевой функции прямой задачи, становится постоянной правой части этого же ограничения двойственной задачи.

На примере задачи планирования товарооборота двойственная задача формулируется следующим образом:

определить оценку (неявную стоимость) единицы каждого вида ресурсов y_i ($i = \overline{1, m}$), чтобы при заданных объемах ресурсов b_i, прибыли c_j, нормах расхода ресурсов a_{ij} минимизировать оценку всех ресурсов торгового предприятия, затраченных на организацию торгового процесса.

Запишем математическую модель двойственной задачи.

Определить вектор $\overline{Y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$, который удовлетворяет ограничениям

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n}, & (2.4.4) \\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} & (2.4.5) \end{cases}$$

и обеспечивает минимальное значение целевой функции

$$Z(\overline{Y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i \to \min. \quad (2.4.6)$$

Ограничения (2.4.4) показывают, что стоимость всех ресурсов, затраченных на продажу единицы j-группы товаров, должна быть не меньше дохода, получаемого при реализации единицы j-группы товаров, а общая стоимость всех ресурсов должна быть минимизирована.

В целом двойственная задача по отношению к исходной составляется согласно следующим правилам.

1. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в прямой задаче.

2. Матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы коэффициентов системы ограничений прямой задачи путем транспонирования.

3. Система ограничений двойственной задачи записывается в виде неравенств противоположного смысла неравенствам системы ограничений прямой задачи.

4. Свободными членами системы ограничений двойственной задачи являются коэффициенты функции цели прямой задачи.

5. Двойственная задача решается на минимум, если целевая функция прямой задачи задается на максимум, и наоборот.

6. Коэффициентами функции цели двойственной задачи служат свободные члены системы ограничений прямой задачи.

7. Если переменная прямой задачи $x_j \geq 0$, то j-е условие системы ограничений двойственной задачи является неравенством, если x_j – любое число, то j-е условие двойственной задачи представляет собой уравнение.

8. Если i-е соотношение прямой задачи является неравенством, то соответствующая оценка i-го ресурса – переменная $y_i \geq 0$, если i-е соотношение представляет собой уравнение, то переменная двойственной задачи y_i – любое число.

Решение прямой задачи дает оптимальные объемы в структуре товарооборота торгового предприятия, а решение двойственной – оптимальную систему оценок ресурсов, используемых для реализации товаров.

2.4.2. Теоремы двойственности

Каждая из пары двойственных задач может быть решена самостоятельно. Однако при определении оптимального плана прямой задачи находится их решение двойственно.

Если $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ – оптимальный план прямой задачи, а $\overline{Y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ – система оптимальных оценок ресурсов, то

$$\max F(\overline{X}) = \min Z(\overline{Y}), \qquad (2.4.7)$$

т.е. максимально возможный доход от продажи товаров (или производства продукции), который может быть получен при имеющихся запасах ресурсов, равен оценке этих ресурсов. Сформулированное утверждение известно под названием **первой теоремы двойственности.**

Оптимальный план можно записать в матричном виде:

$$\overline{X}^* = A^{-1}B, \qquad (2.4.8)$$

где A^{-1} – обратная матрица к матрице, составленной из компонент-векторов, вошедших в оптимальный план.

Подставим выражение оптимального плана в уравнение (2.4.7.):

$$C_\delta A^{-1}B = \overline{Y}^*B,$$

где C_δ – матрица коэффициентов базисных переменных, вошедших в оптимальный план;

тогда оптимальный план двойственной задачи равен:

$$\overline{Y}^* = C_\delta A^{-1}. \tag{2.4.9}$$

Таким образом, если найти оптимальный план прямой задачи, используя выражение (2.4.9), можно получить оптимальный план двойственной задачи. Поскольку в системе уравнений прямой задачи среди векторов $A_j (j = \overline{1, n+m})$ имеются m единичных, то матрица A^{-1} расположена в первых m строках оптимальной симплексной таблицы в столбцах единичных векторов. Тогда нет необходимости определять оптимальный план двойственной задачи умножением C_δ на A^{-1}, поскольку компоненты этого плана совпадают с соответствующими элементами индексной $(m - 1)$-й строки столбцов единичных векторов.

Установим соответствие между переменными прямой и двойственной задач в симплексной таблице.

Переменные прямой задачи (заголовок симплексной таблицы)	$\underbrace{x_1\, x_2 \ldots x_n}_{\text{основные}}$	$\underbrace{x_{n+1}\, x_{n+2} \ldots x_{n+m}}_{\text{дополнительные}}$
Переменные двойственной задачи (их значения расположены в индексной строке оптимальной симплексной таблицы)	$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$ $\underbrace{y_{m+1}\, y_{m+2} \ldots y_{m+n}}_{\text{дополнительные}}$	$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$ $\underbrace{y_1\, y_2 \ldots y_m}_{\text{основные}}$

Согласно сопряженным парам переменных из решения прямой задачи можно получить решение двойственной, не решая ее, и наоборот, из решения двойственной задачи – решение прямой.

Для оптимальных планов $\overline{X}^*$ и $\overline{Y}^*$ пары двойственных задач необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^* - b_i \right) y_i^* = 0, & i = \overline{1, m}; \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i^* - c_j \right) x_j^* = 0, & i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{2.4.10}$$

Вторая теорема двойственности, математически записанная системой уравнений (2.4.10), может быть интерпретирована следующим образом. Если в оптимальном плане некоторый i-й ресурс использован не полностью, т.е. если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^* < b_i$, то соответствующая оценка i-го ресурса $y_i^* = 0$.

Таким образом, положительную двойственную оценку y_i^* имеют лишь те виды ресурсов, которые полностью используются в оптимальном плане, т.е. когда $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^* = b_j$.

Вторая часть уравнений системы (2.4.10) свидетельствует о том, что продаже в оптимальном плане подлежат только те виды товаров $x_j^* > 0$, для которых оценка затраченных на их реализацию ресурсов равна доходу от их продажи, т.е. если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i^* = c_j$. Нецелесообразно продавать те виды товаров, для которых $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i^* > c_j$. В этом случае в оптимальном плане объем реализации данного товара $x_j^* = 0$.

Пример 1. Составим двойственную задачу к прямой задаче планирования товарооборота, которая решена симплексным методом в разделе 2.3.2.

Прямая задача	Двойственная задача
$\bar{X} = (x_1, x_2, x_3)$	$\bar{Y} = (y_1, y_2, y_3)$
$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 \le 1100 \\ 0{,}05x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}02x_3 \le 120 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8000 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0{,}1y_1 + 0{,}05y_2 + 3y_3 \ge 3 \\ 0{,}2y_1 + 0{,}02y_2 + y_3 \ge 5 \\ 0{,}4y_1 + 0{,}02y_2 + 2y_3 \ge 4 \\ y_1 \ge 0; y_2 \ge 0; y_3 \ge 0 \end{cases}$
$F(\bar{X}) = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max$	$Z(\bar{Y}) = 1100y_1 + 120y_2 + 8000y_3 \to \min$

Задачи образуют симметрическую пару двойственных задач. Решение прямой задачи дает оптимальный план товарооборота по реализации трех групп товаров, а решение двойственной – оптимальную систему оценок ресурсов, используемых в процессе реализации.

Решение прямой задачи получено симплексным методом. Оптимальный план товарооборота:

$$\overline{X}^* = (250;\ 5375;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1875);\ F(\overline{X}^*) = 27\ 625 \text{ тыс. руб.}$$

Используя последнюю итерацию прямой задачи (план III симплексной табл. 2.3.2), найдем оптимальный план двойственной задачи.

Из теоремы двойственности следует, что $\overline{Y}^* = C_\delta A^{-1}$.

Составим матрицу A из компонентов векторов, входящих в оптимальный базис.

$$A = (A_2,\ A_1,\ A_6) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}02 & 0{,}05 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определив обратную матрицу A^{-1} каким-либо методом, например через алгебраические дополнения, получим:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6{,}25 & -12{,}5 & 0 \\ -2{,}5 & 25 & 0 \\ 1{,}25 & -62{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как видно из плана III симплексной табл. 2.3.2, обратная матрица A^{-1} расположена в столбцах дополнительных переменных x_4, x_5, x_6.

Тогда $\overline{Y}^* = C_\delta A^{-1} = (5,\ 3,\ 0) \begin{pmatrix} 6{,}25 & -12{,}5 & 0 \\ -2{,}5 & 25 & 0 \\ 1{,}25 & -62{,}5 & 1 \end{pmatrix} = (23{,}75;\ 12{,}5;\ 0).$

Оптимальный план двойственной задачи равен:

$$\overline{Y}^* = (23{,}75;\ 12{,}5;\ 0;\ 0;\ 0;\ 5{,}75);\ Z(\overline{Y}^*) = 27\ 625.$$

Подставим оптимальный план прямой задачи в систему ограниченной математической модели планирования товарооборота:

$$\begin{cases} 0{,}1\cdot 250+0{,}2\cdot 5375\cdot 0{,}4\cdot 0=1100, \\ 0{,}05\cdot 250+0{,}02\cdot 5375+0{,}02\cdot 0=120, \\ 3\cdot 250+1\cdot 5375+2\cdot 0<8000. \end{cases}$$

Первое и второе ограничения прямой задачи выполняются как равенства. Это означает, что ресурсы первого и второго видов полностью используются в оптимальном плане, являются дефицитными и их оценки согласно второй теореме двойственности отличны от нуля ($y_1^* > 0$, $y_2^* > 0$). Третье ограничение выполняется как строгое неравенство, т.е. ресурс третьего вида израсходован не полностью, остаток его в оптимальном плане $x_6^* = 1875$. Значит, ресурс третьего вида не является дефицитным и его оценка в оптимальном плане $y_3^* = 0$.

Таким образом, положительную двойственную оценку имеют лишь те виды ресурсов, которые полностью используются в оптимальном плане. Поэтому двойственные оценки определяют дефицитность ресурсов.

При подстановке оптимальных двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи получим:

$$\begin{cases} 0{,}1\cdot 23{,}75+0{,}05\cdot 12{,}5+3\cdot 0=3, \\ 0{,}2\cdot 23{,}75+0{,}02\cdot 12{,}5+1\cdot 0=5, \\ 0{,}4\cdot 23{,}75+0{,}02\cdot 12{,}5+2\cdot 0>4. \end{cases}$$

Первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как равенства. Это означает, что двойственные оценки ресурсов, используемых для реализации единицы товаров первой и второй групп, равны в точности доходам. Поэтому продавать эти виды товаров экономически целесообразно, а их реализация предусмотрена оптимальным планом прямой задачи ($x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$). Третье ограничение двойственной задачи выполняется как строгое неравенство. Это означает, что двойственная оценка, используемая при реализации единицы товара третьей группы, выше дохода от его продажи. Следовательно, продавать товары третьей группы невыгодно, и действительно в оптимальном плане прямой задачи $x_3^* = 0$.

Величина двойственной оценки показывает, на сколько возрастает значение целевой функции при увеличении дефицитного ресурса на единицу. Например, увеличение рабочего времени на 1 чел.-ч приведет к получению нового оптимального плана, в котором прибыль возрастает на 23,75 и станет равной

$$F(\bar{X}^*) = 27\,625 + y_1^* = 27\,625 + 23{,}75 = 27648{,}75 \text{ тыс. руб.}$$

При этом коэффициенты оптимальной симплексной табл. 2.3.2 столбца x_4, коэффициенты структурных сдвигов k_c показывают, что указанное увеличение прибыли достигается за счет увеличения реализации второй группы товара на величину 6,25 единицы, уменьшения объема продажи первой группы товара на величину 2,5 единицы и уменьшения остатка ресурса третьего вида на 62,5 м^2.

В то же время ввод в продажу невыгодной группы товаров уменьшает размер дохода. Если $x_3^* = 1$, то

$$F(\bar{X}^*) = 27\,625 - 5{,}75 = 27619{,}25 \text{ тыс. руб.}$$

При этом коэффициенты структурных сдвигов оптимальной симплексной табл. 2.3.2 столбца x_3 показывают, что указанное уменьшение дохода происходит за счет уменьшения объема продажи выгодного товара второй группы на величину 2,25 единицы, увеличения продажи первой группы товара на 0,5 единицы и уменьшения остатка ресурсов третьего вида на 1,25 м^2.

Таким образом, двойственные оценки связаны с оптимальным планом прямой задачи. Всякое изменение исходных данных прямой задачи оказывает влияние на ее оптимальный план и систему двойственных оценок. В свою очередь двойственные оценки служат инструментом анализа и принятия правильных решений в условиях меняющихся коммерческих ситуаций.

2.4.3. Анализ устойчивости двойственных оценок

В оптимальном решении двойственной задачи значения переменной y_i^* равны частным производным линейной функции $F_{\max}(b_1, b_2, ..., b_m)$ по соответствующим аргументам, т.е.

$$\frac{\partial F_{\max}}{\partial b_i} = y_i^*, \quad (i = \overline{1, m}). \qquad (2.4.11)$$

Теорема о двойственных оценках позволяет определить приращение целевой функции при малых изменениях свободных членов Δb_i системы ограничений:

$$\Delta F_i^* \approx \overline{Y}^* \cdot \Delta b_i = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \cdot \Delta b_i, \qquad (2.4.12)$$

где $\overline{Y}^*$ – оптимальное решение двойственной задачи;
$\overline{Y}^* = (y_1^*, ..., y_m^*)$.

Из соотношения (2.4.12) следует, что двойственные оценки ресурсов показывают, на сколько денежных единиц изменяется доход от реализации продукции при изменении запаса соответствующего ресурса на одну единицу. Таким образом, теория двойственности позволяет провести экономический анализ пары двойственных задач, в частности определить дефицитность ресурсов, сырья, продукции. Большей условной оценке соответствует наиболее дефицитный ресурс. Для i-го недефицитного ресурса двойственная оценка $y_1^* = 0$.

С помощью двойственной оценки можно определить степень влияния изменения ограничений на значение целевой функции.

Таким образом, если получено оптимальное решение задачи линейного программирования, то можно провести анализ устойчивости двойственных оценок относительно изменений b_i, т.е. проанализировать устойчивость оптимального плана относительно изменений свободных членов системы линейных уравнений, оценить степень влияния изменения b_i на значение целевой функции и определить наиболее целесообразный вариант изменений b_i.

Следовательно, интерес представляет определение интервалов устойчивости (неизменности) двойственных оценок по отношению к возможным изменениям запасов ресурсов каждого вида ($b_i + \Delta b_i$). При этом условие устойчивости двойственных оценок задачи исходит из выражения

$$X' = X^* + \Delta X = A^{-1}(B + \Delta B) = A^{-1} \cdot B + A^{-1} \cdot \Delta B,$$

в котором компоненты вектора X' должны быть неотрицательны $x_i \geq 0$. На этом основании для задачи, решение которой приведено в табл. 2.3.3, можно записать такое выражение:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3+\Delta b_1 \\ 4+\Delta b_2 \\ 1{,}5+\Delta b_3 \\ 2+\Delta b_4 \end{bmatrix}.$$

Откуда получаем условие устойчивости:

$$\begin{cases} 3{,}5 - 2\Delta b_1 + 2\Delta b_2 + \Delta b_3 \geq 0, \\ \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\Delta b_1 + \frac{2}{3}\Delta b_2 + \Delta b_4 \geq 0, \\ \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\Delta b_1 - \frac{2}{3}\Delta b_2 \geq 0, \\ \frac{10}{3} - \frac{2}{3}\Delta b_1 + \frac{4}{3}\Delta b_2 \geq 0. \end{cases}$$

Затем последовательно находим интервалы устойчивости:

$$\begin{array}{lll} \Delta b_1 \neq 0,\ \Delta b_2 = \Delta b_3 = \Delta b_4 = 0, & -1 \leq \Delta b_1 \leq 0{,}5, & 2 \leq b_1 + \Delta b_1 \leq 3{,}5, \\ \Delta b_2 \neq 0,\ \Delta b_1 = \Delta b_3 = \Delta b_4 = 0, & -1 \leq \Delta b_2 \leq 2, & 3 \leq b_2 + \Delta b_2 \leq 6, \\ \Delta b_3 \neq 0,\ \Delta b_1 = \Delta b_2 = \Delta b_4 = 0, & \Delta b_3 \geq -3{,}5, & b_3 + \Delta b_3 \geq -2, \\ \Delta b_4 \neq 0,\ \Delta b_1 = \Delta b_2 = \Delta b_3 = 0, & \Delta b_4 \geq -{}^2/_3, & b_4 + \Delta b_4 \geq 1^1/_3. \end{array}$$

Для корректного решения задачи необходимо ввести еще дополнительные ограничения, вытекающие из экономического содержания решаемой задачи.

Предельные значения (нижняя и верхняя границы) изменения каждого из ресурсов, для которых двойственные оценки остаются неизменными, определяются еще и таким образом:

$$\Delta b_i^- = \max_{d_{ij}>0}\left\{-\frac{x_j^*}{d_{ij}}\right\} \le \Delta b_i \le \min_{d_{ij}<0}\left\{-\frac{x_j^*}{d_{ij}}\right\} = \Delta b_i^+,$$

где Δb_i – величина изменения i-го ресурса;

Δb_i^+ – величина увеличения i-го ресурса;

Δb_i^- – величина уменьшения i-го ресурса;

x_j^* – компоненты оптимального плана;

d_{ij} – коэффициенты столбцов свободных переменных в оптимальном плане (коэффициенты структурных сдвигов, элементы обратной матрицы к базису оптимального плана).

Если в план включается реализация невыгодного с точки зрения дохода товара, то объем возможной продажи в рамках устойчивости оптимального плана определяется следующим интервалом:

$$\max_{d_{jk}<0}\left\{-\frac{x_j^*}{d_{jk}}\right\} \le x_k \le \min_{d_{jk}>0}\left\{\frac{x_j^*}{d_{jk}}\right\}.$$

Проведем анализ устойчивости двойственных оценок задачи планирования товарооборота (пример 1, табл. 2.3.2).

Первый вид ресурса – время работы продавцов – может изменяться в пределах:

$$\max_{d_{4k}>0}\left\{-\frac{5375}{6{,}25};\ -\frac{1875}{1{,}25}\right\} \le \Delta b_1 \le \min_{d_{4k}<0}\left\{-\frac{250}{-2{,}5}\right\},$$

$$-860 \le \Delta b_1 \le 100.$$

Таким образом, первый вид ресурса может быть уменьшен на 860 чел.-ч или увеличен на 100 чел.-ч. Интервал изменения равен: $[b_1 + \Delta b_1^-;\ b_1 + \Delta b_1^+] = [1100 - 860;\ 1100 + 100] = [240;\ 1200]$.

Второй ресурс (площадь торговых залов) может меняться в пределах:

$$\max_{d_{5k}>0}\left\{-\frac{250}{25}\right\} \le \Delta b_2 \le \min_{d_{5k}<0}\left\{-\frac{5375}{-12{,}5};\ -\frac{1875}{-62{,}5}\right\},$$

$$-10 \le \Delta b_2 \le 30.$$

Интервал изменения второго ресурса равен:

$$[120 - 10;\ 120 + 30] = [110;150].$$

Третий вид ресурса – площади складских помещений – в оптимальном плане недоиспользован, является недефицитным. Увеличение данного ресурса приведет лишь к росту его остатка. При этом структурных изменений в оптимальном плане не будет, так как двойственная оценка $y_3^* = 0$.

В оптимальный план не вошла основная переменная x_3, т.е. третья группа товара не выгодна к продаже. Определим максимально возможный объем продажи третьей группы товара в рамках устойчивости полученных двойственных оценок:

$$\max_{d_{3k}<0}\left\{\frac{250}{-0{,}5}\right\} \le x_3 \le \min_{d_{3k}>0}\left\{\frac{5375}{2{,}25};\ \frac{1875}{12{,}5}\right\},$$

$$-500 \le x_3 \le 1500.$$

Таким образом, в продажу можно вводить третью группу товара в количестве до полутора тысяч единиц. Составим субоптимальные варианты плана с учетом изменений исходных данных модели табл. 2.3.2.

1. Пусть торговое предприятие наняло дополнительных продавцов и рабочее время увеличилось на 50 чел.-ч.

В результате объем продаж второй группы товаров увеличился, а первой группы – уменьшился, недоиспользование складских помещений возросло, доход увеличился.

Базисные переменные	Значения базисных переменных	Коэффициент структурных сдвигов (k_c) по $b_1(x_4)$	Произведение k_c на $\Delta b_1 = 50$	Расчет варианта плана
x_2	5375	6,25	312,5	5687,5
x_1	250	–2,5	–125	125
x_6	1875	1,25	62,5	1937,5
$F(\overline{X}_3)$	27 625	23,75	1187,5	28812,5

2. Пусть второй вид ресурса (площадь торговых залов) уменьшился на 5 м^2.

Базисные переменные	Значения базисных переменных	Коэффициент структурных сдвигов (k_c) по $b_2(x_5)$	Произведение k_c на $\Delta b_2 = -5$	Расчет варианта плана
x_2	5375	–12,5	62,5	5437,5
x_1	250	25	–125	125
x_6	1875	–62,5	312,5	2187,5
$F(\overline{X}_3)$	27 625	12,5	–62,5	27562,5

В результате уменьшения дефицитного ресурса сократился объем продажи первой группы товара, увеличился объем продажи второй группы товара, остаток третьего ресурса увеличился, доход от реализации товара сократился.

3. В продажу необходимо включить третью группу товара в количестве $x_3 = 100$.

Базисные переменные	Значения базисных переменных	Коэффициент структурных сдвигов (k_c) по переменной x_3	Произведение k_c на $x_3 = 100$	Расчет варианта плана
x_2	5375	2,25	225	5150
x_1	250	–0,5	–50	300
x_6	1875	1,25	125	1750
$F(\overline{X}_3)$	27 625	5,75	575	27 050

Следовательно, включение в реализацию товара третьей группы $x_3 = 100$ приведет к уменьшению продажи второй группы товара, увеличению первой группы, сокращению остатка третьего вида ресурса. Доход от реализации товаров уменьшился, так как продажа данной группы не выгодна предприятию. Таким образом, анализ устойчивости двойственных оценок позволяет построить множество вариантов оптимальных решений с учетом изменений исходных условий модели. Если эти изменения выходят за рамки предельных значений, то нарушается полученная система двойственных оценок и возникает необходимость повторного решения задачи в новых условиях. В этом случае представляет интерес использование методов параметрического программирования.

Контрольные вопросы

1. Как составить двойственную задачу?
2. Каковы теоремы двойственности?
3. Как интерпретировать экономический смысл двойственной задачи?
4. Как определить решение двойственной задачи из решения прямой?
5. Какова экономическая интерпретация двойственных оценок?
6. Как определяются интервалы устойчивости двойственных оценок?

Задачи

1. Используя задачи предыдущего раздела 2.3 (№ 1–7), необходимо:

к прямой задаче планирования товарооборота, решаемой симплексным методом, составить двойственную задачу линейного программирования;

установить сопряженные пары прямой и двойственной задач;

согласно сопряженным парам переменных из решения прямой задачи получить решение двойственной задачи;

рассчитать интервалы устойчивости двойственных оценок и, используя коэффициенты структурных сдвигов в оптимальной симплексной таблице, выполнить расчеты вариантов для изменившейся хозяйственной ситуации в соответствии с таблицей.

Номер задачи	Коммерческая ситуация		
	ввести в продажу k-ю товарную группу	увеличить объем i-го ресурса	сократить объем i-го ресурса
1	$x_2 = 5$	$\Delta b_2 = 20$	$\Delta b_3 = 10$
2	$x_1 = 90$	$\Delta b_1 = 200$	$\Delta b_2 = 300$
3	$x_2 = 50$	$\Delta b_1 = 100$	$\Delta b_2 = 10$
4	$x_1 = 20$	$\Delta b_1 = 2$	$\Delta b_1 = 50$
5	$x_1 = 60$	$\Delta b_1 = 300$	$\Delta b_2 = 100$
6	$x_1 = 30$	$\Delta b_1 = 6$	$\Delta b_3 = 1$
7	$x_3 = 20$	$\Delta b_1 = 40$	$\Delta b_2 = 100$

2.5. Двойственный симплексный метод

Двойственный симплексный метод основан на теории двойственности и используется для решения задач линейного программирования, свободные члены которых $b_i (i = \overline{1, m})$ могут принимать любые значения, а система ограничений задана неравенствами смысла «≤», «≥» или равенством «=».

В двойственном симплексном методе оптимальный план получается в результате движения по псевдопланам.

Псевдопланом называется план, в котором условия оптимальности удовлетворяются, а среди значений базисных переменных x_i имеются отрицательные числа.

Алгоритм двойственного симплексного метода включает следующие этапы.

1. Составление псевдоплана. Систему ограничений исходной задачи требуется привести к системе неравенств смысла «≤». Для этого обе части неравенств смысла «≥» необходимо умножить на (−1). Затем от системы неравенств смысла «≤» переходят к системе уравнений, вводя неотрицательные дополнительные переменные, которые являются базисными переменными. Первый опорный план заносят в симплексную таблицу.

2. Проверка плана на оптимальность. Если в полученном опорном плане не выполняется условие оптимальности, то решаем задачу симплексным методом. При этом столбец θ_i имеет значения по тем строкам, в которых значения в базисных переменных и коэффициенты ведущего столбца содержат одинаковые знаки (положительные или отрицательные). В случае разноименных знаков b_i и a_{ik} значения θ_i не определяют.

Если в опорном плане условия оптимальности удовлетворяются и все значения базисных переменных – положительные числа, то получен оптимальный план. Наличие отрицательных значений в столбце «Значения базисных переменных» свидетельствует о получении псевдоплана.

3. Выбор ведущих строки и столбца. Среди отрицательных значений базисных переменных выбираются наибольшие по абсолютной величине. Строка, соответствующая этому значению, является ведущей.

Симплексную таблицу дополняют строкой θ, в которую заносят взятые по абсолютной величине результаты деления коэффициентов индексной строки на отрицательные коэффициенты ведущей строки. Минимальные значения θ определяют ведущий столбец и переменную, вводимую в базис. На пересечении ведущих строки и столбца находится разрешающий элемент.

4. Расчет нового опорного плана. Новый план получаем в результате пересчета симплексной таблицы методом Жордана – Гаусса. Далее переходим к этапу 2.

Пример 1. Известно, что содержание трех питательных веществ А, В и С в рационе должно быть не менее 60, 50 и 12 единиц соответственно. Указанные питательные вещества содержат три вида продуктов. Содержание единиц питательных веществ в одном килограмме каждого из видов продукта приведено в табл. 2.5.1.

Определите дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ при минимальных денежных затратах.

Таблица 2.5.1

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг продукта вида		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3
Цена 1 кг продукта	9	12	10

Составим экономико-математическую модель задачи

Обозначим x_1, x_2, x_3 – объемы продуктов (кг) в рационе. Тогда необходимо определить вектор

$$\overline{X} = (x_1, x_2, x_3),$$

удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 60, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 50, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 3} \end{cases} \tag{2.5.1}$$

и обеспечивающий минимум целевой функции:

$$F(\overline{X}) = 9x_1 + 12x_2 + 10x_3 \to \min. \tag{2.5.2}$$

Решение. Приведем систему ограничений (5.1) к системе неравенств смысла «≤», умножив обе части неравенств на (–1).

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 4x_3 \leq -60, \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 \leq -50, \\ -x_1 - 4x_2 - 3x_3 \leq -12. \end{cases}$$

Переходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -60, \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_5 = -50, \\ -x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_6 = -12. \end{cases}$$

За базис выбираем систему векторов A_4, A_5, A_6, так как эти векторы единичные и линейно независимые. Соответствующие единичным векторам переменные x_4, x_5, x_6 являются базисными. Полагая, что свободные переменные $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, получим первый опорный план, который заносим в симплексную табл. 2.5.2.

$$\overline{X}_1 = (0, 0, 0, -60, -50, -12), F(\overline{X}_1) = 0.$$

План I в симплексной таблице является псевдопланом, поэтому определяем ведущие строку и столбец. Среди отрицательных значений базисных переменных выбираем наибольшее по абсолютной величине значение: $|-60| > |-50|, |-12|$. Следовательно, строка 1 симплексной таблицы является ведущей, а переменную x_4 следует вывести из базиса. В строку q_j заносим следующие величины:

$$\frac{-9}{-1} = 9; \quad \frac{-12}{-3} = 4; \quad \frac{-10}{-4} = 2{,}5.$$

Минимальное значение θ соответствует 3-му столбцу, т.е. переменную x_3 необходимо ввести в базис. На пересечении ведущих строки и столбца находится разрешающий элемент (РЭ), равный –4.

Далее выполняем преобразование симплексной таблицы методом Жордана – Гаусса и заполняем план II.

Третий опорный план является оптимальным, так как в индексной строке все коэффициенты ≤ 0, то условие оптимальности выполняется, а все значения базисных переменных – положительные числа:

$$\overline{X}^* = (0; 8; 9; 0; 0; 47), F(\overline{X}^*) = 186.$$

Таблица 2.5.2

План	Базисная переменная	Значения базисной переменной	x_1	x_2	$\uparrow$ x_3	x_4	x_5	x_6
I	$\leftarrow x_4$ x_5 x_6	−60 −50 −12	−1 −2 −1	−3 −4 −4	−4 −2 −3	1 0 0	0 1 0	0 0 1
	$F(\overline{X}_1)$	0	−9	−12	−10	0	0	0
	θ	–	9	4	2,5	–	–	–
II	x_3 $\leftarrow x_5$ x_6	15 −20 33	0,25 −1,5 −0,25	0,75 **−2,5** −1,75	1 0 0	−0,25 −0,5 −0,75	0 1 0	0 0 1
	$F(\overline{X}_2)$	150	−6,5	−4,5↑	0	−2,5	0	0
	θ_j	–	13/3	1,8	–	5	–	–
III	x_3 x_2 x_6	9 8 47	−0,7 0,6 0,8	0 1 0	1 0 0	−0,4 0,2 −0,4	0,3 −0,4 −0,7	0 0 1
	$F(\overline{X}_3)$	186	−3,8	0	0	−1,6	−1,8	0

Пример 2. Содержание и постановка задачи анализа коммерческой деятельности предприятия изложены в п. 2.2.1, затем в разделе п. 2.3.1 (пример 2) проведено решение геометрическим методом, а теперь решим ее двойственным симплексным методом, поскольку ограничения в модели задачи представлены в двух вариантах: ≤ и ≥.

Решение. Приведем систему ограничений задачи к системе неравенств вида ≤:

$$\begin{cases} 0{,}5x_{н} + x_{в} \le 3 \\ x_{н} + 0{,}5x_{в} \le 4 \\ -x_{н} + x_{в} \le 1{,}5 \\ x_{в} \le 2 \\ x_{в} \ge 0{,}25 \\ x_{н} \ge 0{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}5x_{н} + x_{в} \le 3 \\ -x_{н} + 0{,}5x_{в} \le 4 \\ -x_{н} + x_{в} \le 1{,}5 \\ x_{в} \le 2 \\ -x_{в} \le -0{,}25 \\ -x_{н} \le -0{,}5 \end{cases}$$

$$F(\overline{X}) = 2x_{н} + 3x_{в} \to \min \qquad F(\overline{X}) = 2x_{н} + 3x_{в} \to \min.$$

Затем переходим к системе уравнений введением дополнительных переменных:

$$\begin{cases} 0{,}5x_н + x_в + x_1 = 3 \\ x_н + 0{,}5x_в + x_2 = 4 \\ -x_н + x_в + x_3 = 1{,}5 \\ x_в + x_4 = 2 \\ -x_в + x_5 = -0{,}25 \\ -x_н + x_6 = -0{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - (0{,}5x_н + x_в) \\ x_2 = 4 - (x_н + 0{,}5x_в) \\ x_3 = 1{,}5 - (x_в - x_н) \\ x_4 = 2 - (x_в) \\ x_5 = -0{,}25 - (-x_в) \\ x_6 = -0{,}5 - (-x_н) \end{cases}$$

$$F(\overline{X}) = 0 - (-2x_н - 3x_в) \qquad F(\overline{X}) = 0 - (-2x_н - 3x_в).$$

Полагая, что свободные переменные $x_н = x_в = 0$, получим первый опорный план, который запишем в симплексную табл. 2.5.3, причем $F(\overline{X}_1) = 0$ $\overline{X}_1 = (0; 0; 3; 4; 1{,}5; 2; -0{,}25; -0{,}5)$.

Поскольку в индексной строке коэффициенты $c_j < 0$, а среди значений столбца свободных членов имеются отрицательные числа, то план является не оптимальным, или псевдопланом.

Затем определяем ведущую строку по максимальной абсолютной величине отрицательных чисел столбца свободных членов: $|-0{,}5| > |-0{,}25|$, следовательно, x_6 выводим из базиса.

Для определения ведущего столбца коэффициенты индексной строки делим на соответствующие только отрицательные коэффициенты ведущей строки, результаты деления заносим в строку θ, из которой выбираем минимальный 2, что соответствует переменной $x_н$, которую следует ввести в базис вместо x_6. На пересечении ведущих строки и столбца находится разрешающий элемент (-1). Далее выполняем преобразование симплексной таблицы методом Жордана – Гаусса и заполним план II табл. 2.5.3.

Третий план является оптимальным, поскольку все значения базисных переменных есть положительные числа, и в индексной строке условие оптимальности выполняется:

$$\overline{X}_3^* = (0{,}5; 0{,}25; 2{,}375; 3{,}125; 2; 1{,}75; 0; 0) \; F_{\min}(\overline{X}_3^*) = 1{,}75.$$

Такой же ответ получен в решении этой задачи в примере 2 раздела 2.3.1 геометрическим методом.

Таблица 2.5.3

План	Базисные перемен-ные	Значения базисных перемен-ных	$x_н$	$x_в$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	δ_i
I	x_1	3	0,5	1	+1	0	0	0	0	0	3
	x_2	4	1	0,5	0	+1	0	0	0	0	8
	x_3	1,5	–1	1	0	0	+1	0	0	0	1,5
	x_4	2	0	1	0	0	0	+1	0	0	2
	x_5	–0,25	0	–1	0	0	0	0	+1	0	0,25
	x_6	–0,5	–1	0	0	0	0	0	0	+1	–
	$F(\overline{X}_1)$	0	–2	–3	0	0	0	0	0	0	
	θ_j		2	–	–	–	–	–	–	–	
II	x_1	2,75	0	1,5	+1	0	0	0	0	0	
	x_2	3,5	0	1,5	0	+1	0	0	0	1	
	x_3	2	0	0	0	0	+1	0	0	–1	
	x_4	2	0	1	0	0	0	+1	0	0	
	x_5	–0,25	0	–1	0	0	0	0	1	0	
	$x_н$	0,5	1	0	0	0	0	0	0	–1	
	$F(\overline{X}_2)$	1	0	–3	0	0	0	0	0	–2	
	θ_j		–	+3	–	–	–	–	–	2	
III	x_1	2,375	0	0	+1	0	0	0	1,5	0	
	x_2	3,125	0	0	0	+1	0	0	1,5	1	
	x_3	2	0	0	0	0	+1	0	0	–1	
	x_4	1,75	0	0	0	0	0	+1	1	0	
	$x_в$	0,25	0	1	0	0	0	0	–1	0	
	$x_н$	0,5	1	0	0	0	0	0	0	–1	
	$F(\overline{X}_3)$	1,75	0	0	0	0	0	0	–3	–2	

Контрольные вопросы

1. Какие задачи линейного программирования решаются двойственным симплексным методом?

2. В чем отличие симплексного метода и двойственного симплексного метода?

3. Как осуществляется переход от одного псевдоплана к другому?

4. В чем состоит критерий оптимальности двойственного симплексного метода?

Задачи

Решить задачи **1–10** двойственным симплексным методом.

1. $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 28, \\ 2x_1 + 7x_2 - 6x_3 \leq 42, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 \geq 34, \\ x_k \geq 0, \quad k = \overline{1,\ 3}. \end{cases}$

$F(\overline{X}) = 9x_1 + 10x_2 + 6x_3 \to \min.$

2. $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \geq 21, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 15, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 6, \\ x_k \geq 0, \quad k = \overline{1,\ 3}. \end{cases}$

$F(\overline{X}) = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \min.$

3. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq 20, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 14, \\ x_k \geq 0, \quad k = \overline{1,\ 3}. \end{cases}$

$F(\overline{X}) = 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 \to \min.$

4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 18, \\ 6x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq 12, \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq 14, \\ x_k \geq 0, \quad k = \overline{1,\ 3}. \end{cases}$

$F(\overline{X}) = 100 - 6x_1 - 8x_2 - 3x_3 \to \max.$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 9, \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 \geq 8, \\ x_k \geq 0, \quad k = \overline{1,\ 4}. \end{cases}$

$F(\overline{X}) = 50 - 6x_1 - 5x_2 -$
$- 4x_3 - x_3 \to \max.$

6. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 3x_3 \leq 12, \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 14, \\ 7x_1 + 3x_2 + 7x_3 \geq 21, \\ x_k \geq 0, \quad k = \overline{1,\ 3}. \end{cases}$

$F(\overline{X}) = 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 \to \min.$

7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \ge 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 4, \\ x_k \ge 0, \quad k = \overline{1,\ 4}. \end{cases}$

$F(\overline{X}) = 70 - 6x_1 - 5x_2 - 4x_3 - x_4 \to \max.$

8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 4, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 5, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 \ge 3, \\ x_k \ge 0, \quad k = \overline{1,\ 3}. \end{cases}$

$F(\overline{X}) = 15x_1 + 16x_2 + x_3 \to \min.$

9. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 \ge 6, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 9, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \ge 12, \\ x_k \ge 0, \quad k = \overline{1,\ 4}. \end{cases}$

$F(\overline{X}) = 100 - 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 \to \max.$

10. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 \ge 12, \\ 4x_1 + 8x_2 - 3x_4 \ge 24, \\ 8x_2 - 4x_3 - 2x_4 \ge 12, \\ x_k \ge 0, \quad k = \overline{1,\ 4}. \end{cases}$

$F(\overline{X}) = 40 - x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 \to \max.$

2.6. Метод потенциалов

В п. 2.2.5 сформулирована задача по перевозке грузов, которая называется транспортной задачей и заключается в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$ в n пунктов потребления $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Рассмотрим транспортную задачу, где критерием оптимальности является стоимость перевозок всех грузов, которая должна быть минимальной.

Экономико-математическая модель транспортной задачи (п. 2.2.5) содержит системы линейных уравнений (2.2.1) и (2.2.2), условие неотрицательности переменных x_{ij} (2.2.3) и целевую функцию (2.2.4).

Следует иметь в виду, что:

1. Всякое неотрицательное решение системы линейных уравнений, определяемое матрицей $X = (x_{ij})$, $i = \overline{1,\ m}$; $j = \overline{1,\ n}$; называется **допустимым планом** транспортной задачи.

2. Ранг матрицы, составленный из коэффициентов при неизвестных системы линейных уравнений транспортной задачи, на единицу меньше числа уравнений, т.е. равен $(m + n - 1)$. Следовательно, число линейно независимых уравнений равно $(m + n - 1)$, они образуют базис, а соответствующие им $(m + n - 1)$ переменные будут являться базисными.

3. Допустимый план транспортной задачи, имеющий не более $(m + n - 1)$ отличных от нуля величин x_{ij}, называется **опорным**.

4. Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно в точности $(m + n - 1)$, то план является **невырожденным,** если меньше, то план называется **вырожденным.**

5. План $X = (x_{ij})$ $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1,\ n})$, при котором функция (2.2.4) принимает свое минимальное значение, называется **оптимальным планом** транспортной задачи.

6. Для решения транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы груза в пунктах отправления были равны сумме заявок пунктов назначения:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{2.6.1}$$

7. Модель транспортной задачи, удовлетворяющая условию (7.1), называется **закрытой**. Если же указанное условие не выполняется, то модель называется **открытой**.

В случае превышения запаса над заявками

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

вводится фиктивный $(n + 1)$ пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{i,\,n+1} = 0,\ i = \overline{1,\ m}$.

При $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится фиктивный $(m + 1)$ пункт отправления с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} b_j - \sum_{j=1}^{n} a_i$ и соответствующие тарифы принимаются равными нулю: $c_{m+1,j} = 0, j = \overline{1,\ n}$.

8. Наилучшим элементом матрицы тарифов С называется наименьший тариф, если задача поставлена на минимум, наибольший тариф – если задача поставлена на максимум целевой функции.

Рассмотрим один из методов построения первого опорного плана – **метод наименьших тарифов** (стоимости).

Алгоритм построения первого опорного плана методом наименьшей стоимости включает следующие этапы:

а) среди тарифов находится наименьший;

б) клетка с выбранным тарифом заполняется величиной, равной максимально возможному объему груза с учетом ограничений по строке и столбцу. При этом либо весь груз вывозится от соответствующего поставщика, либо полностью удовлетворяется заявка потребителя. Строка или столбец таблицы вычеркиваются и в дальнейшем распределении не участвуют;

в) из оставшихся тарифов вновь находится наилучший (наименьший), и процесс продолжается до тех пор, пока не будет распределен весь груз.

Если модель транспортной задачи открытая и введены фиктивный поставщик или потребитель, то распределение осуществляется сначала для действительных поставщиков и потребителей и в последнюю очередь нераспределенный груз направляется от фиктивного поставщика или к фиктивному потребителю.

9. Дальнейшее улучшение первого опорного плана и получение оптимального плана производим **методом потенциалов,** который основан на теории двойственности.

План $X = (x_{ij})$ транспортной задачи будет являться оптимальным, если существует система $m + n$ чисел α_i, β_j, называемых потенциалами, удовлетворяющая условиям:

I. $F(\overline{X}) \to \min$

$$\begin{cases} \alpha_i + \beta_j = c_{ij} \text{ для занятых клеток, где } x_{ij} > 0, \\ \alpha_i + \beta_j \le c_{ij} \text{ для незанятых клеток, где } x_{ij} = 0. \end{cases} \qquad (2.6.2)$$

II. $F(\overline{X}) \to \max$

$$\begin{cases} \alpha_i + \beta_j = c_{ij} \text{ для занятых клеток, где } x_{ij} > 0, \\ \alpha_i + \beta_j \geq c_{ij} \text{ для незанятых клеток, где } x_{ij} = 0. \end{cases} \qquad (2.6.3)$$

Потенциалы α_i и β_j являются переменными двойственной транспортной задачи и обозначают оплату за перевозку единицы груза в пунктах отправления (поставщиками) и назначения (потребителями) соответственно, поэтому их сумма равна транспортному тарифу $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$, а условия (2.6.2), (2.6.3) получены на основании второй теоремы двойственности.

Введем обозначение оценки свободной клетки таблицы

$$\Delta_{ij} = \alpha_i + \beta_j - c_{ij}.$$

Если среди оценок Δ_{ij} нет положительных (задача поставлена на минимум), то опорный план является оптимальным.

Алгоритм оценки оптимальности плана методом потенциалов включает следующие этапы.

а. Построение первого опорного плана.

б. Проверка вырожденности плана. Потенциалы α_i и β_j могут быть рассчитаны только для невырожденного плана. Если число занятых клеток в опорном плане меньше, чем $(m + n - 1)$, то не хватит количества уравнений для определения потенциалов, поэтому вносим нуль в одну из свободных клеток таблицы так, чтобы общее число занятых клеток стало равным $(m + n - 1)$. Нуль вводят в клетку с наименьшим тарифом, например в клетку одновременно вычеркиваемых строки и столбца таблицы при составлении нового плана. При этом фиктивно занятая нулем клетка не должна образовывать замкнутого прямоугольного контура с другими клетками таблицы.

в. Определение значения функции цели путем суммирования произведений тарифов (удельных затрат) на объем перевозимого груза по всем занятым клеткам таблицы.

г. Проверка условия оптимальности. Определяем потенциалы α_i и β_j. Для каждой занятой клетки таблицы записываем уравнение $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$. Получим систему $(m + n - 1)$ уравнений с $(m + n)$ переменными.

Так как число переменных больше числа уравнений ($m + n >$ $> m + n - 1$), то система является неопределенной и имеет бесконечное множество решений. Поэтому одному из неизвестных потенциалов α_i, β_j задают произвольное значение, например для простоты вычислений полагаем $\alpha_1 = 0$. Тогда остальные потенциалы определяются из приведенных соотношений. В транспортную таблицу добавляются дополнительная строка и столбец, куда заносятся потенциалы.

Определяем оценки свободных клеток Δ_{ij}.

Если все $\Delta_{ij} \leq 0$ (задача решается на минимум целевой функции) либо все $\Delta_{ij} \geq 0$ (задача решается на максимум целевой функции), то оптимальный план найден. Если хотя бы одна оценка свободной клетки $\Delta_{ij} > 0$ (задача поставлена на минимум) или $\Delta_{ij} < 0$ (задача поставлена на максимум), план не является оптимальным, его можно улучшить, осуществив перераспределение груза.

д. Построение нового опорного плана. Из всех положительных оценок свободных клеток выбираем наибольшую (если задача поставлена на минимум), из отрицательных – наибольшую по абсолютной величине (если задача поставлена на максимум). Клетку, которой соответствует наибольшая оценка, следует заполнить, т.е. направить груз. Заполняя выбранную клетку, необходимо изменить объемы поставок, записанных в ряде других занятых и связанных с заполняемой так называемым циклом.

Циклом, или прямоугольным контуром, в таблице условий транспортной задачи называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья – вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречаются ровно два звена, одно из которых находится в строке, другое – в столбце. Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки пересечения не являются вершинами. Для каждой свободной клетки таблицы можно построить единственный цикл.

Вершинам цикла, начиная от вершины, находящейся в свободной клетке, присваиваем поочередно знаки «+» и «–».

Из объемов груза, стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее и обозначим его γ. Перераспределяем величину j по циклу, прибавляя γ к соответствующим объемам груза, стоящим в плюсовых клетках, и вычитая γ из объемов груза, находящихся в минусовых клетках таблицы. В результате клетка, которая ранее была свободной, становится занятой, а одна из занятых клеток цикла становится свободной.

Полученный новый опорный план проверяется на оптимальность, т.е. возвращаемся к четвертому этапу алгоритма.

Примечания.

1. Если в минусовых клетках построенного цикла находятся два (или несколько) одинаковых минимальных значения x_{ij}, то при перераспределении объемов груза освобождаются две (или несколько) клеток и план становится вырожденным. Для продолжения решения необходимо одну или несколько освобождающихся клеток таблицы занять нулем, причем предпочтение отдается клетке с наименьшим тарифом. Нулей вводится столько, чтобы во вновь полученном опорном плане число занятых клеток было равно $(m + n - 1)$.

2. Если в оптимальном плане транспортной задачи оценка свободной клетки равна нулю ($\Delta_{ij} = 0$), то задача имеет множество оптимальных планов. Для клетки с нулевой оценкой можно построить цикл и перераспределить груз. В результате полученный оптимальный план будет иметь такое же значение целевой функции.

3. Значение целевой функции на каждой итерации можно рассчитать следующим образом:

$$F(\overline{X}_k) = F(\overline{X}_{k-1}) - \gamma\Delta_{ij} \text{ (задача поставлена на минимум);}$$

$$F(\overline{X}_k) = F(\overline{X}_{k-1}) + \gamma\Delta_{ij} \text{ (задача поставлена на максимум),}$$

где γ – величина перемещаемого по циклу объема груза;

Δ_{ij} – оценка свободной клетки, в которую направляется груз при переходе к новому плану;

$F(\overline{X}_k)$ – значение целевой функции на k-й итерации;

$F(\overline{X}_{k-1})$ – значение целевой функции на предыдущей итерации.

Пример 1. На три базы A_1, A_2, A_3 поступил однородный груз в количествах, соответственно равных 6, 8, 10 ед. Этот груз требуется перевезти в четыре магазина B_1, B_2, B_3, B_4 соответственно в количествах 4, 6, 8, 8 ед. Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов (тыс. руб. за ед. груза):

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad i=1,\ 2,\ 3; \quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Надо составить план перевозок однородного груза с минимальными транспортными издержками.

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 6+8+10=24,$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_i = 4+6+8+8=26.$$

Как видно, суммарная потребность груза в пунктах назначения превышает запасы груза на трех базах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой.

Чтобы получить **закрытую** модель, введем дополнительную (фиктивную) базу A_4 с запасом груза, равным 2 ед. (26–24). Тарифы перевозки единицы груза из базы A_4 во все магазины полагаем равны нулю.

Занесем исходные данные в распределительную табл. 2.6.1.

1. Используя метод наименьшей стоимости, построим первый опорный план транспортной задачи.

Среди тарифов из всей таблицы наименьшим является $c_{11} = 1$, поэтому в клетку A_1B_1 направляем максимально возможный груз. Он равен min $\{6, 4\} = 4$. Тогда $x_{11} = 4$ и из базы A_1 не вывезен груз в размере 2 ед., а потребность магазина B_1 удовлетворена полностью. Столбец таблицы B_1 выходит из рассмотрения. Из оставшихся тарифов строки наименьший – $c_{12} = 2$. В клетку A_1B_2 направляем максимально возможный груз, равный min $\{2, 6\} = 2$. Тогда строка A_1 выходит из рассмотрения, поскольку из базы A_1 вывезен весь груз, а потребность второго магазина не удовлетво-

Таблица 2.6.1

A_i \ B_j	α_i \ β_j	B_1 $\beta_1 = 1$	B_2 $\beta_2 = 2$	B_3 $\beta_3 = 7$	B_4 $\beta_4 = 4$	Запасы α_i
A_1	$\alpha_1 = 0$	1 4	2 2 −	4 +	3	6
A_2	$\alpha_2 = 1$	4	3 4 +	8 4 −	5	8
A_3	$\alpha_3 = -1$	2	7	6 2	3 8	10
A_4	$\alpha_4 = -7$	0	0	0 2	0	2
Потребности b_j		4	6	8	8	$\Sigma = 26$ \ $\Sigma = 26$

рена на 4 ед. Из оставшихся тарифов наилучший $c_{22} = 3$ и $c_{34} = 3$. В клетку A_2B_2 направляем груз, равный min $\{8, 4\} = 4$. При этом вычеркивается столбец B_2 из рассмотрения. Из оставшихся тарифов наименьший $c_{34} = 3$. В клетку A_3B_4 направляем груз, равный min $\{10, 8\} = 8$. При этом потребность четвертого магазина удовлетворена, а из третьей базы не вывезены 2 ед. Этот нераспределенный груз направляем в клетку A_3B_3, $x_{33} = 2$. Потребность третьего магазина не удовлетворена на 2 ед. Направим от фиктивного поставщика – базы A_4 – 2 ед. в клетку A_4B_3, т.е. $x_{43} = 2$.

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, а должно быть $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$. Следовательно, опорный план является **невырожденным.**

3. Определяем значение целевой функции первого опорного плана.

$$F(\overline{X}_1) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6 + 8 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 88 \text{ тыс. руб.}$$

4. Проверим оптимальность опорного плана. Найдем потенциалы α_i, β_j по занятым клеткам таблицы, в которых $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$, полагая, что $\alpha_1 = 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \beta_1 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_2 = 2 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 3 \\ \alpha_2 + \beta_3 = 8 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 6 \\ \alpha_3 + \beta_4 = 3 \\ \alpha_4 + \beta_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 0 + \beta_1 = 1 \\ 0 + \beta_2 = 2 \\ \alpha_2 + 2 = 3 \\ 1 + \beta_3 = 8 \\ \alpha_3 + 7 = 6 \\ -1 + \beta_4 = 3 \\ \alpha_4 + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \beta_3 = 7 \\ \alpha_3 = -1 \\ \beta_4 = 4 \\ \alpha_4 = -7. \end{cases}$$

Занесем найденные значения потенциалов в табл. 2.6.1 и вычислим оценки **свободных** клеток $\Delta_{ij} = (\beta_j + \alpha_i) - c_{ij}$:

$\Delta_{13} = 7 + 0 - 4 = 3$; $\Delta_{14} = 4 + 0 - 3 = 1$; $\Delta_{21} = 1 + 1 - 4 = -2$;
$\Delta_{24} = 4 + 1 - 5 = 0$; $\Delta_{31} = 1 + (-1) - 2 = -2$; $\Delta_{32} = 2 + (-1) - 7 = -6$;
$\Delta_{41} = 1 + (-7) - 0 = -6$; $\Delta_{42} = 2 + (-7) - 0 = -5$; $\Delta_{44} = 4 + (-7) - 0 = -3$.

Первый опорный план не является оптимальным, так как $\Delta_{13} > 0$ и $\Delta_{14} > 0$, поэтому переходим к его улучшению.

5. Выбираем максимальную оценку свободной клетки — $\Delta_{13} = 3$. Для клетки A_1B_3 построим цикл перераспределения груза. Для этого в перспективную клетку A_1B_3 поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «–», «+», «–». Цикл приведен в табл. 2.6.1.

Из грузов x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. $\gamma = \min\{2, 4\} = 2$. Прибавляем 2 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 2 из x_{ij}, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план II, приведенный в табл. 2.6.2.

6. Определяем значение целевой функции:

$$F(\overline{X}_2) = F(\overline{X}_1) - \gamma\Delta_{13} = 88 - 2 \cdot 3 = 82 \text{ (тыс. руб.)}$$

Таблица 2.6.2

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы α_i
	β_j \ α_i	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = -1$	$\beta_3 = 4$	$\beta_4 = 1$	
A_1	$\alpha_1 = 0$	1 4 –	2	4 +2	3	6
A_2	$\alpha_2 = 4$	4	3 6	8 2	5	8
A_3	$\alpha_3 = 2$	2 +	7	6 – 2	3 8	10
A_4	$\alpha_4 = -4$	0	0	0 2	0	2
Потреб-ности b_j		4	6	8	8	26 \ 26

7. Количество занятых клеток в плане II – 7, следовательно, план **невырожденный.**

8. Проверяем оптимальность плана методом потенциалов, для этого находим потенциалы α_i, β_j по занятым клеткам, где $\alpha_1 + \beta_j = c_{ij}$, полагая, что $\alpha_1 = 0$;

$$\begin{cases}\alpha_1 = 0\\ \alpha_1+\beta_1 = 1\\ \alpha_1+\beta_3=4\\ \alpha_2+\beta_3=8\\ \alpha_2+\beta_2=3\\ \alpha_3+\beta_3=6\\ \alpha_3+\beta_4=3\\ \alpha_4+\beta_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 0\\ 0+\beta_1 = 1\\ 0+\beta_3=4\\ \alpha_2+4=8\\ 4+\beta_2=3\\ \alpha_3+4=6\\ 2+\beta_4=3\\ \alpha_4+4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 0\\ \beta_1 = 1\\ \beta_3=4\\ \alpha_2=4\\ \beta_2=-1\\ \alpha_3=2\\ \beta_4=1\\ \alpha_4=-4.\end{cases}$$

Затем рассчитываем оценки свободных клеток:

$\Delta_{12} = 0 + (-1) - 2 = -3$; $\Delta_{14} = 0 + 1 - 3 = -2$; $\Delta_{21} = 4 + 1 - 4 = 1$;

$\Delta_{24} = 4 + 1 - 5 = 0$; $\Delta_{31} = 2 + 1 - 2 = 1$; $\Delta_{32} = 2 - 1 - 7 = -6$;
$\Delta_{41} = -4 + 1 - 0 = -3$; $\Delta_{42} = -4 - 1 - 0 = -5$; $\Delta_{44} = -4 + 1 - 0 = -3$.

План, полученный в табл. 2.6.2, не оптимальный, так как $\Delta_{21} > 0$ и $\Delta_{31} > 0$.

9. Проводим улучшение плана II путем перераспределения грузов. В качестве перспективной клетки для загрузки выбираем A_3B_1, в которую записываем +, затем строим цикл перераспределения, приведенный в табл. 2.6.2.

В построенном цикле определяем величину $\gamma = \min(4, 2) = 2$.

Перераспределив груз, получаем новый план III, приведенный в табл. 2.6.3.

Таблица 2.6.3

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы α_i
	α_i \ β_j	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = -1$	$\beta_3 = 4$	$\beta_4 = 2$	
A_1	$\alpha_1 = 0$	1 2 −	2	4 + 4	3	6
A_2	$\alpha_2 = 4$	4 +	3 6	8 2 −	5	8
A_3	$\alpha_3 = 2$	2 2	7	6	3 8	10
A_4	$\alpha_4 = -4$	0	0	0 2	0	2
Потребности b_j		4	6	8	8	26 \ 26

10. Количество занятых клеток 7, а должно быть $m + n - 1 = 7$, следовательно, план III невырожденный.

11. Вычислим значение целевой функции:

$$F(\overline{X}_3) = F(\overline{X}_2) - \gamma \cdot \Delta_{31} = 82 - 2 \cdot 1 = 80 \text{ тыс. руб.}$$

12. Проверяем оптимальность плана III методом потенциалов. Находим потенциалы по занятым клеткам:

$$\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_1+\beta_1=1\\ \alpha_1+\beta_3=4\\ \alpha_2+\beta_3=8\\ \alpha_2+\beta_2=3\\ \alpha_3+\beta_1=2\\ \alpha_3+\beta_4=3\\ \alpha_4+\beta_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\ 0+\beta_1=1\\ 0+\beta_3=4\\ \alpha_2+4=8\\ 4+\beta_2=3\\ \alpha_3+1=2\\ 1+\beta_4=3\\ \alpha_4+4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\ \beta_1=1\\ \beta_3=4\\ \alpha_2=4\\ \beta_2=-1\\ \alpha_3=1\\ \beta_4=2\\ \alpha_4=-4.\end{cases}$$

Рассчитываем оценки свободных клеток:

$\Delta_{12} = -1 + 0 - 2 = -3$; $\Delta_{14} = 2 + 0 - 3 = -1$; $\Delta_{21} = 1 + 4 - 4 = 1$;
$\Delta_{24} = 2 + 4 - 5 = 1$; $\Delta_{32} = -1 + 1 - 7 = -7$; $\Delta_{33} = 4 + 1 - 6 = -1$;
$\Delta_{41} = 1 + (-4) - 0 = -3$; $\Delta_{42} = -1 + (-4) - 0 = -5$;
$\Delta_{44} = 2 + (-4) - 0 = -2$.

План не оптимальный, так как $\Delta_{21} > 0$ и $\Delta_{24} > 0$.

13. Проводим улучшение плана III перераспределения груза. В качестве перспективной клетки для загрузки выбираем A_2B_1, в которую записываем +, затем строим цикл перераспределения в табл. 2.6.3.

Определяем величину $\gamma = \min\ (2;\ 2) = 2$. После проведения операции перераспределения получаем план IV, приведенный в табл. 2.6.4.

14. План получается вырожденный, поскольку в минусовых клетках цикла находятся два одинаковых минимальных объема груза, равные 2, и при перераспределении две клетки A_1B_1 и A_2B_2 оказались свободными, поэтому число занятых клеток будет меньше, чем $m + n - 1 = 7$. Для продолжения решения в одну из освободившихся клеток – в клетку A_1B_1, так как тариф c_{11} меньше c_{23}, записываем нуль.

15. Вычисляем значение целевой функции:

$$F(\overline{X}_4) = F(\overline{X}_3) - \gamma \cdot \Delta_{21} = 80 - 2 \cdot 1 = 78 \text{ тыс. руб.}$$

Таблица 2.6.4

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы α_i
	α_i \ β_j	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 0$	$\beta_3 = 4$	$\beta_4 = 2$	
A_1	$\alpha_1 = 0$	1 0	2	4 6	3	6
A_2	$\alpha_2 = 3$	4 2	3 6	8	5	8
A_3	$\alpha_3 = 1$	2 2	7	6	3 8	10
A_4	$\alpha_4 = -4$	0	0	0 2	0	2
Потребности b_j		4	6	8	8	26 \ 26

16. Проверяем оптимальность плана IV методом потенциалов. Находим потенциалы по занятым клеткам:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \beta_1 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_3 = 4 \\ \alpha_2 + \beta_1 = 4 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 3 \\ \alpha_3 + \beta_1 = 2 \\ \alpha_3 + \beta_4 = 3 \\ \alpha_4 + \beta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 0 + \beta_1 = 1 \\ 0 + \beta_3 = 4 \\ \alpha_2 + 1 = 4 \\ 3 + \beta_2 = 3 \\ \alpha_3 + 1 = 2 \\ 1 + \beta_4 = 3 \\ \alpha_4 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 1 \\ \beta_3 = 4 \\ \alpha_2 = 3 \\ \beta_2 = 0 \\ \alpha_3 = 1 \\ \beta_4 = 2 \\ \alpha_4 = -4. \end{cases}$$

Рассчитаем оценки свободных клеток:

$\Delta_{12} = 0 + 0 - 2 = -2$; $\Delta_{14} = 2 + 0 - 3 = -1$; $\Delta_{23} = 4 + 3 - 8 = -1$;
$\Delta_{24} = 2 + 3 - 5 = 0$; $\Delta_{32} = 0 + 1 - 7 = -6$; $\Delta_{33} = 4 + 1 - 6 = -1$;
$\Delta_{41} = 1 + (-4) - 0 = -3$; $\Delta_{42} = 0 + (-4) - 0 = -4$; $\Delta_{44} = 2 + (-4) - 0 = -2$.

Поскольку все оценки не превышают 0, то план IV является оптимальным, тогда решение задачи можно представить следующим образом:

$$X_4^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad F(X_4^*) = 78 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, с первой базы необходимо весь груз направить в третий магазин, со второй базы направить в первый и второй магазины в количестве 2 ед. и 6 ед., а груз с третьей базы следует вывозить в первый и четвертый магазины в количестве 2 и 8 ед. соответственно. При этом потребность третьего магазина B_3 остается неудовлетворенной в объеме 2 ед. Общая стоимость доставки груза потребителям будет минимальной и составляет 78 тыс. руб., экономия составила 10 тыс руб. Так как оценка свободной клетки $\Delta_{24} = 0$, то задача имеет множество оптимальных планов.

Контрольные вопросы

1. Как формулируется транспортная задача?
2. Как составляется первый опорный план в транспортной задаче?
3. В чем сущность метода потенциалов? Как с его помощью проверяется опорный план транспортной задачи на оптимальность?
4. Как решаются транспортные задачи с нарушенным балансом между спросом и предложением?
5. Как разрешается проблема вырождения в транспортной задаче?

Задачи

1–2. Поставщики товара – оптовые коммерческие предприятия A_1, A_2, ..., A_m имеют товаров соответственно в количестве a_1, a_2 ..., a_m $(i = \overline{1,\ m})$. Розничные торговые предприятия B_1, B_2,

..., B_n подали заявку на закупку товаров в объемах соответственно $b_1, b_2, ..., b_n$ ($j = \overline{1, n}$). Тарифы перевозок единицы груза с каждого из пунктов поставки в соответствующие пункты потребления заданы в виде матрицы $C = \|c_{ij}\|$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$).

Найдите такой план перевозки груза от поставщиков к потребителям, чтобы совокупные затраты на перевозку были минимальными.

1.

$a_1 = 222 \quad b_1 = 125$
$a_2 = 188 \quad b_2 = 75$
$a_3 = 210 \quad b_3 = 200$
$a_4 = 380 \quad b_4 = 380$
$\qquad\qquad b_5 = 220$

$$C = \begin{pmatrix} 23 & 21 & 11 & 8 & 3 \\ 7 & 17 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 16 & 8 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 21 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

2.

$a_1 = 190 \quad b_1 = 500$
$a_2 = 310 \quad b_2 = 120$
$a_3 = 260 \quad b_3 = 180$
$a_4 = 140 \quad b_4 = 200$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 23 & 21 & 19 \\ 28 & 16 & 5 & 7 \\ 7 & 15 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 21 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Фирма «Союз» обеспечивает доставку видео- и аудиокассет с четырех складов, расположенных в разных точках города, в четыре магазина.

Запас кассет, имеющихся на складах, а также объемы заказов магазинов и тарифы на доставку представлены в транспортной таблице.

Склады	Магазины				Запасы, тыс. шт.
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Склад № 1	2	6	4	3	120
Склад № 2	5	1	9	2	240
Склад № 3	3	2	2	6	80
Склад № 4	4	5	10	3	60
Заказы, шт.	190	170	110	30	

Определите объемы перевозок, обеспечивающих их минимальные затраты.

4. Московский филиал фирмы The Coca-Cola Company, выпускающей газированные напитки Sprite, Coca-Cola, Fanta, складируемые в разных местах, должен поставить продукцию в четыре крупных московских супермаркета: «Рамстор-1», «Рамстор-2», «Седьмой Континент», «Арбатский».

Каждая упаковка содержит 6 емкостей по 2 литра. Тарифы на доставку товара, объемы запасов и заказы на продукцию приведены в таблице.

Склады	Супермаркеты				Запасы
	«Рамстор-1»	«Рамстор-2»	«Седьмой Континент»	«Арбатский»	
Coca-Cola	6	4	9	5	400
Sprite	5	7	8	6	300
Fanta	9	4	6	7	200
Заказы, уп.	150	250	150	350	

Определите оптимальный план поставок газированных напитков в супермаркеты города, а также вид транспортного средства для доставки продукции и затраты на перевозку.

5. Автотранспортная компания «Астрада» обеспечивает доставку шин Bridgestone с трех оптовых складов, расположенных в Москве, Нижнем Новгороде и Покрове в пять магазинов в Че-

Склады в городах	Магазины					Запасы
	Чебоксары	Нижний Новгород	Вязники	Набережные Челны	Казань	
Москва	14	8	6	20	16	350
Нижний Новгород	6	1	2	12	8	400
Покров	12	6	4	18	14	400
Заявки	200	280	240	220	210	

боксарах, Нижнем Новгороде, Вязниках, Набережных Челнах и Казани. Объемы запасов шин на складах, объемы заявок магазинов и тарифы на перевозку приведены в транспортной таблице.

Составьте оптимальный план, обеспечивающий минимальные транспортные расходы перевозок.

6. Фирма «Московия» заключила контракт с компанией АЛРОСА («Алмазы России–Саха») на покупку промышленного золота для его реализации в пяти городах в объемах: Самара — 80 кг, Москва — 260 кг, Ростов-на-Дону — 100 кг, Санкт-Петербург — 140 кг, Нижний Новгород — 120 кг.

Компания располагает тремя месторождениями «Мирное», «Удачный» и «Полевое», которые планируют за год выработать соответственно 200, 250 и 250 кг золота.

Определите минимальную стоимость фрахта специализированного транспорта, обеспечивающую полное удовлетворение заявок покупателей, при заданной матрице тарифов.

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 15 & 4 & 18 \\ 13 & 25 & 8 & 15 & 5 \\ 5 & 11 & 6 & 20 & 12 \end{pmatrix}.$$

7. Составьте оптимальный план перевозки автомобилей из городов Ижевск, Казань, Тольятти в города Москву, Саранск и Ульяновск. Стоимость перевозки одного автомобиля составляет 10 руб. за км. Расстояние между городами и объемы заявок представлены в таблице.

Города	Города			Запасы, шт.
	Москва	Саранск	Ульяновск	
Ижевск	10500	6000	4500	20
Казань	7500	3900	2100	65
Тольятти	9000	3600	1500	80
Заказы, шт.	100	50	15	

Составьте оптимальный план перевозок, обеспечивающий минимальные затраты на перевозку.

8. Составьте оптимальный план перевозки лекарств с минимальными затратами из аптечных складов в пять аптек города: больницу № 15, городские клинические больницы № 7, 23 и 50 и госпиталь им. Н. Н. Бурденко. Запасы лекарств на складах, заявки потребителей и тарифы перевозок представлены в таблице.

Склады	Аптеки больниц					Запасы
	№ 15	№ 7	№ 23	№ 50	Бурденко	
АС № 1	10	11	6	7	8	100
Фарма К.	10	11	8	9	12	150
ПРОТЕК	12	12	10	12	14	200
Заказы	50	200	60	100	40	

9. Составьте оптимальный план перевозки угля с минимальными транспортными расходами из шахт «Варгашорская» (В), «Западная» (З) и «Комсомольская» (К), еженедельно добывающих соответственно 26, 32 и 17 тыс. т. Покупатели угля расположены в разных городах A, B, C и D, заявки которых составляют 28, 19, 12 и 16 тыс. т соответственно. Тарифы, определяющие стоимость перевозки 1 тыс. т между поставщиками и потребителями, представлены в транспортной таблице.

Шахты	Потребители				Добыча угля, тыс. т в неделю
	A	B	C	D	
Западная	70	76	72	68	32
Варгашорская	80	84	82	77	26
Комсомольская	80	83	82	76	17
Заявки, тыс. т	28	19	12	16	

10. Составьте оптимальный план завоза хлебобулочной продукции с минимальными транспортными расходами из трех пекарен фирмы «Колос» в четыре булочные города: A, B, C, D. Заказы на поставку хлебобулочных изделий, производительность пекарен и транспортные тарифы представлены в транспортной таблице.

Мини-пекарни	Булочные				Производительность пекарен, кг/сутки
	A	B	C	D	
№ 1	4	7	6	10	830
№ 2	9	6	7	5	670
№ 3	6	7	5	8	770
Заказы, кг/сутки	520	610	380	760	

11. Сельскохозяйственный кооператив «Ласточка» в области имеет три филиала $Ф_1$, $Ф_2$ и $Ф_3$, которые обеспечивают поставками подсолнечных семян в соответствии с заявками пять заводов – производителей подсолнечного масла A, B, C, D и E. Объемы запасов семян, объемы заказов на поставку и тарифы на перевозку приведены в транспортной таблице.

Филиалы	Заводы					Запасы, т
	A	B	C	D	E	
$Ф_1$	7	9	15	4	18	630
$Ф_2$	13	12	8	15	5	710
$Ф_3$	5	14	6	20	12	820
Заявки, т	400	520	480	560	540	

Постройте оптимальный план перевозки подсолнечных семян с минимальными транспортными расходами.

2.7. Анализ устойчивости коммерческой деятельности предприятия

Анализ устойчивости коммерческой деятельности предприятия связан с изучением степени влияния динамики изменения показателей условий среды на результаты коммерческой деятельности.

Так, после того как получено оптимальное решение в п. 2.3.2, по исходным статическим условиям задачи п. 2.2.1 проводится анализ моделей на чувствительность изменения оптимального решения к возможным изменениям внешних условий, т.е. динамике реальной жизни. Безусловный интерес представляют вопросы оценки влияния изменения спроса, запасов сырья, а также оптовых или розничных цен на оптимальное решение. В таком случае рассматривается по частям некоторый комплекс линейных оптимизационных моделей, что и придает модели динамичность, позволяющую проанализировать в совокупности влияние возможных изменений исходных условий на полученное ранее оптимальное решение. Таким образом, проводится исследование коммерческой деятельности на моделях, динамические характеристики которых отображают природу реальных процессов жизни, поскольку вначале полученное статическое решение может устареть и быть непригодным для реализации.

Взаимосвязь экономических показателей рассматриваемой задачи можно представить в виде следующего выражения:

Доход $= f$(ресурсы, спрос, цены, инвестиции).

Перейдем к последовательному анализу влияния факторов на критерий целевой функции дохода от продажи красок для наружных и внутренних работ. В общем виде экономико-математическая модель поставленной в п. 2.2.1 задачи имеет следующий вид:

$$F(\overline{X}) = (c_{\text{н}}x_{\text{н}} + c_{\text{в}}x_{\text{в}}) \to \max$$

$$\begin{cases} a_{\text{н}}^1 x_{\text{н}} + a_{\text{в}}^1 x_{\text{в}} \le b_1, \\ a_{\text{н}}^2 x_{\text{н}} + a_{\text{в}}^2 x_{\text{в}} \le b_2, \\ x_{\text{н}} \le D_{\text{н}}, \\ x_{\text{в}} \le D_{\text{в}}, \\ x_{\text{н}} \ge 0, \\ x_{\text{в}} \ge 0. \end{cases}$$

Взаимосвязь показателей этой задачи можно представить в виде графа древовидной структуры (рис. 2.7.1), состоящего из показателей коммерческой деятельности (элементов), уровней и связей между ними.

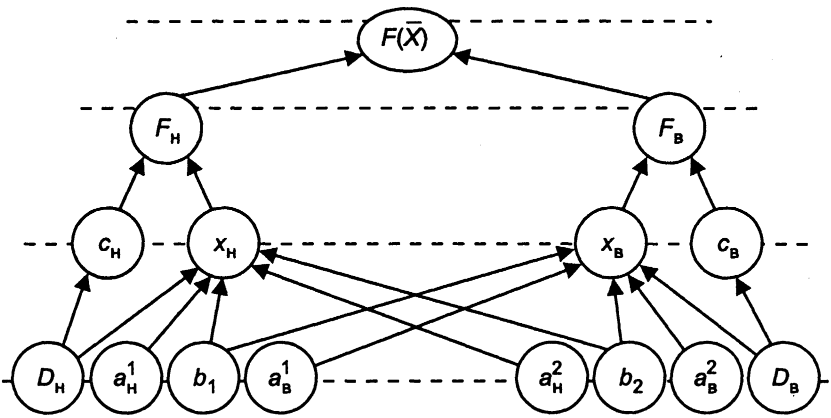


Рис. 2.7.1. Древовидный граф связи показателей коммерческой деятельности

Анализ чувствительности заключается в количественной оценке степени влияния изменения на 1% или на 1 ед. каждого из показателей нижнего уровня на показатели верхнего уровня. Таким образом, можно определить чувствительность изменения выручки от реализации в зависимости от изменения других включенных в модель показателей. Кроме того, можно определить зоны устойчивости работы предприятия, выявить диапазоны возможного изменения каждого показателя коммерческой деятельности.

Воспользуемся результатами, полученными в разделе 2.3, и запишем экономико-математическую модель задачи:

$$F(\bar{X}) = (2x_н + 3x_в) \to \max$$

$$\begin{cases} 0{,}5x_н + x_в \le 3, & (1) \\ x_н + 0{,}5x_в \le 4, & (2) \\ x_в - x_н \le 1{,}5, & (3) \\ x_в \le 2, & (4) \\ x_н \ge 0{,}25, & (5) \\ x_в \ge 0{,}5. & (6) \end{cases}$$

Геометрический метод позволил получить статическую область допустимых решений, представленную на рис. 2.7.2.

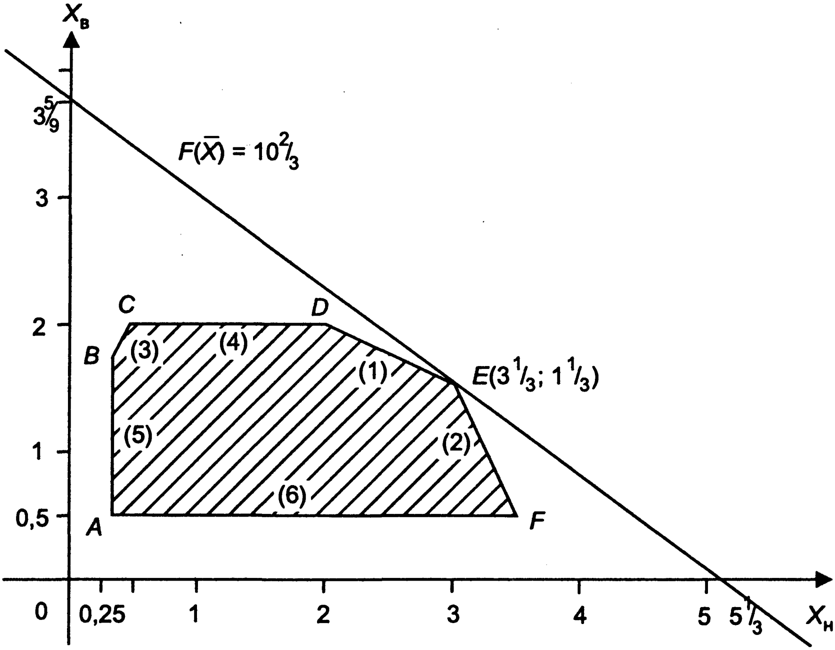


Рис. 2.7.2. Область допустимых решений

1. Рассмотрим, как влияет на оптимальное решение **изменение запасов ресурсов** *A* и *B*. Возможны два варианта постановки этой задачи:

а) насколько можно увеличить запас ресурса *A* или *B* для улучшения полученного оптимального значения дохода от продажи краски;

б) насколько можно уменьшить запас ресурса *A* или *B* при сохранении полученного оптимального значения дохода от продажи?

Эти задачи называют анализом модели на устойчивость (чувствительность) к правой части (ограничений), так как величина запаса каждого ресурса записывается именно в правой части условий-ограничений. Ограничения линейной модели делятся на **связывающие (активные) и несвязывающие (неактивные).**

Ресурс, соответствующий связывающему ограничению, является дефицитным ресурсом, так как он используется полностью. Ресурс же, соответствующий не связывающему ограничению, является недефицитным ресурсом, так как он имеется в избытке. Поэтому при анализе модели на чувствительность к правым частям ограничений определяют:

предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение;

предельно допустимое уменьшение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденное ранее оптимальное решение. Это особенно важно, если остатки недефицитного ресурса можно использовать для других целей.

Следует заметить, что анализировать влияние на оптимум увеличения недефицитных ресурсов или уменьшения объема дефицитных ресурсов не имеет смысла, поскольку в первом случае и без того избыточный ресурс становится еще более избыточным, что никак не скажется на полученном ранее решении. Вторая же часть задачи особенно важна, поскольку сокращение объема дефицитного ресурса никогда не улучшает значения целевой функции и, следовательно, приведет к уменьшению дохода от реализации, т.е. ухудшению показателей коммерческой деятельности предприятия.

В рассматриваемой задаче используемые запасы сырья A и B являются дефицитными ресурсами, поэтому последовательно рассмотрим сначала увеличение запасов сырья (ресурса) A.

На рис. 2.7.3 видно, что при увеличении запаса этого ресурса прямая (1) перемещается вверх параллельно самой себе, при этом треугольник DKE постепенно стягивается в точку K (3, 2). В этом случае областью допустимых решений становится многоугольник $ABCKF$, а оптимальному решению соответствует точка K, а ограничения (2) и (4) становятся связывающими. В точке K ограничение (1) становится избыточным, поскольку любое дальнейшее увеличение запаса ресурса A не влияет ни на область допус-

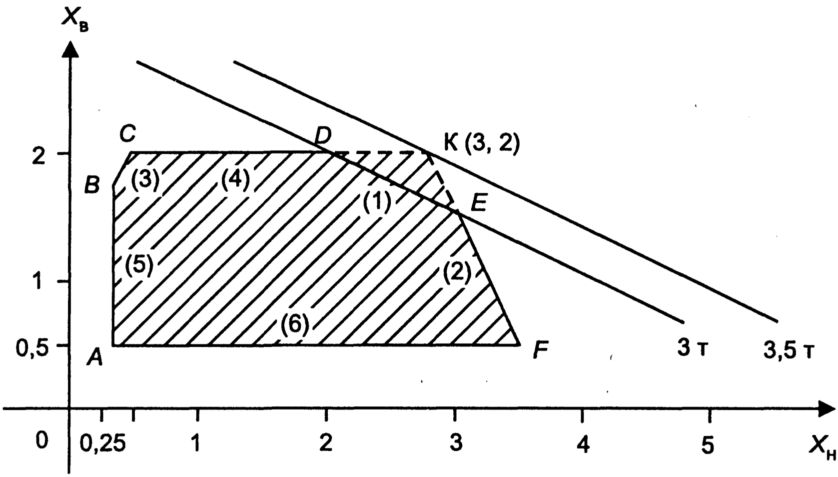


Рис. 2.7.3. Изменение области допустимых решений от величины запасов ресурса А

тимых решений, ни на оптимальное решение. Именно в этом и состоит отличие недефицитности ресурса от его избыточности: исключение избыточного ограничения не изменяет ни области допустимых решений, ни самого оптимального решения, в то время как исключение исходного ограничения, соответствующего дефицитному ресурсу, всегда изменяет область допустимых решений, но не всегда – оптимальное решение. Таким образом, нет необходимости увеличивать объем сырья *А* сверх того предельного значения, при котором соответствующее ему ограничение (1) станет избыточным, где прямая (1) пройдет через точку *K*, что и указывает на новое оптимальное решение.

Этот предельный уровень можно найти следующим образом. Сначала определяются координаты точки *K*, являющейся точкой пересечения прямых (2) и (4), которая находится из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_н + 0{,}5x_в = 4, \\ x_в = 2. \end{cases}$$

Затем путем подстановки координат точки $K(3;\ 2)$ в левую часть ограничения (1) определяется максимально допустимый запас ресурса A:

$$0{,}5x_{\text{н}} + x_{\text{в}} = 0{,}5 \cdot 3 + 2 = 3{,}5\ (\text{т}).$$

Следовательно, разумно увеличить запас сырья A на 0,5 т, при этом новое оптимальное значение целевой функции будет равно:

$$F_{\max}(K) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12\ (\text{тыс. руб.})$$

2. Аналогично решается задача о целесообразности увеличения запасов дефицитного ресурса (сырья) B в соответствующем ограничении (2) (рис. 2.7.4).

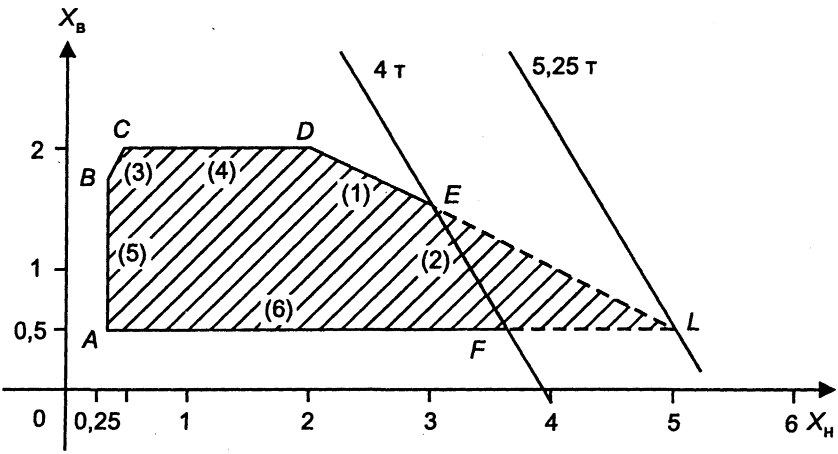


Рис. 2.7.4. Изменение области допустимых решений от величины запасов ресурса B

Новым оптимальным решением становится точка L, где пересекаются прямые (1) и (6), т.е. $0{,}5x_{\text{н}} + x_{\text{в}} = 3$ и $x_{\text{в}} = 0{,}5$. Очевидно, ее координаты $x_{\text{н}} = 5$ и $x_{\text{в}} = 0{,}5$, причем запас сырья B можно увеличить до значения, равного $x_{\text{н}} + 0{,}5x_{\text{в}} = 5 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 5{,}25$ т, т.е.

на 1,25 т, тогда новое оптимальное значение целевой функции будет равно:

$$F_{\max}(L) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0{,}5 = 11{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

3. Рассмотрим теперь решение задачи о возможности снижения запасов недефицитных ресурсов (т.е. об уменьшении правой части несвязывающих ограничений).

Ограничение (4) $x_в \leq 2$ задает уровень спроса на краску для внутренних работ. На рис. 2.7.5 видно, что прямую CD (4) можно опускать параллельно вниз до пересечения с точкой $E\,(3^1/_3;\ 1^1/_3)$, не изменяя оптимального решения. Таким образом, при уменьшении спроса на краску для внутренних работ до величины $x_в = 1^1/_3$, т. е. на $(2 - 1^1/_3) = {}^2/_3$, оптимальность полученного ранее решения сохраняется.

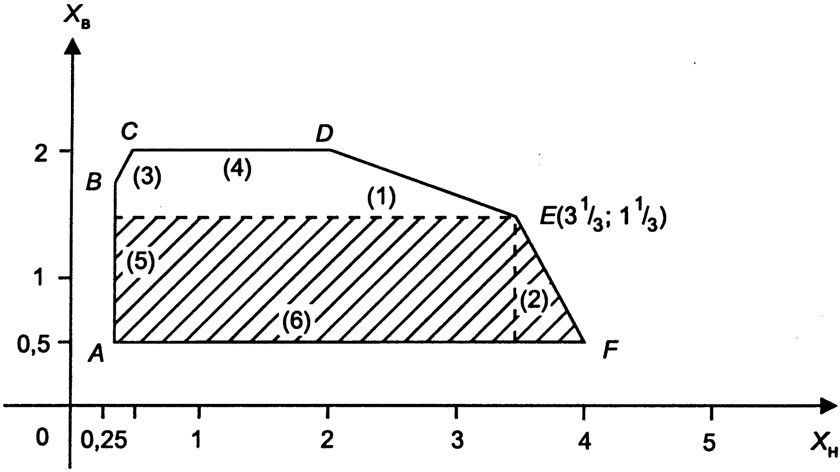


Рис. 2.7.5. Изменение области допустимых решений от объема спроса

Ограничение (3) $-x_н + x_в \leq 1{,}5$ представляет соотношение между суточным спросом на краску для внутренних работ и суточным спросом на краску для наружных работ. В этом случае правую часть ограничения также можно уменьшать до тех пор, пока прямая *BC* (3) (рис. 2.7.6) не достигнет точки *E*.

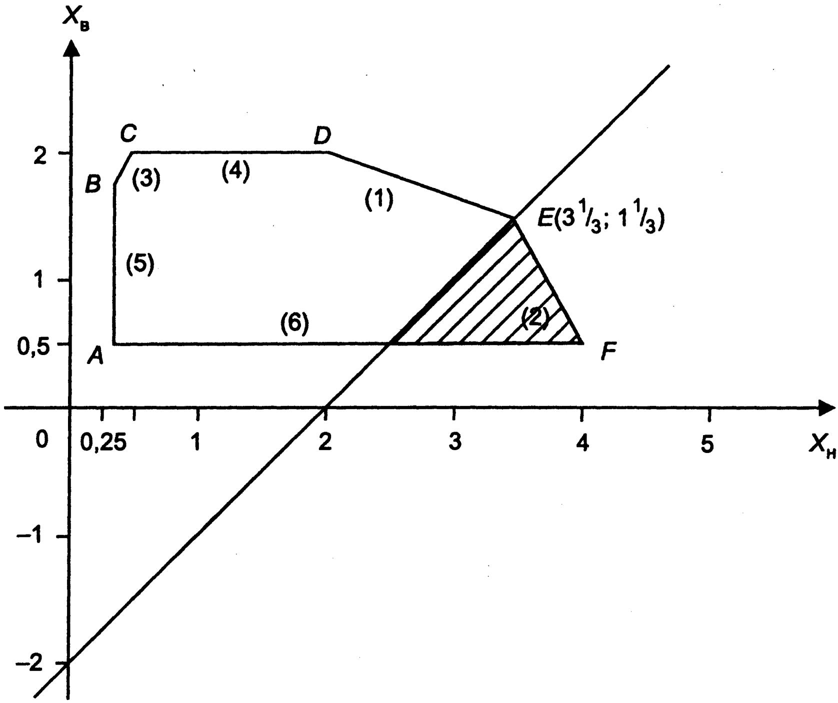


Рис. 2.7.6. Изменение области допустимых решений от изменения соотношения спроса на краски

При этом правая часть ограничения (3) станет равной $-x_н + x_в = -3^1/_3 + 1^1/_3 = -2$ т, а само решение (3) может быть записано в виде:

$$-x_н + x_в \le -2 \text{ или } x_н - x_в \ge 2.$$

Полученный результат показывает, что если суточный спрос на краску для наружных работ будет превышать суточный спрос на краску для внутренних работ не менее чем на 2 т, то ранее полученное оптимальное решение также не изменится.

Полученные результаты можно обобщить и представить в виде табл. 2.7.1.

Таблица 2.7.1

Ресурс	Тип ресурса	Предельно допустимое изменение запаса ресурса Δb_i, т	Предельное приращение оптимального значения ΔF_i, тыс. руб.	Значение p_i, тыс. руб./ т
b_1	Дефицитный	$\Delta b_1 = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$	$\Delta F_1 = 12 - 10^2/_3 = 1^1/_3$	$p_1 = 2^2/_3$
b_2	Дефицитный	$\Delta b_2 = 5{,}25 - 4 = 1{,}25$	$\Delta F_2 = 11{,}5 - 10^2/_3 = ^5/_6$	$p_2 = ^2/_3$
b_3	Недефицитный	$\Delta b_3 = -2 - 1{,}5 = -3{,}5$	$\Delta F_3 = 10^2/_3 - 10^2/_3 = 0$	$p_3 = 0$
b_4	Недефицитный	$\Delta b_4 = 1^1/_3 - 2 = -^2/_3$	$\Delta F_4 = 10^2/_3 - 10^2/_3 = 0$	$p_4 = 0$

4. При решении задач анализа модели на чувствительность в условиях ограничения на затраты, связанные с дополнительным привлечением ресурсов или с инвестициями, что характерно для большинства экономических задач, возникает задача выбора предпочтения ресурсов при вложении дополнительных средств. Для этого вводится показатель ценности p_i дополнительной единицы ресурса i-го вида, которую можно найти по формуле

$$p_i = \frac{\Delta F_i}{\Delta b_i},$$

где Δb_i – предельно допустимое изменение запаса ресурса;
ΔF_i – соответствующее предельное приращение оптимального значения целевой функции.

Используя данные табл. 2.7.1, например, для ограничения (1), вычислим ценность соответствующего ресурса A:

$$p_1 = \frac{\Delta F_1}{\Delta b_1} = \frac{1\frac{1}{3}}{0{,}5} = 2\frac{2}{3} \text{ тыс. руб./т.}$$

Аналогично можно определить ценность единицы каждого из остальных используемых ресурсов, что и представлено в последнем столбце табл. 2.7.1.

На основе полученных данных можно сделать вывод о том, что дополнительные вложения (инвестиции) следует направить прежде всего на увеличение ресурса b_1 (сырье A) $p_1 = 2^2/_3$, а затем уже – на увеличение ресурса b_2 (сырье B) $p_2 = {}^2/_3$. Как и предполагалось ранее, увеличивать объем недефицитных ресурсов не следует ($p_3 = p_4 = 0$).

5. Рассмотрим теперь, в каких пределах возможно изменение цен на краски, при которых не происходит изменение оптимального решения. Цены на краски $c_н$ и $c_в$ определяют наклон линии целевой функции $F(\overline{X}) = (c_н x_н + c_в x_в)$. Уменьшение $c_н$ или увеличение $c_в$ приводит к вращению линии целевой функции против часовой стрелки относительно точки E вплоть до совпадения с линией DE графика (1) (рис. 2.7.7). В этом случае доход от продажи изменяется, а множество вариантов плана получим на прямой DE. Такое же явление наблюдается при вращении линии целевой функции по часовой стрелке относительно точки E при изменении коэффициентов целевой функции в противоположную сторону, что и указано на рис. 2.7.7. В этом случае получим на линии EF множество альтернативных решений $x_н$ и $x_в$, крайние из которых точки E и F указывают на получение оптимальной величины дохода.

Дальнейший анализ заключается в определении допустимого интервала изменения цены $c_н$ при постоянной цене $c_в = 3$, при котором решение остается оптимальным. Находим максимальное значение $c_н$, увеличивая его до тех пор, пока наклон прямой целевой функции не совпадает с прямой $EF(2)$, тогда это значение находится из равенства тангенсов углов наклона линий $c_н x_в + 3x_в = F(\overline{X})$ и $x_н + 0{,}5x_в = 4$:

$$tg\alpha = \frac{c_н}{c_в} = \frac{a_н^2}{a_в^2};\ \frac{c_н}{3} = \frac{1}{0{,}5} \Rightarrow \max c_н = 6 \Rightarrow 6x_н + 3x_в = F(\overline{X}).$$

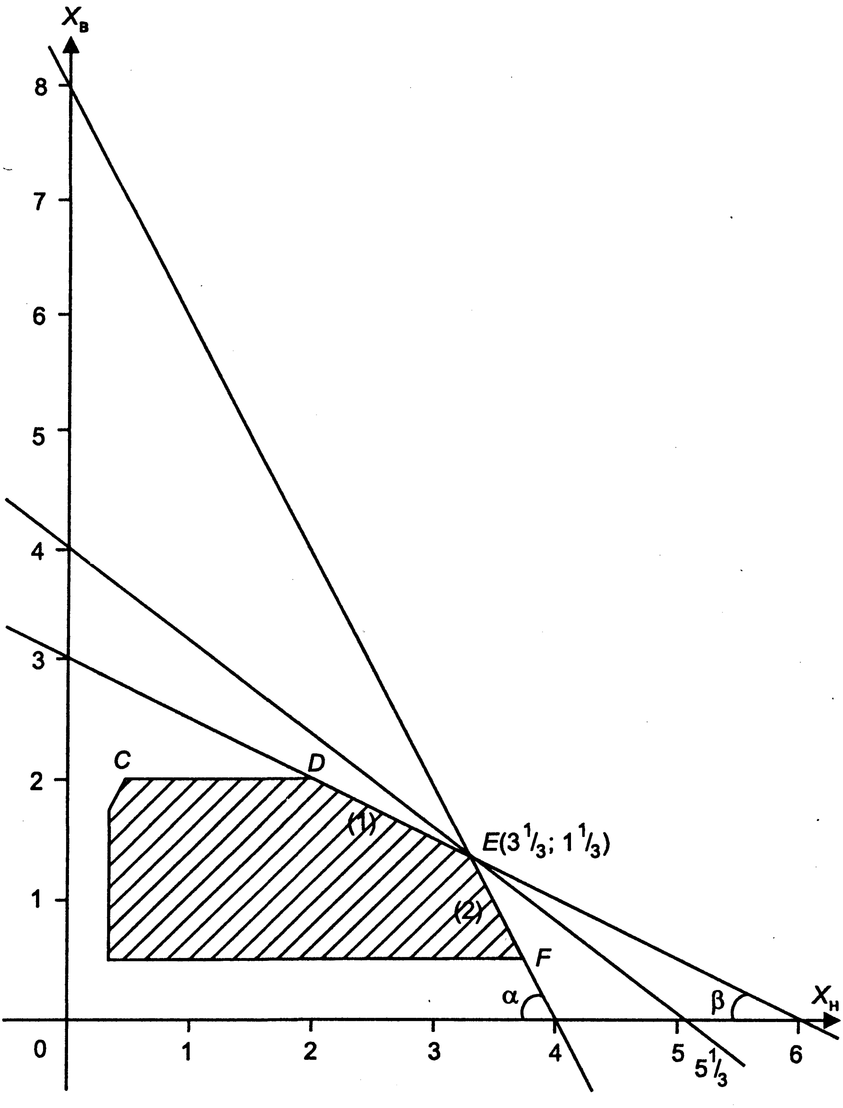


Рис. 2.7.7. Влияние изменения цен на доход от продажи

При этом доход от реализации увеличится и может составить $6 \cdot 3^1/_3 + 3 \cdot 1^1/_3 = 24$ тыс. руб. Аналогично минимальное значение $c_н$ находим, уменьшая его до тех пор, пока наклон прямой, соответствующей целевой функции, не совпадет с прямой DE (1), тогда это значение находится из равенства тангенсов углов наклона линий $c_н x_н + 3x_в = F(\overline{X})$ и $0{,}5x_н + x_в = 3$:

$$tg\beta = \frac{c_н}{c_в} = \frac{a_н^1}{a_в^1}; \ \frac{c_н}{3} = \frac{0{,}5}{1} \Rightarrow \max c_н = 1{,}5 \rightarrow 1{,}5 \cdot x_н + 3x_в = F(\overline{X}).$$

При этом доход от реализации уменьшится и станет равным $1{,}5 \cdot 3^1/_3 + 3 \cdot 1^1/_3 = 9$ тыс. руб. Таким образом, допустимый интервал изменения цены $c_н$, в котором точка E остается единственной оптимальной, определяется неравенством $1{,}5 \le c_н \le 6$. При $c_н = 1{,}5$ оптимальным решением является весь отрезок DE, его любая точка, включая точки E и D. Если $c_н < 1{,}5$, то оптимум смещается в точку D.

Аналогично при $c_н = 6$ оптимальное значение целевой функции достигается в любой точке отрезка EF, включая точки E и F. Если же $c_н > 6$, то в этом случае оптимум смещается в точку F.

Следует заметить, что при $c_н < 1{,}5$ ресурс b_4 становится дефицитным, а ресурс b_2 – недефицитным, т.е. если выручка от продажи 1 т краски для наружных работ станет меньше 1,5 тыс. руб., то для фабрики наиболее выгодно выпускать максимально допустимое количество краски для внутренних работ, $x_в = 2$ т в сутки. При этом общее потребление сырья B снизится, что обусловит недефицитность этого ресурса в ограничении (2).

Соответствующие выводы можно сделать и для случая $c_н > 6$, когда ресурс b_2 становится дефицитным, а ресурс b_1 – недефицитным. В этом случае доход от продажи 1 т краски для наружных работ будет больше 6 тыс. руб. и наиболее выгодным становится выпуск только краски этого вида (точка F) в объеме $x_н = 4$ т в сутки. При этом общее потребление недефицитного сырья A снижается, b_1 – в ограничении (1).

Аналогичные вычисления можно сделать и для цены на краску для внутренних работ $c_{\text{в}}$:

$$tg\alpha = \frac{c_{\text{н}}}{c_{\text{в}}} = \frac{a_{\text{н}}^2}{a_{\text{в}}^2};\ \frac{2}{c_{\text{в}}} = \frac{1}{0{,}5} \Rightarrow \min c_{\text{в}} = 1 \Rightarrow 2x_{\text{н}} + 1{,}0x_{\text{в}} = F(\bar{X}),$$

$$F(\bar{X}) = 8 \text{ тыс. руб.}$$

$$tg\beta = \frac{c_{\text{н}}}{c_{\text{в}}} = \frac{a_{\text{н}}^1}{a_{\text{в}}^1};\ \frac{2}{c_{\text{в}}} = \frac{0{,}5}{1} \Rightarrow \max c_{\text{в}} = 4 \Rightarrow 2x_{\text{н}} + 4x_{\text{в}} = F(\bar{X}),$$

$$F(\bar{X}) = 12 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, допустимый интервал изменения цены для нее составит $1{,}0 \le c_{\text{н}} \le 4$, при этом единственным оптимальным решением остается точка $E(3^1/_3;\ 1^1/_3)$. Если цена $c_{\text{в}} = 1$ тыс. руб., то оптимальной является любая точка отрезка EF. При дальнейшем уменьшении цены $c_{\text{в}}$ краски для внутренних работ оптимум смещается в точку F, следовательно, выпуск фабрикой краски этого вида становится невыгодным. Если же цена $c_{\text{в}} = 4$ тыс. руб., то оптимальное значение целевой функции достигается в любой точке отрезка DE, а дальнейшее увеличение цены $c_{\text{в}}$ смещает оптимум в точку D.

6. С целью расширения использования возможностей методов и моделей линейного программирования воспользуемся еще составлением двойственной задачи по отношению к исходной или прямой. Обозначим y_1, y_2, y_3, y_4 – двойственные оценки (теневые стоимости) единицы каждого ресурса задачи. Тогда двойственная задача формулируется следующим образом: определить оценку единицы каждого вида ресурса, чтобы при заданных объемах ресурсов, нормах их расхода и показателях дохода общая стоимость затраченных ресурсов была бы минимальной.

Запишем математическую модель двойственной задачи к сформулированной выше в п. 2.3.2 примера 2 прямой задаче линейного программирования:

Прямая задача

Определить $\overline{X}^* = (x_н^*; x_в^*)$, который при ограничениях:

$$\begin{cases} 0{,}5x_н + x_в \le 3, \\ x_н + 0{,}5x_в \le 4, \\ -x_в + x_н \le 1{,}5, \\ x_в \le 2, \\ x_н \ge 0,\ x_в \ge 0 \end{cases}$$

обеспечивает максимум $F(\overline{X}) = (2x_н + 3x_в) \to \max$.

Двойственная задача

Определить $\overline{Y}^* = (y_1^*; y_2^*; y_3^*; y_4^*)$, который при ограничениях:

$$\begin{cases} 0{,}5y_1 + y_2 - y_3 \ge 2, \\ y_1 + 0{,}5y_2 + y_3 + y_4 \ge 3, \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0 \end{cases}$$

обеспечивает минимум $F(\overline{Y}) = (3y_1 + 4y_2 + 1{,}5y_3 + 2y_4) \to \min$.

Решение двойственной задачи определяет оптимальную систему оценок ресурсов, используемых для производства красок. Установим сопряженные пары прямой и двойственной задач:

$$\underbrace{x_н \quad x_в} \quad \underbrace{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4}$$

$$\underbrace{y_5 \quad y_6} \quad \underbrace{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4}.$$

Пользуясь решением прямой задачи (табл. 2.3.3), получим (табл. 2.7.2) решение двойственной задачи, для чего перепишем симплексную таблицу оптимального решения.

Таким образом, оптимальный план двойственной задачи к задаче планирования производства краски имеет следующий вид:

$$\overline{Y}^* = (2^2/_3;\ ^2/_3;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0) \quad F(\overline{Y}^*) = 10^2/_3.$$

Проведем анализ оптимального плана двойственной задачи. В оптимальном плане условные двойственные оценки единицы ресурсов первого и второго видов отличны от нуля $y_1^* = 2^2/_3$; $y_2^* = {}^2/_3$. Ресурсы этих видов в оптимальном плане прямой задачи используются полностью, поскольку дополнительные переменные $x_1^* = 0$; $x_2^* = 0$.

Таблица 2.7.2

План	Базисные переменные	Значения базисных переменных	$x_н$	$x_в$	x_1	x_2	x_3	x_4
V	x_3	3,5	0	0	−2	2	1	0
	x_4	$^2/_3$	0	0	$-^4/_3$	$^2/_3$	0	1
	$x_в$	$1^1/_3$	0	1	$^4/_3$	$-^2/_3$	0	0
	$x_н$	$3^1/_3$	1	0	$-^2/_3$	$^4/_3$	0	0
	$F(\overline{X}_5)$	$10^2/_3$	0	0	$2^2/_3$	$^2/_3$	0	0

Двойственные оценки равны нулю: $y_3* = 0$; $y_4* = 0$, что свидетельствует о необеспеченности спроса, а дополнительные переменные $x_3 = 3{,}5$; $x_4 = {}^2/_3$ вошли в оптимальный план производства красок.

Двойственные оценки в оптимальном плане больше нуля у тех видов ресурсов, которые полностью используются при производстве краски. Эти оценки определяют дефицитность ресурсов A и B, а их величины $y_1* = 2^2/_3$ и $y_2* = {}^2/_3$ показывают, насколько возрастает максимальное значение дохода от продажи краски в прямой задаче при увеличении количества соответствующего вида ресурса на единицу. Например, увеличение ресурса A на 1 т приведет к такому плану, при котором доход от продажи краски возрастет на $2^2/_3$ тыс. руб. и станет равным $10^2/_3 + 2^2/_3 = 13^1/_3$ тыс. руб. Увеличение же ресурса B на 1 т приведет к другому оптимальному плану, при котором доход от продажи краски возрастет на $^2/_3$ тыс. руб. и станет равным $10^2/_3 + {}^2/_3 = 11^1/_3$ тыс. руб. Следует заметить, что коэффициенты симплексной таблицы, расположенные в столбце переменной x_1, показывают, что указанное увеличение дохода по ресурсу A достигается за счет увеличения производства краски внутренних работ на 4/3 т и уменьшения производства краски для наружных работ на 2/3 т в сутки. Значение целевой функции при этом составит

$$F(\overline{X}) = 2(3^1/_3 - {}^2/_3) + 3(1^1/_3 + {}^4/_3) = 13^1/_3 \text{ тыс. руб.}$$

Аналогичные рассуждения можно провести по переменной симплексной таблицы x_2, где соответственно расположенные коэффициенты указывают на увеличение дохода от реализации краски при изменении ресурса B за счет уменьшения производства краски для внутренних работ на $^2/_3$ т и одновременного увеличения производства краски для наружных работ на $^4/_3$ т в сутки. Значение целевой функции при этом составит

$$F(\bar{X}) = 2(x_{н}^0 + {}^4/_3) + 3(x_{в}^0 - {}^2/_3) = 2(3^1/_3 + {}^4/_3) + 3(1^1/_3 - {}^2/_3) =$$
$$= 11^1/_3 \text{ тыс. руб.}$$

При подстановке оптимальных значений двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи получим:

$$\begin{cases} 0{,}5\cdot 2\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} - 0 = 2, \\ 2\tfrac{2}{3} + 0{,}5\cdot \tfrac{2}{3} + 0 + 0 = 3, \\ 2\tfrac{2}{3} > 0, \quad \tfrac{2}{3} > 0, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0. \end{cases}$$

Первое и второе ограничения двойственной задачи являются равенствами, следовательно, двойственные оценки ресурсов, используемые для производства красок для наружных и внутренних работ, равны в точности доходу, получаемому от их продажи. Поэтому продажа указанных видов краски экономически целесообразна в соответствии с оптимальным планом прямой задачи.

Представляют интерес в решении задачи только две двойственные оценки: $y_1^* = 2^2/_3$ и $y_2^* = {}^2/_3$. Они характеризуют «стоимость» ресурсов A и B. Проведем анализ устойчивости двойственных оценок относительно изменений ресурсов A и B (см. п. 2.4.3).

Первый вид ресурса A (столбец x_1) может изменяться в пределах:

$$\max_{d_{1k}>0}\left\{-\frac{4/3}{4/3}\right\} \le \Delta b_A \le \min_{d_{1k<0}}\left\{-\frac{3{,}5}{-2};\ -\frac{2/3}{-4/3};\ -\frac{10/3}{-2/3}\right\}$$

$$-1 \le \Delta b_A \min\left\{\frac{7}{4};\ \frac{1}{2};\ 5\right\} \qquad -1 \le \Delta b_A \le \frac{1}{2}.$$

Следовательно, интервал изменения ресурса A будет равен:

$$\left[3-1;\ 3+\frac{1}{2}\right]=\left[2;\ \frac{7}{2}\right].$$

Второй ресурс B (столбец x_2) может изменяться в пределах:

$$\max_{d_{2k}>0}\left\{-\frac{3{,}5}{2};\ -\frac{2/3}{2/3};\ -\frac{10/3}{4/3}\right\}\le \Delta b_B \le \min_{d_{2k}<0}\left\{-\frac{4/3}{-2/3}\right\}$$

$$\max\{-7/4;\ -1;\ -5/2\}\le \Delta b_B \le 2 \qquad -1\le \Delta b_B \le 2.$$

Следовательно, интервал изменения ресурса B равен:

$$[4-1;\ 4+2]=[3;\ 6].$$

Составим субоптимальные варианты плана с учетом изменений исходных данных модели.

1. Пусть суточный запас сырья A уменьшился на 1 т.

В результате производство краски для наружных работ возросло до 4 т, а для внутренних работ снизилось до нуля, доход от реализации сократился до 8 тыс. руб. (табл. 2.7.3).

Таблица 2.7.3

Базисные переменные	Значения базисных переменных	Коэффициент структурных сдвигов (k_c) по $b_A(x_1)$	Произведение k_c на $\Delta b_A = -1$	Расчет варианта плана $x_3 = x_3 + k_c \Delta b_A$
x_3	3,5	−2	+2	5,5
x_4	2/3	−4/3	+4/3	2
$x_в$	4/3	4/3	−4/3	0
$x_н$	10/3	−2/3	+2/3	4
$F(X_5)$	32/3	8/3	−8/3	8

2. Пусть суточный запас сырья *В* увеличился на 2 т.

Таблица 2.7.4

Базисные переменные	Значения базисных переменных	Коэффициент структурных сдвигов (k_c) по $b_B(x_2)$	Произведение k_c на $\Delta b_B = 2$	Расчет варианта плана
x_3	3,5	2	4	7,5
x_4	2/3	+2/3	4/3	2
$x_в$	4/3	−2/3	−4/3	0
$x_н$	10/3	4/3	8/3	6
$F(X_5)$	32/3	2/3	4/3	12

В результате производство краски для наружных работ возросло до 6, внутренних работ снизилось до нуля, доход от реализации увеличился до 12 тыс. руб. (табл. 2.7.4).

Важно заметить, что математические методы реализованы в виде специальных программ в компьютерах. Однако постановку и расшифровку получаемых решений осуществляет человек, и на это уходит основное время, а реализация на компьютере составляет малое время.

Таким образом, можно проводить математическое моделирование вариантов продажи, учитывая динамику реальной жизни, и прогнозировать устойчивость коммерческой деятельности предприятия.

Задачи

1–6. Найдите новое оптимальное решение по производству фабрикой красок и их продаже при следующих условиях.

1. Отдел снабжения фабрики прогнозирует на следующий месяц недопоставку сырья В в объеме 1,5 т в сутки.

2. Отдел рекламы при проведении рекламной кампании прогнозирует на летний сезон увеличение продажи краски для внутренних работ до 4 т в сутки.

3. Производственный отдел предлагает новый технологический процесс, который позволит снизить расход сырья *A* и *B* на производство 1 т краски для наружных работ с 0,5 и 1 т до 0,4 и 0,8 т соответственно.

4. Маркетинговый отдел прогнозирует на зимний сезон снижение цен краски для внутренних работ и наружных работ с 3 тыс. руб. и 2 тыс. руб. до 2,5 тыс. руб. и 1,5 тыс. руб. за 1 т соответственно.

5. Отдел сбыта установил, что спрос на краску для внутренних работ никогда на превышал 3 т в сутки.

6. Маркетинговый отдел предлагает выпускать еще один вид краски для покраски автомобилей с расходом сырья *A* и *B* соответственно 0,4 и 1,1 по цене 4 тыс. руб. за 1 т.

7. Отдел снабжения прогнозирует на следующий месяц увеличение поставки сырья *A* на 2 т в сутки.

8. Отдел снабжения на следующий месяц прогнозирует снижение поставки сырья *A* на 0,5 т и увеличение сырья *B* на 1 т в сутки.

9. Отдел снабжения на следующий месяц планирует увеличить поставки сырья *A* на 0,5 т в сутки.

10. Отдел снабжения на следующий месяц планирует недопоставку сырья *B* на 1,5 т в сутки.

ГЛАВА 3

МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ТЕОРИИ ИГР

В коммерческой деятельности приходится принимать решения, учитывая множество факторов различной природы. Причем специфика коммерческой деятельности такова, что учитываемые при принятии решений факторы нередко обладают так называемым свойством неопределенности, поскольку нельзя заранее определить точно, каково будет значение того или иного фактора или показателя. Отсюда следует, что и результат принятия решения также будет обладать свойством неопределенности. Например, объем продажи в значительной степени зависит от спроса населения на тот или иной товар. Спрос, как известно, является величиной случайной, следовательно, его значение имеет некоторый разброс и является точно неопределенным.

Неопределенность значений различных факторов приводит к тому, что рекомендации по решению проблемы не могут быть столь же четкими и однозначными, как в случаях полной определенности. В процессе поиска решений появляются возможные варианты решений. Поэтому принятие решения состоит в выборе наилучшего варианта из имеющихся.

Для решения любой проблемы независимо от ее характера существенным является вопрос: кто должен отвечать за решение проблемы? Другими словами, должно существовать некое ответственное лицо, принимающее решение. Это может быть директор, бухгалтер, коммерсант, заведующий секцией, продавец и т.д. или некоторая группа лиц: комиссия, совет директоров, бригада и т.д.

Лицо, принимающее решение, — это реально существующий индивидуум (или группа), которого не устраивает состояние дел или перспектива их будущего развития и который имеет полномочия действовать так, чтобы это состояние изменить.

В настоящее время многие решения в коммерческой деятельности – заказ на поставку того или иного вида товаров, заключение договоров с поставщиками, распределение людей в учреждениях по должностям или операциям, управление движением товаров – все же не оптимальны. Принятие решений в этом случае является искусством и в сильной степени зависит от субъективных качеств лица, принимающего решение. Однако в условиях широкого развития кооперации, усложнения производственных связей с поставщиками товаров народного потребления и, наконец, решения задач по увеличению ассортимента и качества товаров в торговой сети и стремления к более полному удовлетворению потребностей населения приводят к тому, что ответственность человека за последствия принимаемых решений многократно возросла. При этом, несмотря на отсутствие полной определенности, необходимо проводить количественный анализ и на его основе принимать то или иное, но обоснованное решение. В настоящее время разработаны специальные математические методы, предназначенные для обоснования решений в условиях неопределенности. В некоторых, наиболее простых, случаях эти методы позволяют найти множество решений и выбрать из них оптимальное. В более сложных случаях эти методы дают вспомогательный материал, позволяющий глубже разобраться в сущности явлений и оценить каждое из возможных решений с различных точек зрения, взвесить его преимущества и недостатки и в конечном счете принять если не единственно правильное, то по крайней мере близкое к оптимальному решение.

Следует заметить, что при выборе решения в условиях неопределенности всегда неизбежен элемент произвола, а следовательно, и риска. Недостаточность информации всегда опасна, и за нее приходится платить. Поэтому в условиях сложной ситуации необходимо представить варианты решения и их последствий в такой форме, чтобы сделать произвол выбора менее сильным, а риск — минимальным.

Задачами принятия решений в условиях полной или частичной неопределенности занимается теория игр и статистических решений.

3.1. Понятие об игровых моделях

В коммерческой деятельности приходится принимать решения в условиях противодействия другой стороны, которая может преследовать противоположные или иные цели, добиваться других путей достижения цели, препятствовать теми или иными действиями или состояниями внешней среды достижению намеченной цели. Причем эти противодействия противоположной стороны могут носить пассивный или активный характер. В таких случаях приходится учитывать возможные варианты поведения противоположной стороны, ответные действия, возможную реакцию и соответственно исходы.

Возможные варианты поведения обеих сторон и их исходов для каждого сочетания альтернатив и состояний можно представить в виде математической модели, которая называется игрой.

Если в качестве противоположности выступает неактивная, пассивная сторона, которая явно активно не противодействует достижению намеченной цели, то такие игры называются играми с «природой». Такой стороной в коммерции являются неизвестность поведения клиентов, реакция населения на новые виды товаров, неясность погодных условий при перевозке товаров или проведении ярмарки, недостаточная информированность о коммерческих операциях, закупках, сделках и т.п.

В других ситуациях противоположная сторона активно, сознательно может противостоять достижению намеченной цели. В подобных случаях происходит столкновение противоположных интересов, мнений, целей. Такие ситуации называются конфликтными, а принятие решений в конфликтной ситуации затрудняется из-за неопределенности поведения противника. Известно, что противник сознательно стремится предпринять наименее выгодные для вас действия, чтобы обеспечить себе наибольший успех. Неизвестно, в какой мере противник умеет оценить обстановку и возможные последствия, как он оценивает ваши возможности и намерения. Обе стороны конфликта не могут точно предсказать взаимные действия. Несмотря на такую неопределенность, принимать решения приходится каждой стороне конфликта.

Необходимость обоснования оптимальных решений в конфликтных ситуациях привела к возникновению теории игр.

Теория игр — это математическая теория конфликтных ситуаций. Основными ограничениями этой теории являются предположение о полной «идеальной» разумности противника и принятие при разрешении конфликта наиболее осторожного решения.

Основные понятия теории игр

Конфликтующие стороны называются игроками, одна реализация игры — партией, исход игры — выигрышем или проигрышем.

Развитие игры во времени происходит последовательно, по этапам или ходам. *Ходом* в теории игр называют выбор одного из предусмотренных правилами игры действия и его реализацию. Ходы бывают *личные* и *случайные*. Личным ходом называют сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действия и его осуществление. Случайным ходом называют выбор, осуществляемый не волевым решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание монеты, пасовка, сдача карт и т.п.).

Одним из основных понятий теории игр является *стратегия*. Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе этого игрока в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Оптимальной стратегией игрока называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры, содержащей личные и случайные ходы, обеспечивает игроку максимально возможный *средний* выигрыш или минимально возможный средний проигрыш.

В большинстве конфликтных ситуаций при выборе разумной стратегии приходится принимать во внимание не один, а несколько показателей и факторов. Причем стратегия, оптимальная по одному показателю, необязательно будет оптимальной и по другим.

В зависимости от причин, вызывающих неопределенность исходов, игры можно разделить на следующие основные группы:

комбинаторные игры, в которых правила дают в принципе возможность каждому игроку проанализировать все разнообразные варианты своего поведения и, сравнив эти варианты, избрать тот из них, который ведет к наилучшему для этого игрока исходу. Неопределенность исхода связана обычно с тем, что количество возможных вариантов поведения (ходов) слишком велико и практически игрок не в состоянии их всех перебрать и проанализировать;

азартные игры, в которых исход оказывается неопределенным в силу влияния различных случайных факторов. Азартные игры состоят только из случайных ходов, при анализе которых применяется теория вероятностей. Азартными играми теория игр не занимается;

стратегические игры, в которых полная неопределенность исхода вызвана тем, что каждый из игроков, принимая решение о выборе предстоящего хода, не знает, какой стратегии будут придерживаться другие участники игры, причем незнание игрока о поведении и намерениях партнеров носит принципиальный характер, так как отсутствует информация о последующих действиях противника (партнера).

Существуют игры, сочетающие в себе свойства комбинаторных и азартных игр, стратегичность игр может сочетаться с комбинаторностью и т.д.

В игре могут сталкиваться интересы двух или более игроков. Если в игре участвуют два игрока, игра называется парной, если число игроков больше двух — множественной. Участники множественной игры могут образовывать коалиции (постоянные или временные). Множественная игра с двумя постоянными коалициями превращается в парную. Парные игры получили наибольшее распространение в практике анализа игровых ситуаций.

Различают игры и по сумме выигрыша. Игра называется игрой с *нулевой суммой*, если каждый игрок выигрывает за счет других, а сумма выигрыша одной стороны равна проигрышу другой. В парной игре с нулевой суммой интересы игроков прямо противоположны. Парная игра с нулевой суммой называется *антагони-*

стической игрой. Наиболее полно исследованы в теории игр антагонистические игры. Игры, в которых выигрыш одного игрока и проигрыш другого не равны между собой, называются *играми с ненулевой суммой*.

В зависимости от числа возможных стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Игра называется **конечной**, если у каждого игрока имеется только конечное число стратегий. Игра называется **бесконечной**, если хотя бы у одного игрока имеется бесконечное число стратегий.

По количеству ходов, которые делают игроки для достижения своих целей, игры бывают одношаговые и многошаговые. *Одношаговые* игры заключаются в том, что игрок выбирает одну из доступных ему стратегий и делает всего один-единственный ход. В *многошаговых* играх игроки для достижения своих целей делают последовательно ряд ходов, которые могут ограничиваться правилами игры либо могут продолжаться до тех пор, пока у одного из игроков не останется ресурсов для продолжения игры.

В последнее время получили большое распространение так называемые **деловые игры.** Деловая игра имитирует взаимодействие людей и проявляется как упражнение в последовательном принятии множества решений, основанное на некоторой модели коммерческой деятельности и на исполнении участниками игры конкретных ролей-должностей.

Деловые игры предназначены для воспроизведения и согласования коммерческих интересов. В основе конструкции игры лежат взаимосвязь ресурсов и использование знаний об их возможностях. Деловые игры имитируют организационно-экономические взаимодействия в различных звеньях коммерческих организаций и предприятий. Элементами игровой модели являются:

участники игры; правила игры; информационный массив, отражающий состояние и движение ресурсов моделируемой хозяйственной системы. Преимущества игровой имитации перед реальным объектом таковы: наглядность последствий принимаемых решений, переменный масштаб времени; повторение имеющегося опыта с изменением установок; переменный масштаб охвата коммерческих явлений и объектов. Основными направлениями использования деловых игр являются следующие: учебный процесс, например обучение моделированию коммерческих операций; аттестация персонала, проверка их компетентности; научные исследования; разработка бизнес-планов.

В *деловых играх* игрокам обычно задаются начальные условия, в которых они находятся, сообщаются правила проведения игры, представляются варианты возможных решений и оценка их последствий. В игре обязательно присутствует «ведущий», который руководит игрой, оценивает принятые игроками решения, состояния, в которых они могут находиться в процессе игры, и определяет выигрыши и проигрыши по исходам игры.

Приведенный перечень существующих в настоящее время игр далеко не исчерпан. Проведение классификации и группировки игр позволяет для однотипных игр найти общие методы модели поиска альтернатив в принятии решения, выработать рекомендации по наиболее рациональному образу действий в ходе развития конфликтных ситуаций в коммерческой деятельности.

Основными вопросами теории игр, которые возникают в коммерческой деятельности, являются:

1) в чем состоит оптимальность поведения каждого из игроков в игре, какие свойства стратегий следует считать признаками оптимальности;

2) существуют ли стратегии игроков, которые обладали бы атрибутами оптимальности;

3) если существуют оптимальные стратегии, то как их найти?

В силу интереса, перерастающего в азарт, люди вовлекаются в игру, надеясь на удачу, и обычно обращаются к Богу, при этом, вступая в игру, следует иметь в виду афоризм Марти Ларни: «Многие верят в Бога, но немногим верит Бог».

3.2. Постановка игровых задач

Решения, принимаемые в коммерческой деятельности, направлены, как правило, на удовлетворение определенных потребностей населения и связаны обычно с распределением ресурсов предприятия: товаров, денег, людей и т.д.

Рассмотрим систему управления коммерческого предприятия, структуру которого можно представить как орган управления (дирекция) и некоторое количество производственных единиц (товарных секций или отделов).

Каждый отдел реализует некоторый набор товаров. В зависимости от организации и правового положения руководство может иметь те или иные возможности управления работой отделов. Предполагается, что в данном случае наиболее действенной формой управления является оптимальное распределение ресурсов.

Отдел самостоятельно может выбрать программу выполнения товарооборота. Целью коммерческого предприятия является максимизация доходов или минимизация затрат, связанных с продажей товаров.

Сведем данную задачу к игровой модели. Обозначим через n число отделов; m — число различных товарных ресурсов; x_i – вариант выполнения товарооборота, принимаемый i-м отделом, $i = \overline{1, n}$, y_j – вид товарного ресурса, выделяемый коммерческим директором, $j = \overline{1, m}$, a_{ij} – набор товаров, реализуемый i-м отделом при выделении j-го вида товарного ресурса, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, Y – суммарный объем ресурсов, которыми распоряжается коммерческий директор, C – доход или потери, связанные с реализацией товара.

В терминах игровой модели можно дать следующую интерпретацию введенных обозначений: n – число стратегий отдела; m — число состояний среды x_i — i-я стратегия, $i = \overline{1, n}$, y_j – j-е состояние среды, $j = \overline{1, m}$, a_{ij} – исход, получаемый при стратегии x_i, и состояние среды y_j, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

$$a_{ij} = F(x_i, \; y_j).$$

Математическая модель сформулированной задачи имеет следующий вид:

максимизировать (минимизировать) величину

$$C(F(x_1, y_1), F(x_1, y_2), \ldots, F(x_n, y_m)) \to \max(\min)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} y_j = Y, \\ y_j \geq 0. \end{cases}$$

Продажа товаров коммерческим предприятием может быть описана соотношением

$$a_{ij} = F(x_i, y_j, r_i),$$

где r_i – фактор, значение которого хорошо известно руководству i-го товарного отдела, но руководство коммерческого предприятия достаточной информации о нем не имеет.

Это может быть отбраковка товаров, колебания спроса, неравномерность потока покупателей и т.д. Таким образом, выделенный ресурс y_i и выбранная технология работы товарного отдела x_i не дают руководству коммерческого предприятия полной информации о том, какая будет реализована продукция a_{ij} – это знает только i-й отдел. Очевидно, что существует зависимость $x_i = \psi(y_{ij}, r_i)$, в которой есть неопределенные факторы $r_i \in M_i$, конкретные значения которых в момент распределения ресурсов y_i между товарными отделами неизвестны руководству коммерческого предприятия. В этих случаях разумно воспользоваться принципом гарантированного результата, т.е. поставить задачу: найти такое распределение ресурса y_j, чтобы при этом достигался

$$\min_{\Sigma y_i = Y} \max_{r_i \in M_i} C(F_1(y_1, \psi_1(y_1, r_1), r_1), \ldots, F_N(y_N, \psi_N(y_N, r_N), r_N)),$$

следовательно, руководство магазина так распределяет ресурсы, чтобы минимизировать потери при наихудшем возможном значении неопределенного фактора или

$$\max_{\Sigma y_j = Y} \min_{r_i \in M_i} C(F_1(y_1, \psi_1(y_1, r_1), r_1), \ldots, F_N(y_N, \psi_N(y_N, r_N), r_N)),$$

следовательно, руководство коммерческого предприятия так распределяет ресурсы между товарным отделом, чтобы максимизировать доходы при наихудшем возможном значении неопределенного фактора.

Пример 1. Рассмотрим постановку и решение следующей задачи. Коммерческое предприятие заключило договор на централизованную поставку овощей из теплиц на сумму 10 000 руб. ежедневно. Если в течение дня овощи не поступают, магазин имеет убытки в размере 20 000 руб. от невыполнения плана товарооборота. Магазин может осуществить самовывоз овощей фермера. Для этого он может сделать заказ в транспортном предприятии, что вызовет дополнительные расходы в размере 500 руб. Однако опыт показывает, что в половине случаев посланные машины возвращаются без овощей. Можно увеличить вероятность получения овощей от фермера до 80%, если предварительно посылать туда своего представителя, что требует дополнительных расходов в размере 400 руб. Существует возможность заказать дневную норму овощей у другого надежного поставщика — плодоовощной базы по повышенной на 50% цене. Однако в этом случае, кроме расходов на транспорт (500 руб.), возможны дополнительные издержки в размере 300 руб., связанные с трудностями реализации товара, если в тот же день поступит и централизованная поставка от фермера. Какой стратегии надлежит придерживаться магазину, если заранее неизвестно, поступит или не поступит централизованная поставка.

Построим игровую модель этой задачи. Игроками являются представители магазина и поставщика.

Перечислим стратегии первого игрока — поставщика.

$П_1$ – поставка своевременная,

$П_2$ – поставки нет.

У магазина имеются четыре стратегии поведения:

M_1 – ожидать поставку, не принимая дополнительных мер;

M_2 – послать к поставщику свой транспорт;

M_3 – послать к поставщику представителя и транспорт;

M_4 – заказать поставку у плодоовощной базы.

Всего возможны 8 совместных ситуаций, которые представлены в табл. 3.2.1.

Для того чтобы легче было разобраться в сложившихся ситуациях и по возможности оценить их, составляют платежную мат-

Таблица 3.2.1

Затраты магазина, руб.

Ситуации	Стоимость овощей	Убытки от непоставки	Транспортные издержки	Командировочные издержки	Издержки от реализации	Всего за день
1	10 000	0	0	0	0	10 000
2	0	20 000	0	0	0	20 000
3	10 000	0	500	0	0	10 500
4	5 000	10 000	500	0	0	15 500
5	10 000	0	500	400	0	10 900
6	8 000	4 000	500	400	0	12 900
7	25 000	0	500	0	300	25 800
8	15 000	0	500	0	0	15 500

рицу. Матрица имеет m строк — по числу стратегий первого игрока и n столбцов — по числу стратегий второго игрока. На пересечении i-й строки j-го столбца ставится платеж второго игрока первому в ситуации, когда применены i-я и j-я стратегии игроков. Если в данной ситуации выигрывает второй игрок, то платеж будет иметь знак «минус». Платежная матрица данной задачи представлена в табл. 3.2.2.

Таблица 3.2.2

Стратегия магазина	Стратегия фермера	
	$П_1$	$П_2$
$М_1$	–10 000	–20 000
$М_2$	–10 500	–15 500
$М_3$	–10 900	–12 900
$М_4$	–25 800	–15 500

Выбор стратегии магазина зависит от надежности фермера как поставщика продукции, которую можно оценить величиной вероятности p_1. Тогда величина $p_2 = 1 - p_1$ представляет величину ненадежности поставщика. По данным табл. 3.2.2 можно составить уравнения затрат магазина Е от надежности поставщика для каждой стратегии магазина.

$$M_1: E(p_1) = 10\,000\,p_1 + 20\,000\,(1 - p_1);$$
$$M_2: E(p_1) = 10\,500\,p_1 + 15\,500\,(1 - p_1);$$
$$M_3: E(p_1) = 10\,900\,p_1 + 12\,900\,(1 - p_1);$$
$$M_4: E(p_1) = 25\,800\,p_1 + 15\,500\,(1 - p_1).$$

Если своевременная поставка осуществляется с вероятностью 0,4, тогда ожидаемые затраты магазина составят соответственно:

$$M_1: E(0,4) = 10\,000 \cdot 0{,}4 + 20\,000 \cdot 0{,}6 = 16\,000 \text{ руб.};$$
$$M_2: E(0,4) = 10\,500 \cdot 0{,}4 + 15\,500 \cdot 0{,}6 = 13\,500 \text{ руб.};$$
$$M_3: E(0,4) = 10\,900 \cdot 0{,}4 + 12\,900 \cdot 0{,}6 = 12\,100 \text{ руб.};$$
$$M_4: E(0,4) = 15\,800 \cdot 0{,}4 + 15\,500 \cdot 0{,}6 = 19\,620 \text{ руб.}$$

Таким образом, минимальные расходы магазин понесет в том случае, если примет стратегию M_3, т.е. не только пошлет фермеру автотранспорт, но и отправит туда своего представителя.

Пример 2. Формирование платежной матрицы рассмотрим на примере задачи о взаиморасчетах.

Известно, что для того чтобы начать какое-либо дело в торговле по производству продукции или оказанию услуг, необходимы средства, которые могут быть собственными и/или заемными. Предприятие создается с целью получать прибыль (доход) от своей деятельности, а для этого необходимо вложить (инвестировать) капитал в основные средства (в помещение, оборудование и т.п.), в оборотные средства (в материалы, товары и т.п.), в рабочую силу.

В процессе деятельности предприятия происходит изменение средств и источников этих средств, т.е. происходит движение средств и их источников. При этом на любой момент времени (дату) будет выполняться закон «сохранения»: **средства = источникам этих средств.**

Поскольку источники средств подразделяются на два вида, собственные (капитал) и заемные (обязательства), тогда может быть записано уравнение в виде: **средства = капитал + обязательства.**

Обязательства могут иметь различную форму: кредиты банков, акции, облигации, векселя, товары, отданные предприятию на реализацию или на консигнацию (товарный кредит). Все эти юридические или физические лица являются **кредиторами** предприятия и вправе рассчитывать на получение доходов (дивидендов) от совместной деятельности.

Описание деятельности предприятия проводится на языке бухгалтерского учета, понятном всем предпринимателям независимо от области их деятельности: промышленность, строительство, сельское хозяйство, машиностроение, торговля, образование и др.

Бухгалтерский учет позволяет выявить финансовый результат — прибыль предприятия путем подсчета разности доходов и расходов за определенный период.

Предприниматели А, В и С заключили договор для совместного проведения цепочки посреднических операций на май на условиях самостоятельного финансирования своей части. Взаимное переплетение трех вариантов коммерческих операций послужило поводом к образованию взаимозадолженностей, зарегистрированных бухгалтером в хронологическом порядке за май, которые представлены в табл. 3.2.3.

Таблица 3.2.3

Журнал регистрации взаимных задолженностей участников игры А, В, С за май

№ п/п	Дата	Долг		Сумма, у.е.
		к получению	к оплате	
1	6	А	В	1000
2	6	А	В	2000
3	11	А	С	500
4	13	В	А	800
5	17	В	С	400
6	21	С	А	1500
7	26	С	В	700
8	31	В	С	400
Итого		В		7300

Всего вариантов взаимозадолженностей при трех участниках шесть: 1) AB; 2) AC; 3) BA; 4) BC; 5) CA; 6) CB. Просуммируем одноименные варианты, например, E(A, D) = E_1(A, B) + E_2(A, B) = = 1000 + 2000 = 3000 у.е. и т.д., а результаты запишем в сводный журнал взаимных задолженностей.

Таблица 3.2.4

Матрица взаимных задолженностей

№ п/п	Долг		Сумма, у.е.
	к получению	к оплате	
1	A	B	3000
2	A	C	500
3	B	A	800
4	B	C	800
5	C	A	1500
6	C	B	700
Итого			7300

Задача заключается в том, чтобы к концу расчетного периода (в данном случае к концу месяца) произвести окончательные расчеты между участниками игры. Это можно сделать двояким образом: а) произвести все шесть расчетов между участниками в соответствии с данными таблицы по принципу «каждый сам за себя»; б) сделать необходимые расчеты и произвести взаимозачеты долгов. При втором варианте число платежей сократится вдвое, соответственно для расчетов потребуется меньше наличных денег.

При расчетах между клиентами A и B E(A, B) = 3000 – это сумма долга, которую A должен получить от B, а E(B, A) = 800 – сумма к получению B от A. Сальдо ΔE(A, B) = E(A, B) – E(B, A) = = 3000 – 800 = +2200 означает сумму долга, которую A должен получить от B при окончательном расчете.

При расчетах между A и C получим ΔE(A, C) = E(A, C) – E(C, A) = 500 – 1500 = –1000, а этот результат означает прямо противоположное — сумму к оплате задолженности господина A перед господином С, что то же самое, $\Delta E(C, A) = -\Delta E(A, C) = +1000$ представляет собой сумму к получению С долга от А.

И наконец, расчет сальдо $\Delta E(B, C) = E(B, C) - E(C, B) = 800 - 700 = +100$ является заключительным во взаиморасчетах между тремя участниками коммерческой операции.

При этом варианте расчетов следует провести всего три платежа для погашения взаимных задолженностей, для чего потребуется 2200 + 1000 + 100 = 3300 у.е. — меньшая сумма в сравнении с общей суммой 7300.

В общем случае при числе участников m количество возможных (неповторяющихся) корреспонденций равно $m \cdot (n - 1)$, при $m = 10$ число корреспонденций равно $10 \cdot (10 - 1) = 90$. Для систематизации таких расчетов можно записать данные сводного журнала в виде матрицы выигрышей.

Таблица 3.2.5

Матрица выигрышей взаимных задолженностей

Выигрыш – счета к получению	Проигрыш – счета к оплате, у.е.			Итого к получению, у.е.
	A	B	C	
A	0	3000	500	3500
B	800	0	800	1600
C	1500	700	0	2200
Итого к оплате	2300	3700	1300	7300

Таблица 3.2.6

Матрица проигрышей

Проигрыш – счета к оплате	Выигрыш – счета к получению, у.е.			Итого к оплате, у.е.
	A	B	C	
A	0	800	1500	2300
B	3000	0	700	3700
C	500	800	0	1300
Итого к получению	3500	1600	2200	7300

Транспонированная матрица E^T есть матрица ***проигрышей***. Если из матрицы выигрышей E вычесть матрицу E^T, то получим матрицу сальдо окончательных расчетов как разность $\Delta E = E - E^T$.

Таблица 3.2.7

Платежная матрица — сальдо расчетов участников игры на 31 мая

Выигрыш – счета к получению	Проигрыш – счета к оплате			Итого к оплате, у.е.
	A	B	C	
A	0	+2200	–1000	+1200
B	–2200	0	+100	–2100
C	+1000	–100	0	+900
Итого к оплате	–1 200	+2100	–900	0

Полученная таблица ΔE обладает следующими свойствами: а) сумма всех ее элементов равна нулю; б) элементы таблицы зеркально симметричны относительно главной диагонали, т.е. всегда $\Delta E(X, Y) = -\Delta E(Y, X)$ для любых $X, Y =$ A, B, C.

Таблица ΔE, т.е. таблица сальдо окончательных задолженностей и способ ее получения, описанный выше, составляет основу компьютерной технологии бухгалтерского учета.

Используя введенные выше обозначения, можно записать основное уравнение взаимных расчетов для любого количества участников в матричной форме:

$$\Delta E(t) = \Delta E(t-1) + \Delta E(Dt) - \Delta E^T(\Delta t),$$

где $\Delta E(t)$, $\Delta E(t-1)$ – матрицы, в которых со знаком «+» или «–» записаны окончательные сальдо взаимных задолженностей, соответственно на конец t и начало $t - 1$.

Матрица $\Delta E(\Delta t)$ — таблица, в которой записаны суммы выигрышей («счета к получению») за рассматриваемый период, а транспорнированная матрица $\Delta E^T(\Delta t)$ — это таблица, в которой записаны просуммированные за тот же период суммы проигрышей («счета к оплате») тех же участников игры. Причем все матрицы $\Delta E(t)$, $\Delta E(t-1)$, $\Delta E(\Delta t)$, $\Delta E^T(\Delta t)$ квадратные, определяемые числом участников игры.

3.3. Методы и модели решения игровых задач

3.3.1. Принцип минимакса (осторожности)

Рассмотрим конечную парную игру с нулевой суммой. Игрок I имеет m альтернатив ($A_1, A_2, ..., A_m$), а игрок II – n стратегий ($B_1, B_2, ..., B_n$). Такая игра называется игрой размерностью $m \cdot n$. Пусть каждая сторона выбрала определенную стратегию: игрок I – A_i ($i = 1, 2, ..., m$), игрок II – B_j ($j = 1, 2, ..., n$). Если такая таблица составлена, то игра приведена к матричной форме и называется матричной игрой.

Пусть a_{ij} — выигрыш игрока I в ситуации, когда игрок выбрал стратегию A_i, а игрок II выбрал стратегию B_j. Выигрыш игрока II в данной ситуации обозначим через b_{ij}.

Рассматриваем игру с нулевой суммой, следовательно, $a_{ij} = -b_{ij}$ для любых i и j и для проведения анализа достаточно знать выигрыш только одного из игроков.

Если игра состоит только из личных ходов, то выбор стратегии (A_i, B_j) однозначно определяет исход игры, например выигрыш игрока I. Если игра содержит также случайные ходы, то выигрыш при паре стратегий (A_i, B_j) есть величина случайная, зависящая от исходов всех случайных ходов. В этом случае ожидаемый выигрыш – это среднее значение (математическое ожидание). Предположим, что значения a_{ij} известны для каждой пары стратегий (A_i, B_j). Составим таблицу, строки которой соответствуют стратегиям игрока I, а столбцы — стратегиям игрока II. Такая таблица называется платежной матрицей. Каждый элемент ($a_{ij} > 0$) матрицы определяет величину выигрыша игрока I и проигрыш игрока II при применении соответствующих стратегий (A_i, B_j). Цель игрока I – максимизировать свой выигрыш, а игрока II – минимизировать свой проигрыш.

Будем считать, что все $a_{ij} > 0$. Этого всегда можно добиться прибавлением достаточно большого положительного числа ко всем строкам и столбцам матрицы. Такое изменение матрицы не повлияет на результат.

Таким образом, платежная матрица имеет вид:

Таблица 3.3.1

I/II	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	α_2
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	α_i
...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	...	β_j	...	β_n	

Задача состоит в определении:

1) наилучшей (оптимальной) стратегии игрока I из стратегий $A_1, A_2, ..., A_m$;

2) наилучшей (оптимальной) стратегии игрока II из стратегий $B_1, B_2, ..., B_n$.

Для решения задачи применяется принцип, согласно которому участники игры разумны и каждый из них делает все для того, чтобы добиться своей цели – выиграть.

Характерные оценки

Проанализируем последовательно каждую стратегию игрока I. Если игрок I выбирает стратегию A_i, то игрок II может выбрать такую стратегию B_j, при которой выигрыш игрока I будет равен наименьшему из чисел a_{1j}:

$$\alpha_i = \min_j a_{1j}, \tag{3.3.1}$$

т.е. α_1 – минимальное значение из всех чисел первой строки.

Тогда по аналогии справедливо записать выражение для любой стратегии A_i

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}. \tag{3.3.2}$$

Выбирая стратегию A_i, игрок I должен рассчитывать на то, что в результате разумных действий игрока II он не выиграет больше, чем α_i. Поэтому игрок I должен выбрать ту стратегию, для которой это число α_i – максимально

$$\alpha = \max_i \alpha_i, \qquad (3.3.3)$$

т.е. α — максимальное значение из всех чисел столбца α_i ($i = \overline{1, m}$).

Подставив вместо α_i выражение (3.3.3), получим:

$$\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij}. \qquad (3.3.4)$$

Величина α – **гарантированный выигрыш**, который может обеспечить себе игрок I при любом поведении игрока II. Величина α называется **нижней ценой игры**, или **максимином**, а стратегия A_i игрока I, обеспечивающая получение нижней цены игры, называется **максиминной чистой перестраховочной стратегией**, при этом игрок I при любом поведении игрока II обеспечивает себе выигрыш не меньше α:

$$\alpha_i \geq \alpha \ (i = \overline{1, m}).$$

Игрок II заинтересован в том, чтобы уменьшить свой проигрыш, т.е. обратить выигрыш игрока I в минимум. Для выбора оптимальной стратегии он должен найти максимальное значение выигрыша в каждом столбце и среди этих значений выбрать наименьшее. Обозначим через β_j максимальное значение в каждом столбце:

$$\beta_j = \max_i a_{ij}. \qquad (3.3.5)$$

Наименьшее значение β_j обозначим через β:

$$\beta = \min_j \beta_j. \qquad (3.3.6)$$

С учетом (3.3.5) получим:

$$\beta = \min_j \max_i \alpha_{ij}. \qquad (3.3.7)$$

β называется **верхней ценой игры**, или **минимаксом.** Стратегия игрока II, обеспечивающая получение верхней цены игры, называется минимаксной чистой стратегией. Применяя ее, игрок II проиграет не больше β при любых действиях игрока I:

$$\beta_j \leq \beta (j = 1, 2, ..., n).$$

Справедливо неравенство $\alpha \leq \beta$.

Таким образом, придерживаясь максиминной стратегии A_i, игрок I желает получить выигрыш не менее α независимо от действий игрока II, а игрок II, придерживаясь минимаксной стратегии B_j гарантирует себе проигрыш не больше β.

Принцип, диктующий игрокам выбор соответствующих стратегий (максиминной и минимаксной), в теории игр называется принципом минимакса – принцип гарантированного результата. Этот принцип был впервые сформулирован Дж. фон Нейманом в 1928 г.

Существуют матричные игры, для которых нижняя цена игры равна верхней, т.е. $\alpha = \beta$. Такие игры называются **играми с седловой точкой,** в этом случае $\gamma = \alpha = \beta$ называется **чистой ценой игры,** а стратегии игроков A^*_j и B^*_j, позволяющие достичь этого значения, – **оптимальными.** Пара (A^*_i, B^*_j) называется **седловой точкой матрицы,** так как элемент $\alpha^*_{ij} = \gamma$ одновременно является минимальным в i-й строке и максимальным в j-м столбце. Оптимальные стратегии A^*_i и B^*_j и чистая цена являются решением игры в чистых стратегиях, т.е. без привлечения механизма случайного выбора.

При постановке задач необходимо иметь в виду некоторые преобразования, которые помогают упростить сложную задачу путем изменения – уменьшения размерности платежной матрицы посредством выделения и исключения доминирующих и дублирующих стратегий. Стратегия игрока A_i доминирует над стратегией A_k, если при любом поведении противника даст не меньший выигрыш, а если такой же, то дублирует A_k, В таком случае все элементы строки i больше (доминируют) или равны (дублируют) всех элементов строки k.

Пример 1. С учетом вариантов конъюнктуры B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, сложившейся на рынке, и поведения покупателей в микрорайоне города коммерческое предприятие разработало шесть технологий продажи товаров A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Найти оптимальное решение. Возможные варианты среднедневного товарооборота в млн руб. приведены ниже

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0,4	0,9	0,5	0,5	0,6
A_2	0,6	0,5	0,7	0,8	0,9
A_3	0,6	0,3	0,8	0,6	0,7
A_4	0,3	0,8	0,5	0,4	0,3
A_5	0,1	0,3	0,5	0,4	0,3
A_6	0,4	0,8	0,5	0,4	0,5

Стратегия A_1 доминирует над стратегией A_6, а стратегия A_4 доминирует над стратегией A_5, следовательно, исключаем 5-е и 6-е строки матрицы.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0,4	0,9	0,5	0,5	0,6
A_2	0,6	0,5	0,7	0,8	0,9
A_3	0,6	0,3	0,8	0,6	0,7
A_4	0,3	0,8	0,5	0,4	0,3

С позиций проигрышей игрока B стратегии B_3, B_4 и B_5 доминируют над стратегией B_1, поэтому эти столбцы исключаем

	B_1	B_2
A_1	0,4	0,9
A_2	0,6	0,5
A_3	0,6	0,3
A_4	0,3	0,8

С позиций игрока A стратегия A_1 доминирует над стратегией A_4, а стратегия A_2 доминирует над стратегией A_3, поэтому исключим 3-и и 4-е строки и в результате получаем сокращенную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшее облегчение расчетов дает другое эквивалентное преобразование матрицы, при котором не изменяются оптимальные смешанные стратегии игроков $\overline{P}$ и $\overline{Q}$.

Теорема. Если ($\overline{P}$, $\overline{Q}$, γ) – есть решение игры с матрицей A, то решение игры с матрицей kA + b есть ($\overline{P}$, $\overline{Q}$, $k\gamma + b$), где $k > 0$, b – любое действительное число.

На этом основании для рассматриваемой матрицы при $k = 10$ и $b = -3$, применяя указанное преобразование предыдущей матрицы, получим следующую таблицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Этим приемом следует пользоваться в случае наличия в матрице отрицательных элементов и таким образом можно в значительной степени упростить постановку сложной задачи.

Пример 2. Пусть дана платежная матрица. Найти решение игры, т.е. определить нижнюю и верхнюю цены игры и минимаксные стратегии.

I/II	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	5	3	8	2	2
A_2	1	6	4	3	1
A_3	9	5	4	7	4
β_j	9	6	8	7	

$$\alpha_1 = \min_j(5,\ 3,\ 8,\ 2) = 2;$$

$$\alpha_2 = \min_j(1,\ 6,\ 4,\ 3) = 1;$$

$$\alpha_3 = \min_j(9,\ 5,\ 4,\ 7) = 4;$$

$$\beta_1 = \max_i(5,\ 1,\ 9) = 9;$$

$$\beta_2 = \max_i(3,\ 6,\ 5) = 6;$$

$$\beta_3 = \max_i(8,\ 4,\ 4) = 8;$$

$$\beta_4 = \max_i(2,\ 3,\ 7) = 7;$$

$$\alpha = \max_i(2,\ 1,\ 4) = 4;$$

$$\beta = \min_j(9,\ 6,\ 8,\ 7) = 6.$$

Таким образом, нижней цене игры ($\alpha = 4$) соответствует стратегия A_3 игрока I. Выбирая эту стратегию, игрок I достигнет выигрыша не меньше 4 при любом поведении игрока II. Верхней цене игры ($\beta = 6$) соответствует стратегия игрока II – B_2. Эти стратегии являются минимаксными. Если обе стороны будут придерживаться этих стратегий, выигрыш будет равен 5 (a_{33}).

Пример 3. Пусть задана платежная матрица. Найти нижнюю и верхнюю цены игры.

I/II	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	5	1	2	1
A_2	2	6	2	2
A_3	3	4	3	3
β_j	5	6	3	

$\alpha_1 = \min\limits_j(5,\ 1,\ 2) = 1;$ $\beta_1 = \max\limits_i(5,\ 2,\ 3) = 5;$

$\alpha_2 = \min\limits_j(2,\ 6,\ 2) = 2;$ $\beta_2 = \max\limits_i(1,\ 6,\ 4) = 6;$

$\alpha_3 = \min\limits_j(3,\ 4,\ 3) = 3;$ $\beta_3 = \max\limits_i(2,\ 2,\ 3) = 3.$

$\alpha = \max\limits_i(1,\ 2,\ 3) = 3$ – нижняя цена игры,

$\beta = \min\limits_j(5, 6, 3) = 3$ – верхняя цена игры.

Следовательно, $\alpha = \beta = \gamma = 3$, а седловая точка указывает решение на пару альтернатив (A_3, B_3).

3.3.2. Решения игр в смешанных стратегиях

Как мы отмечали выше, если матричная игра содержит седловую точку, то ее решение находится по принципу минимакса. Если же платежная матрица не имеет седловой точки, то применение минимаксных стратегий каждым из игроков показывает, что игрок I обеспечит себе выигрыш не меньше α, а игрок II обеспечит себе проигрыш не больше β. Так как $\alpha < \beta$, то игрок I стремится увеличить выигрыш, а игрок II — уменьшить проигрыш. Если информация о действиях противной стороны будет отсутствовать, то игроки будут многократно **применять чистые стратегии случайным образом** с определенной вероятностью. Такая стратегия в теории игр называется смешанной стратегией. Из сказанного следует, что **смешанная стратегия игрока** — это **полный набор его чистых стратегий** при многократном повторении игры в одних и тех же условиях с заданными вероятностями. Для применения смешанных стратегий требуются следующие условия:

1) в игре отсутствует седловая точка;

2) игроками используется случайная **смесь** чистых стратегий с соответствующими вероятностями;

3) игра многократно **повторяется** в одних и тех же условиях;

4) при каждом из ходов один игрок **не информирован** о выборе стратегии другим игроком.

Основная теорема теории игр Дж. фон Неймана: каждая конечная игра имеет по крайней мере одно оптимальное решение в смешанных стратегиях. Следствие: каждая конечная игра имеет цену, являющуюся математическим ожиданием выигрыша игрока I и проигрыша игрока II, причем выигрыш, соответствующий оптимальному решению, называется ценой игры – γ, удовлетворяющий условию $\alpha \leq \gamma \leq \beta$. Каждый игрок при многократном повторении игры, придерживаясь смешанных стратегий, получает более выгодный для себя результат. Оптимальное решение игры в смешанных стратегиях обладает следующим свойством: каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной смешанной стратегии, если его противник применяет оптимальную смешанную стратегию, так как это ему невыгодно.

Чистые стратегии игроков в их оптимальных смешанных стратегиях называются **активными**. В теории игр доказывается следующая теорема об активных стратегиях.

Теорема. Применение оптимальной смешанной стратегии обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш (или минимальный средний проигрыш), равный цене игры γ, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий.

Смешанные стратегии игроков I и II, применяющих соответственно стратегии A_1, A_2, ..., A_m и B_1, B_2, ..., B_n, обозначим через

$$S_1 = (p_1, p_2, ..., p_m) \text{ и } S_{11} = (q_1, q_2, ..., q_n),$$

где $p_i \geq 0$, $q_j \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$, $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$. $p_1, p_2, ..., p_m$ – вероятности использования первым игроком стратегий A_1, A_2, ..., A_m, q_1, q_2, ..., q_n – вероятности использования вторым игроком стратегий B_1, B_2, ..., B_n.

Смешанную стратегию игрока I – S_1 можно записать как

$$S_{\text{I}} = \begin{pmatrix} A_1, A_2, ..., A_m \\ p_1, p_2, ..., p_m \end{pmatrix}. \qquad (3.3.8)$$

Соответственно для игрока II:

$$S_{\text{II}} = \begin{pmatrix} B_1, B_2, ..., B_m \\ q_1, q_2, ..., q_m \end{pmatrix}. \qquad (3.3.9)$$

Зная платежную матрицу А, можно определить средний выигрыш (математическое ожидание) $M(A, \overline{p}, \overline{q})$:

$$M(A, \overline{p}, \overline{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j, \qquad (3.3.10)$$

где $\overline{p}$ и $\overline{q}$ – векторы с компонентами p_1, p_2, ..., p_m и q_1, q_2, ..., q_n соответственно.

Игрок I, применяя свои смешанные стратегии, стремится увеличить свой средний выигрыш, достигая

$$\alpha = \max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} M(A, \overline{p}, \overline{q}). \qquad (3.3.11)$$

Игрок II добивается:

$$\beta = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} M(A, \bar{p}, \bar{q}). \qquad (3.3.12)$$

Обозначим через p_A^* и q_B^* векторы, соответствующие оптимальным смешанным стратегиям игроков I и II, при которых выполняется равенство:

$$\min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} M(A, \bar{p}, \bar{q}) = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} M(A, \bar{p}, \bar{q}) = M(A, p_A^*, q_B^*). \qquad (3.3.13)$$

При этом выполняется условие

$$M(A, \bar{p}, q_A^*) \le M(A, p_A^*, q_B^*) \le M\ (A, p_A^*, \bar{q}). \qquad (3.3.14)$$

Решить игру — это означает найти цену игры и оптимальные стратегии.

Рассмотрим наиболее простой случай конечных игр 2×2 без седловой точки с матрицами:

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1, A_2 \\ p_1, p_2 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} B_1, B_2 \\ q_1, q_2 \end{pmatrix}, \qquad (3.3.15)$$

т.е. имеется платежная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (3.3.16)$$

Требуется найти оптимальные смешанные стратегии игроков $S_I^* = (p_1^*, p_2^*)$ $(p_1 + p_2 = 1)$, $S_{II}^* = (q_1^*, q_2^*)$ $(q_1 + q_2 = 1)$ и цену игры γ.

Каковы бы ни были действия противника, выигрыш будет равен цене игры γ. Это означает, что если игрок I придерживается своей оптимальной стратегии S_I^* (p_1, p_2), то игроку II нет смысла отступать от своей оптимальной стратегии S_{II}^* (q_1, q_2).

В игре 2×2, не имеющей седловой точки, обе стратегии являются активными.

Для игрока I имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \gamma; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \gamma; \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \tag{3.3.17}$$

Для игрока II аналогично:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{21}q_2 = \gamma; \\ a_{12}q_1 + a_{22}q_2 = \gamma; \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases} \tag{3.3.18}$$

Если $\gamma \neq 0$ и игроки имеют только смешанные оптимальные стратегии, то определитель матрицы не равен нулю, следовательно, системы (3.3.17) и (3.3.18) имеют единственное решение.

Решая системы уравнений (3.3.17) и (3.3.18), находим оптимальные решения $S_{\mathrm{I}}^* = (p_1^*, p_2^*)$, $S_{\mathrm{II}}^* = (q_1^*, q_2^*)$ и γ:

$$\left.\begin{aligned} p_1^* &= \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \\ p_2^* &= \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \\ q_1^* &= \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \\ q_2^* &= \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{aligned}\right\} \tag{3.3.19}$$

$$\gamma = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{3.3.20}$$

Пример. Дана платежная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти решение.

Решение. Так как $\alpha = 3$, $\beta = 5$, то $\alpha \neq \beta$, следовательно, игра не имеет седловой точки, цена игры находится в пределах $3 \le \gamma \le 5$, решение можно найти в смешанных стратегиях. Запишем систему уравнений:

для игрока I –

$$\begin{cases} 6p_1 + 3p_2 = \gamma, \\ -2p_1 + 5p_2 = \gamma, \\ p_1 + p_2 = 1; \end{cases} \tag{3.3.21}$$

для игрока II –

$$\begin{cases} 6q_1 - 2q_2 = \gamma, \\ 3p_1 + 5q_2 = \gamma, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases} \tag{3.3.22}$$

Решая эти системы (3.3.21) и (3.3.22), находим:

$$p_1^* = \frac{1}{5}, \quad p_2^* = \frac{4}{5}, \quad q_1^* = \frac{7}{10}, \quad q_2^* = \frac{3}{10}, \quad \gamma = \frac{18}{5}.$$

Следовательно, оптимальные смешанные стратегии игроков имеют вид:

$$S_{\mathrm{I}}^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), \quad S_{\mathrm{II}}^* = \left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right), \quad \gamma = \frac{18}{5}.$$

3.3.3. Геометрический метод

Решение игры в смешанных стратегиях допускает геометрическую интерпретацию, и, следовательно, решение задачи можно показать графически. Геометрический метод решения игры включает следующие этапы.

1. В декартовой системе координат по оси абсцисс откладывается отрезок, длина которого равна 1. Левый конец отрезка (точка $x = 0$) соответствует стратегии A_1, правый — стратегии A_2

($x = 1{,}0$). Промежуточные точки x соответствуют вероятностям некоторых смешанных стратегий $S_1 = (p_1, p_2)$.

2. На левой оси ординат откладываются выигрыши стратегии A_1.

3. На линии, параллельной оси ординат, из точки 1 откладываются выигрыши стратегии A_2 (рис. 3.3.1).

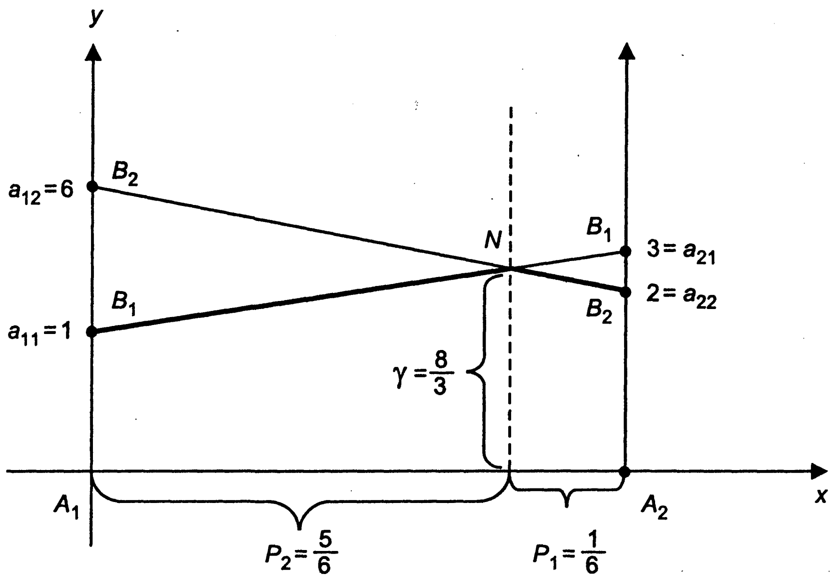


Рис 3.3.1. Геометрический метод решения игры (2×2)

Пусть имеется игра с платежной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Если игрок II применяет стратегию B_1, то выигрыш игрока I при использовании чистых стратегий A_1 и A_2 составляет соответственно a_{11} и a_{21}. Соединим эти точки прямой B_1B_1 (рис. 3.3.1).

Если игрок I при стратегии B_1 применяет смешанную стратегию $S_1 = (p_1, p_2)$, то средний выигрыш, равный $a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \gamma$, изображается точкой N на прямой B_1B_1, абсцисса этой точки равна p_2. Прямая B_1B_1 называется стратегией игрока B_1. Ордината любой точки отрезка B_1B_1 равна величине выигрыша игрока I при применении им стратегии A_1 и A_2 с соответствующими вероятностями p_1 и p_2.

На том же графике откладываются точки a_{12} на оси ординат и a_{22} на параллельной прямой точки 1 (см. рис. 3.3.1). B_2B_2 соответствует стратегии игрока II — B_2. Точка пересечения B_1B_1 и B_2B_2 определяет цену игры γ. Ординаты точек отрезка B_2B_2 равны среднему числу стратегий A_1 и A_2 с вероятностями p_1 и p_2.

Ломаная B_1NB_2 – это нижняя граница выигрыша, получаемая игроком I. В точке N он максимален и составляет γ.

Пример 1. Найти оптимальную смешанную стратегию руководителя коммерческого предприятия и гарантированный средний выигрыш γ при выборе из двух новых технологий продажи товаров A_1, и A_2, если известны выигрыши каждого вида продажи по сравнению со старой технологией, которые представлены в виде матрицы:

Таблица 3.3.2

Игрок II / Игрок I	B_1	B_2	α_i	α
A_1	1	6	1	
A_2	3	2	2	2
β_j	3	6		

Решение. Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры $\alpha = \max(\alpha_1; \alpha_2) = \max(1; 2) = 2$, которая указывает на максиминную чистую стратегию A_2. Верхняя цена игры $\beta = \min(\beta_1; \beta_2) = \min(3; 6) = 3$, что свидетельствует об отсутствии седловой точки, так как $\alpha \neq \beta$, тогда цена игры находится в пределах $2 \leq \gamma \leq 3$. Находим решение игры в смешанных стратегиях геометрическим методом (см. рис. 3.3.1).

Точка N пересечения прямых B_1B_2 и B_2B_2 – это точка максимина, ордината которой является ценой игры γ, которую можно определить из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \gamma = a_{12} + (a_{22} - a_{12}) \times p_2 \\ \gamma = a_{11} + (a_{21} - a_{11}) \times p_2 \end{cases} \Rightarrow p_2 = \frac{5}{6}, \quad p_1 = \frac{1}{6}, \quad \gamma = \frac{8}{3}.$$

Оптимальная смешанная стратегия и цена игры равны:

$$S_1^* = \left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6} \right) \quad \gamma = \frac{8}{3}.$$

Гарантированный средний выигрыш составляет $2\frac{2}{3}$.

Пример 2. Найти оптимальное решение **игры** ($2 \times n$), заданной в виде следующей платежной матрицы.

	B_1	B_2	B_3
A_1	6	8	1
A_2	3	0	4

Решение проводим с позиций игрока А, придерживающегося максиминной стратегии. Доминирующих и дублирующих стратегий ни у одного из игроков нет. На оси абсцисс строим отрезок единичной длины (рис.3.3.2.), из концов которых на осях ординат откладываем выигрыши игрока А, соответствующие различным сочетаниям стратегии игроков А и В.

Максиминной оптимальной стратегии игрока А соответствует точка N, лежащая на пересечении прямых B_2B_2 и B_3B_3. для которых можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \gamma = a_{12} + (a_{22} - a_{12})p_2 \\ \gamma = a_{13} + (a_{23} - a_{13})p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 8 + (0 - 8)p_2 \\ \gamma = 1 + (1 - 1)p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} p_1^* = 4/11 \\ p_2^* = 7/11 \end{matrix} \quad \gamma = 32/11.$$

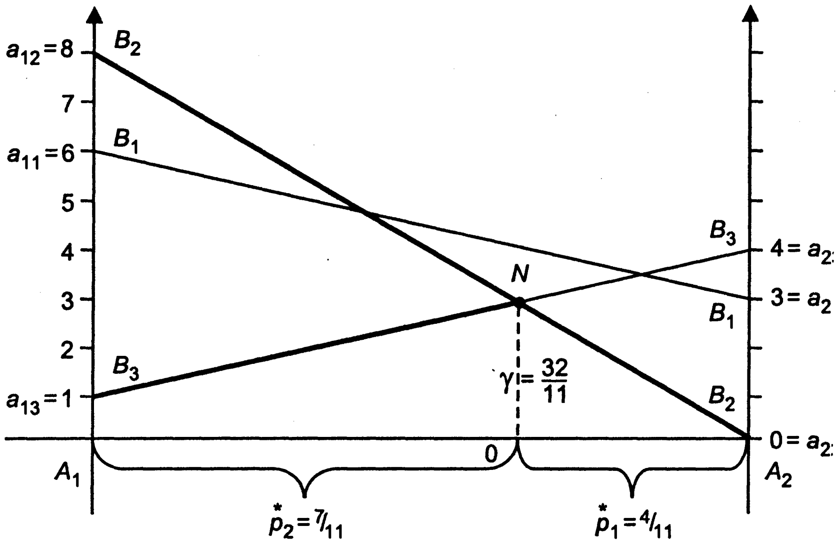


Рис. 3.3.2. Графическое решение игры (2×3)

Теперь можно найти минимаксную стратегию игрока В, записав соответствующую систему уравнений, исключив стратегию B_1, которая дает явно больший проигрыш игроку В, и, следовательно, $q_1 = 0$:

$$\begin{cases} \gamma = 8q_2 + q_3 \\ \gamma = 4q_3 \\ q_2 + q_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4q_3 = 32/11 \\ q_2 = 1 - q_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} q_3^* = 8/11 \\ q_2^* = 3/11. \end{matrix}$$

Таким образом, получено решение игры в смешанных стратегиях:

$$(4/11;\ 7/11);\ (0;\ 3/11;\ 8/11)\ \ \gamma = 32/11.$$

Пример 3. Найти оптимальное решение игры ($m \times 2$), заданной в виде следующей платежной матрицы:

	B_1	B_2
A_1	7	2
A_2	2	3
A_3	0	5
A_4	–1	8

Решение ведется с позиций минимаксной стратегии игрока B. Доминирующих или дублирующих стратегий ни у одного из игроков нет. На оси абсцисс (рис.3.3.3) строим отрезок единичной длины, точки которой соответствуют различным стратегиям игрока B. На осях ординат откладываем проигрыши игрока B, соответствующие каждой стратегии игрока A.

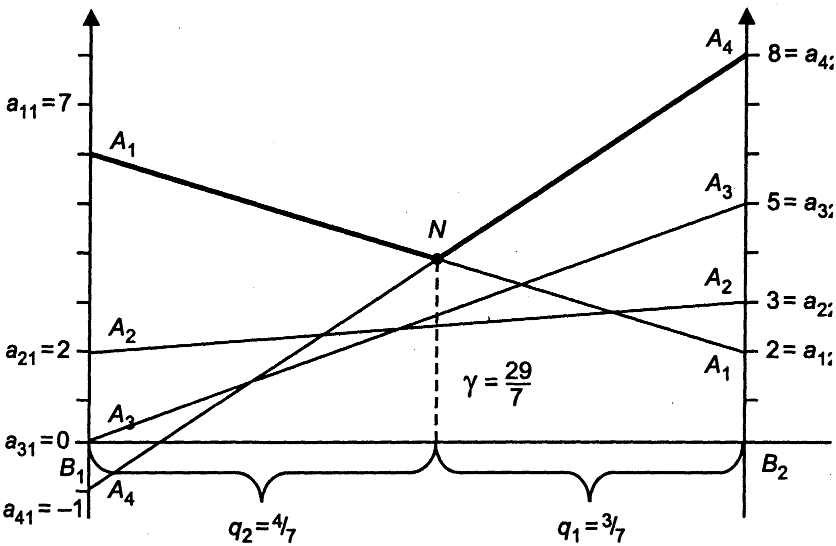


Рис. 3.3.3. Графическое решение игры (4×2)

Граничная ломаная выделяется сверху, что соответствует минимаксной стратегии игрока B. Точка N на ломаной A_1 и A_4 соответствует минимаксному проигрышу игрока B при осторожной тактике и определяется на пересечении отрезков A_1A_1 и A_4A_4, для которых можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \gamma = a_{11} + (a_{12} - a_{11})q_2 \\ \gamma = a_{41} + (a_{42} - a_{41})q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 7 + (2-7)q_2 \\ \gamma = -1 + (8+11)q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} q_1^* = 3/7 \\ q_2^* = 4/7 \end{matrix} \quad \gamma = 29/7.$$

Смешанная стратегия игрока А включает только стратегии A_1 и A_4, для которых можно записать систему:

$$\begin{cases} \gamma = 7p_1 - p_4 \\ \gamma = 2p_1 + 8p_4 \\ p_1 + p_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7p_1 - p_4 = 29/7 \\ 2p_1 + 8p_4 = 29/7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} p_1^* = 9/14 & p_3 = 0 \\ p_2 = 0 & p_4^* = 5/14. \end{matrix}$$

Таким образом получено следующее решение игры в смешанных стратегиях:

$$(9/14;\ 0;\ 0;\ 5/14);\ (3/7;\ 4/7)\ \gamma = 29/7.$$

3.3.4. Метод линейного программирования

Антагонистическую матричную игру $m \times n$ (где $m \geq 3$, $n \geq 3$), не содержащую седловой точки, можно свести к паре двойственных задач линейного программирования. Рассмотрим игру $m \times n$, заданную платежной матрицей А:

$$\begin{array}{c} \\ \\ A_1(p_1) \\ A_2(p_2) \\ \\ A_m(p_m) \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_1 & \dots & B_n \\ (q_1) & (q_2) & \dots & (q_n) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & nm \end{pmatrix}. \end{array} \qquad (3.3.23)$$

Решение такой игры может быть получено в соответствии с теоремой Неймана в смешанных стратегиях.

Эквивалентными преобразованиями можно привести все элементы матрицы к неотрицательным величинам $a_{ij} \geq 0$, тогда $\gamma > 0$, а игра решается в смешанных стратегиях:

$$S_{\mathrm{I}}^* = \begin{pmatrix} A_1, & A_2, & \ldots, & A_m \\ p_1, & p_2, & \ldots, & p_m \end{pmatrix}, \quad S_{\mathrm{II}}^* = \begin{pmatrix} B_1, & B_2, & \ldots, & B_n \\ q_1, & q_2, & \ldots, & q_n \end{pmatrix}. \qquad (3.3.24)$$

Применение игроком I оптимальной смешанной стратегии S_{I}^* гарантирует ему средний выигрыш не меньше цены игры, т.е. $\gamma_i \geq \gamma$ независимо от поведения игрока II. Игрок II, применяя оптимальную смешанную стратегию S_{II}^*, гарантирует для себя минимальный проигрыш не больше γ, т.е. $\gamma_j \leq \gamma$.

Если игрок II применяет свою чистую стратегию B_j, а игрок I – свою оптимальную стратегию S_{I}^*, то средний выигрыш игрока I равен:

$$\gamma_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \ldots + a_{ij}p_i + \ldots + a_{mj}p_m \quad j = \overline{1, n} \qquad (3.3.25)$$

Если игрок I применяет свою чистую стратегию A_i, а игрок II – свою оптимальную смешанную стратегию S_{II}^* то средний выигрыш игрока II составит

$$\gamma_i = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \ldots + a_{in}q_n, \; i = \overline{1, m}.$$

Учитывая, что γ_j не может быть меньше γ для игрока I, а γ_i не может быть больше γ для игрока II, двойственную задачу линейного программирования можно записать следующим образом:

1) для игрока I –

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \geq \gamma \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (\gamma > 0) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1 \end{cases} \qquad (3.3.26)$$

2) для игрока II –

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}q_j \le \gamma \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (\gamma > 0) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1. \end{cases} \tag{3.3.27}$$

Смысл этих систем уравнений заключается в следующем: игрок I стремится увеличить цену игры ($\gamma \to \max$), т.е. он действует так, чтобы его средний выигрыш при использовании его стратегий с вероятностями p_i для любой j-й стратегии игрока II был не меньше величины γ, которую он стремится увеличить. Игрок II стремится уменьшить свой проигрыш ($\gamma \to \min$), т.е. он действует так, чтобы его средний проигрыш при использовании его стратегий с вероятностями q_j при любой i-й стратегии игрока I не превышал величину γ, которую он стремится уменьшить.

Задача состоит в нахождении двух оптимальных смешанных стратегий $S_{\mathrm{I}}^* = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ и $S_{\mathrm{II}}^* = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, которые дают для игрока I максимально возможный для него средний выигрыш, а для игрока II минимально возможный для него средний проигрыш.

Разделив левую и правую части неравенств (3.3.26) и (3.3.27) на цену игры $\gamma > 0$, получим:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{p_i}{\gamma} \ge 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \tag{3.3.28}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{q_j}{\gamma} \le 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{3.3.29}$$

Введем обозначения:

$$x_i = \frac{p_i}{\gamma} \quad (x_i \ge 0), \tag{3.3.30}$$

$$y_i = \frac{q_j}{\gamma} \quad (y_j \ge 0). \tag{3.3.31}$$

Тогда неравенства (3.3.28) и (3.3.29) примут следующий вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1 \quad (j = 1, 2, ..., n), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1. \end{cases} \tag{3.3.32}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, ..., m), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1. \end{cases} \tag{3.3.33}$$

Из равенств $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$ и выражений (3.3.30) и (3.3.31) следует, что переменные x_i и y_j должны удовлетворять условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{\gamma}, \tag{3.3.34}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{\gamma}. \tag{3.3.35}$$

Учитывая, что игрок I стремится максимизировать γ, а игрок II стремится минимизировать γ, переменные x_i и y_j должны быть выбраны так, чтобы целевая функция $F(\overline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i$ достигала минимума, а целевая функция $\Phi(\overline{Y}) = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j$ – максимума.

Таким образом, решение игры сводится к задаче линейного программирования. Оптимальные стратегии $S_I^* = (p_1, p_2, ..., p_m)$ и $S_{II}^* = (q_1, q_2, ..., q_n)$ игры с платежной матрицей A могут быть найдены путем решения симметричной пары двойственных задач линейного программирования:

$$F(\overline{X})=\sum_{i=1}^{m}x_i\to\min,$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i\ge 1\quad(i=1,2,\dots,n).\tag{3.3.36}$$

$$\Phi(Y)=\sum_{j=1}^{n}y_j\to\max,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\le 1\quad(j=1,2,\dots,m).\tag{3.3.37}$$

Решая их, находим значения x_i, y_j, цену игры γ и, следовательно, оптимальные стратегии $S_{\mathrm{I}}^* = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ и $S_{\mathrm{II}}^* = (q_1, q_2, \dots, q_n)$.

$$\gamma=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}x_i}\quad\text{или}\quad\gamma=\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}y_j},\tag{3.3.38}$$

$$p_i=\frac{x_i}{\sum_{i=1}^{m}x_i}\quad(i=1,2,\dots,m),\tag{3.3.39}$$

$$q_j=\frac{y_j}{\sum_{j=1}^{n}y_j}\quad(j=1,2,\dots,n).\tag{3.3.40}$$

Задача. Найти решение конфликтной ситуации с платежной матрицей:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&1\\1&3&1\end{pmatrix}.\tag{3.3.41}$$

Решение. Математические модели пары двойственных задач линейного программирования можно записать так:

найти минимум функции $F(\overline{X}) = x_1 + x_2 + x_3$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ x_i \ge 0 \quad i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases} \tag{3.3.42}$$

Найти максимум функции $\Phi(\overline{Y}) = y_1 + y_2 + y_3$ при ограничениях:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 \le 1, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \le 1, \\ y_1 + 3y_2 + y_3 \le 1, \\ y_j \ge 0 \quad j = 1,\ 2,\ 3. \end{cases} \tag{3.3.43}$$

Симплексный метод позволяет найти решение этой системы неравенств (табл. 3.3.3).

$$y_1 = \frac{2}{9};\ \ y_2 = \frac{2}{9};\ \ y_3 = \frac{1}{9};\ \ \Phi(\overline{X}) = \frac{5}{9}.$$

Тогда цена игры $\gamma = 1 : \sum_{j=1}^{3} y_j = 1 : \frac{5}{9} = \frac{9}{5}$, а вероятности применения стратегий игрока II будут: $q_1 = \gamma \cdot y_1 = \frac{9}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{5}$, $q_2 = \gamma \cdot y_2 = \frac{2}{5}$, $q_3 = \gamma \cdot y_3 = \frac{1}{5}$.

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока II

$$S_{\text{II}}^* = \left(\frac{2}{5};\ \frac{2}{5};\ \frac{1}{5}\right).$$

Поскольку решение системы неравенств (3.3.43) симплексным методом дает также и решение (табл. 3.3.3) двойственной задачи, то можно записать:

$$x_1 = \frac{2}{9};\; x_2 = \frac{2}{9};\; x_3 = \frac{1}{9};\; F(X) = \frac{5}{9},\; \gamma = \frac{9}{5},$$

тогда находим также и вероятности применения стратегий игрока I:

$$p_1 = \gamma x_1 = \frac{2}{5};\; p_2 = \gamma x_2 = \frac{2}{5};\; p_3 = \gamma x_3 = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока I

$$S_{\mathrm{I}}^* = \left(\frac{2}{5};\; \frac{2}{5};\; \frac{1}{5}\right).$$

Таблица 3.3.3

Базисные переменные		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	min
y_4	1	1	2	3	1	0	0	1
y_5	1	3	1	1	0	1	0	1/3
y_6	1	1	3	1	0	0	1	1
$\phi(\overline{Y})$	0	–1	–1	–1	0	0	0	
y_4	2/3	0	5/3	8/3	1	–1/3	0	2/5
y_1	1/3	1	1/3	1/3	0	1/3	0	1
y_6	2/3	0	8/3	2/3	0	–1/3	1	1/4
$\phi(\overline{Y})$	1/3	0	–2/3	–2/3	0	1/3	0	
y_4	1/4	0	0	9/4	1	–1/8	–5/8	1/9
y_1	1/4	1	0	1/4	0	3/8	–1/8	1
y_2	1/4	0	1	1/4	0	–1/8	3/8	1
$\phi(\overline{Y})$	1/2	0	0	–1/2	0	1/4	1/4	
y_3	1/9	0	0	1	4/9	–1/18	–5/18	
y_1	2/9	1	0	0	–1/9	7/18	–1/18	
y_2	2/9	0	1	0	–1/9	–1/9	4/9	
$\phi(\overline{Y})$	5/9	0	0	0	2/9	2/9	1/9	
		x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3	

3.3.5. Игровые модели в условиях коммерческого риска

Риск определяется возможностью отклонения от желаемого результата в худшую сторону или выхода за пределы допустимого диапазона, что приводит к негативным последствиям.

Для принятия решений в условиях риска используют методы теории вероятностей, если это возможно, по причине массовости явления. В таком случае факторы, например, состояния среды представляют собой либо случайные величины, либо случайные функции. Они описываются какими-либо статистическими характеристиками, например математическим ожиданием и дисперсией, и обладают статистической устойчивостью. Принимающий решение ориентируется на средние, наиболее вероятные результаты, например дохода, однако при этом не исключен риск получения не того результата, на который была рассчитана коммерческая стратегия, тогда мерой риска следует считать среднее квадратическое отклонение.

Тогда путем сравнения на плоскости соответствующих каждому решению, например, среднего ожидаемого дохода q_i и риска r_i можно выбрать доминирующее решение. Однако если появляются несравнимые пары q_i, r_i, и, следовательно, недоминирующие решения, то образуется множество оптимальностей по Парето, среди которого и следует искать лучшее или компромиссное решение.

Ситуации, в которых риск связан не с сознательным противодействием противоположной стороны (среды), а с недостаточной осведомленностью о ее поведении или состоянии лица, принимающего решение, называются «играми с природой».

В таких играх человек старается действовать осмотрительно, например, используя стратегию, позволяющую получить наименьший проигрыш. Второй игрок (природа) действует незлонамеренно, совершенно случайно, возможные стратегии его известны (стратегии природы). Такие ситуации исследуются с помощью теории статистических решений.

Рассмотрим «игру с природой» в условиях частичной неопределенности. Пусть у игрока I имеется m возможных стратегий

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ и можно сделать n предположений о состояниях природы (среды) $П_1, П_2, \ldots, П_n$ с известными вероятностями их появления p_j. Пусть известен выигрыш a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, который получает игрок I при выборе стратегии A_i для каждого состояния природы $П_j$.

Тогда можно составить платежную матрицу А следующего вида:

Таблица 3.3.4

	$П_1$	$П_2$	...	$П_j$	...	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

В этом случае $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j = 1$ и можно найти величину математического ожидания выигрыша для каждой стратегии A_i:

$$M_i = \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij}.$$

Оптимальной будет считаться та стратегия, для которой эта величина принимает максимальное значение $M^* = \max\limits_{j} M_i$.

При этом следует заметить, что оптимизация в среднем не исключает полностью влияние фактора случайности.

Пример. Для доставки свежих фруктов из Кишинева в Москву можно использовать три вида транспорта: T_1 – воздушный, T_2 – автомобильный, T_3 – железнодорожный. Ожидаемые величины дохода a_{ij}, с учетом затрат на транспортировку, погрузочно-разгрузочные работы и сроков доставки фруктов и потерь и вместе с условными вероятностями их получения p_{ij} представлены в виде матрицы в табл. 3.3.5.

Таблица 3.3.5

	a_{i1}	p_{i1}	a_{i2}	p_{i2}	a_{i3}	p_{i3}
T_1	300	0,6	200	0,3	–300	0,1
T_2	450	0,2	300	0,7	–200	0,1
T_3	600	0,1	450	0,8	–100	0,1
β_j	600		450		–100	

Для выбора наиболее оптимального варианта доставки свежих фруктов сначала находим для каждого вида транспорта математическое ожидание выигрыша:

$$M(T_1) = 300 \cdot 0{,}6 + 200 \cdot 0{,}3 + (-300) \cdot 0{,}1 = 210,$$
$$M(T_2) = 450 \cdot 0{,}2 + 300 \cdot 0{,}7 + (-200) \cdot 0{,}1 = 280,$$
$$M(T_3) = 600 \cdot 0{,}1 + 450 \cdot 0{,}8 + (-100) \cdot 0{,}1 = 410,$$

а затем определяем максимальное значение этого показателя, которое и указывает на оптимальное решение:

$$\max_i M(T_i) = M(T_3) = 410,$$

следовательно, наиболее выгодно доставлять свежие фрукты в Москву из Кишинева железнодорожным транспортом.

При исследовании «игры с природой» вводится показатель, позволяющий оценить, насколько то или иное состояние «природы» влияет на исход. Этот показатель называется риском.

При пользовании стратегией A_i и состоянием среды $П_j$ разность между максимально возможным выигрышем β_j при данном состоянии «природы» $П_j$ и выигрышем a_{ij} при выбранной стратегии A_i называется риском r_{ij}:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij},$$

где $\beta_j = \max_i a_{ij}$, т.е. максимальное число в столбце состояния среды $П_j$. Очевидно, что риск всегда положительное число, т.е. $r_{ij} \geq 0$.

Пользуясь этими положениями, найдем для задачи (табл. 3.3.5) все значения β_j и построим матрицу рисков R (табл. 3.3.6).

Таблица 3.3.6

	r_{i1}	p_{i1}	r_{i1}	p_{i1}	r_{i1}	p_{i1}	$\overline{r}_i$
T_1	300	0,6	250	0,3	200	0,1	275
T_2	150	0,2	150	0,7	100	0,1	145
T_3	0	0,1	0	0,8	0	0,1	0

Для решения задачи можно пользоваться значениями среднего риска:

$$\overline{r}_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_{ij}.$$

Оптимальным в этом случае будет та стратегия, для которой средний риск будет минимальным

$$\overline{r}^* = \min_i \overline{r}_i.$$

В связи с этим для каждого решения находим средний риск:

$$\overline{r}_1 = 300 \cdot 0{,}6 + 250 \cdot 0{,}3 + 200 \cdot 0{,}1 = 275,$$
$$\overline{r}_2 = 150 \cdot 0{,}2 + 150 \cdot 0{,}7 + 100 \cdot 0{,}1 = 145,$$
$$\overline{r}_3 = 0 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}8 + 0 \cdot 0{,}1 = 0,$$

который следует стремиться сделать минимальным, т.е. выбрать такую стратегию T_k, для которой величина $\overline{r}_k$ минимальна:

$$\overline{r}_k = \min_i \overline{r}_i = \min_i (275,\ 145,\ 0) = 0 \to T_3,$$

следовательно, наиболее целесообразно доставлять свежие фрукты из Кишинева в Москву железнодорожным транспортом.

Заметим, что максимум среднего выигрыша и минимум среднего риска достигается при выборе одной и той же стратегии, в данном случае T_3.

Мы рассмотрели вариант выбора только одной вполне определенной стратегии, которая называется чистой. В коммерческой практике встречаются такие ситуации, в которых выгоднее применять или случайное чередование чистых стратегий, что увеличивает размер гарантированного выигрыша, или одновременное использование всех стратегий с некоторыми вероятностями. В таких играх необходимо найти оптимальную смешанную стратегию $S^*(p_1, p_2, ..., p_n)$ и найти цену игры при известной платежной матрице.

Предположим, что на предприятии оптовой торговли имеется n-типов товаров какой-либо товарной группы. В магазин необходимо завести $Q = 1000$ ед. всего ассортиментного набора данной группы товара. Требуется определить объемы товаров каждого типа, которые целесообразно завести в магазин, и гарантированный уровень дохода. При этом известно, что если товар типа j $(1 \leq j \leq n)$ будет пользоваться спросом, то магазин от его реализации получит прибыль d_j, в противном случае издержки, связанные с его хранением, порчей и т.п., составят убыток c_j. Моделью такого экономического конфликта является игра, в которой в качестве одной стороны выступает магазин (игрок М), а в качестве другой — «природа» — спрос населения, причем он неизвестен. Каждая из сторон имеет по n-стратегий: $М_i$ – стратегия игрока М по завозу i-го товара объемом Q_i; а $П_j$ – стратегии игрока П — спрос на j-й товар. Полезностью магазина, очевидно, будет его доход Д. В таком случае конечная игра задается матрицей выигрышей (табл. 3.3.7).

Таблица 3.3.7

	$П_1$	$П_2$	...	$П_j$	...	$П_n$
$М_1$	d_1	$-c_1$	...	$-c_1$	...	$-c_1$
$М_2$	$-c_2$	d_2	...	$-c_2$	...	$-c_2$
...	...	...	...	...	...	...
$М_i$	$-c_i$	$-c_i$	...	$-c_i$	...	$-c_i$
...	...	...	...	...	...	...
$М_n$	$-c_n$	$-c_n$	...	$-c_n$	...	d_n

Допустим, что доходы от продажи по каждому виду товаров равны, т.е. $d_1 = d_2 = ... = d_n = d$. Для упрощения матрицы вычтем из всех ее элементов число d, что не изменит множество оптимальных смешанных стратегий, а только значение игры уменьшится на d, в результате чего $(-c_i - d) = -h_i$ матрица выигрышей примет другой вид:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & -h_1 & \dots & -h_1 & \dots & -h_1 \\ -h_2 & 0 & \dots & -h_2 & \dots & -h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -h_n & -h_n & \dots & -h_n & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения задачи воспользуемся данными табл. 3.3.8.

Таблица 3.3.8

Показатели	Тип товара				
	1	2	3	4	5
Доход от реализации усл. ед., d_j	32	32	32	32	32
Издержки, усл. ед., c_j	16	8	4	4	2

С учетом этих данных матрица выигрышей будет иметь следующий вид:

$$H = \begin{pmatrix} 32 & -16 & -16 & -16 & -16 \\ -8 & 32 & -8 & -8 & -8 \\ -4 & -4 & 32 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & 32 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 32 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем эту матрицу путем вычитания из каждого элемента $d = 32$ к виду:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & -48 & -48 & -48 & -48 \\ -40 & 0 & -40 & -40 & -40 \\ -36 & -36 & 0 & -36 & -36 \\ -36 & -36 & -36 & 0 & -36 \\ -34 & -34 & -34 & -34 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим при неизвестном спросе рентабельность завоза товаров рассматриваемой группы, для чего необходимо проверить выполнение следующего неравенства:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{c_j + d} - (n-1) > 0.$$

Поскольку в нашем случае это условие

$$\frac{32}{16+32} + \frac{32}{8+32} + \frac{32}{4+32} + \frac{32}{4+32} + \frac{32}{2+32} - (5-1) > 0$$

выполняется, то товар завозить в магазин целесообразно.

Очевидно, правильная торговая политика наблюдается при использовании смешанной стратегии $S_M = (p_1, p_2, p_3, ..., p_i, ..., p_n)$, где вероятности p_i показывают доли от всего объема $Q = 1000$ ед. каждого типа товаров, которые следует завозить в магазин, и определяются по формуле

$$p_i = \frac{1}{h_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{-h_i}}, \quad 1 \le i \le n.$$

Например, для стратегии M_3 находим:

$$p_3 = \frac{1}{h_3 \sum_{j=1}^{n=5} \frac{1}{-h_i}} = \frac{1}{-36 \cdot \left(\frac{1}{-48} + \frac{1}{-40} + \frac{1}{-36} + \frac{1}{-36} + \frac{1}{-34} \right)} = 0{,}21.$$

Аналогично определяем остальные доли завозимых объемов товаров, после чего записываем оптимальную смешанную стратегию:

$$S_M = (0{,}16;\ 0{,}19;\ 0{,}21;\ 0{,}21;\ 0{,}23),$$

согласно которой следует завозить в магазин товаров по каждому типу соответственно в следующих объемах:

$$Q_1 = 160 \text{ ед.},\ Q_2 = 190 \text{ ед.},\ Q_3 = Q_4 = 210 \text{ ед.},\ Q_5 = 230 \text{ ед.}$$

В этом варианте снабжения товарами доход магазина будет равен значению игры, которое определяется по формуле

$$Д = \frac{n-1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{c_i + d}\right)} + d = -30{,}6 + 32 = 1{,}4 \text{ усл. ед.}$$

При использовании смешанной стратегии, т.е. завоза товаров разного типа, доход гарантируется лишь в среднем, является ожидаемым и не может совпадать точно с реальным выигрышем, что и является характерным в условиях риска.

3.3.6. Игровые модели в условиях полной коммерческой неопределенности

Рассмотрим игру с природой mn. У одного сознательного игрока имеется m стратегий $А_1, А_2, ..., А_m$, у другого – возможно n состояний «слепой силы природы» $П_1, П_2, ..., П_n$. Известен выигрыш (исход) игрока по каждой его стратегии и каждому состоянию природы a_{ij}, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Но, к сожалению, ничего нельзя предположить, с какими вероятностями природа принимает эти состояния. Другими словами, ничего конкретного нельзя сказать о состояниях среды, в которой протекает коммерческий процесс. В этом случае решение будет приниматься в уникальных условиях полной коммерческой неопределенности.

Запишем платежную матрицу и матрицу рисков задачи «игры с природой».

Таблица 3.3.9

	$П_1$	...	$П_j$	...	$П_n$
$А_1$	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...
$А_i$	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...
$А_m$	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Таблица 3.3.10

	$П_1$	...	$П_j$	...	$П_n$
A_1	r_{11}	...	r_{1j}	...	r_{1n}
...	...	...	...	...	...
A_i	r_{i1}	...	r_{ij}	...	r_{in}
...	...	...	...	...	...
A_m	r_{m1}	...	r_{mj}	...	r_{mn}

Где $r_{ij} = \max\limits_i a_{ij} - a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Рассмотрим варианты определения наилучшей стратегии в условиях неопределенности на следующих примерах.

Пример 1. В Северном округе Москвы планируется строительство овощехранилища. Имеются три возможных проекта создания такого хранилища площадью S_1 = 200 кв. м, S_2 = 300 кв. м и S_3 = 400 кв. м. В зависимости от эффективности использования выделенных площадей рассчитаны варианты ежегодного дохода b_{ij} (тыс. руб.), которые представлены в виде платежной табл. 3.3.11.

Таблица 3.3.11

S_i	Доход от занимаемой площади				$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$	W	$\max\limits_j a_{ij}$
	100	200	300	400			
$S_1 = 200$ м^2	130	350	350	350	130	130	350
$S_2 = 300$ м^2	60	410	520	520	60		520
$S_3 = 400$ м^2	−140	290	560	670	−140		670
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	130	410	560	670			

Надо определить наиболее целесообразный вариант строительства овощехранилища.

Анализ игры начнем с позиций принципа минимакса. Он основан на том предположении, что принимающий решение действует осторожно и избирает чистую стратегию, гарантирующую ему наибольший (максимальный) из всех наихудших (минимальных) возможных исходов действия по каждой стратегии. В этом случае, если мы изберем стратегию S_1, то наихудшее из того, что может случиться, состоит в том, что мы получим чистую выгоду в размере

$$\alpha_1 = \min_j a_{ij} = \min_j (130,\ 350,\ 350,\ 350) = 130.$$

Аналогично находим для остальных стратегий наихудшие исходы и записываем их в табл. 3.3.11. Это уровни безопасности каждой стратегии, поскольку можно быть уверенным, что ничего более худшего не произойдет. Лучшим решением $S_{опт}$ будет такое, которое гарантирует наилучший из множества наихудших исходов и определяется в соответствии с изложенным принципом по формуле

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j \alpha_{ij} = 130 \to S_1.$$

Такая стратегия S_1 является максиминной, поскольку чтобы не произошло, т.е. при любом состоянии среды, результат не может быть хуже, чем α. Это нижняя цена игры. В силу этого принцип максимина называют также принципом наибольшего гарантированного результата. Максиминная оценка является единственно абсолютно надежной при принятии решения в условиях неопределенности. Этот принцип является основой критерия Вальда, в соответствии с которым оптимальной стратегией при любом состоянии среды, позволяющем получить максимальный выигрыш в наихудших условиях, является максиминная стратегия, определяемая выражением

$$W = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j \alpha_{ij} \to S_W.$$

Следует заметить, что при наличии возможности получения дополнительной информации в игре каким-либо образом, можно повысить гарантированный уровень выигрыша.

Теперь проведем аналогичные рассуждения для второй стороны — состояний среды. Если нам известно точно состояние среды — в данном случае величина занимаемой площади, то мы выберем решение S_i, максимизирующее наш выигрыш:

$$\beta_j = \max_i a_{ij}.$$

Очевидно, учитывая все возможное, худший для нас вариант будет определяться выражением

$$\beta = \max_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Это верхняя цена игры, или минимакс, а соответствующая стратегия – минимаксная. В соответствии с этим вторая сторона «природы» даст возможность нам выиграть не больше, чем β.

Составим теперь матрицу рисков для представленной игры (табл. 3.3.12).

Таблица 3.3.12

r_{ij}	100	200	300	400	max r_i	S
S_1	0	60	210	320	320	
S_2	70	0	40	150	150	
S_3	270	120	0	0	270	150

Риск является основой минимаксного критерия Сэвиджа, согласно которому выбирается такая стратегия S_S, при которой величина риска принимает минимальное значение в самой неблагоприятной ситуации:

$$S = \min_i \max_j r_{ij} \to S_S.$$

Сущность этого критерия состоит в том, чтобы избежать большого риска при выборе решения. В соответствии с этим критерием (табл. 3.3.12) следует построить овощехранилище площадью S_2 = 300 кв. м.

При анализе «игры с природой» разумнее придерживаться некоторой промежуточной позиции, граница которой регулируется показателем пессимизма-оптимизма χ в критерии Гурвица. В соответствии с этим компромиссным критерием для каждого решения определяется линейная комбинация минимального и максимального выигрыша

$$G_i = \chi \min_j a_{ij} + (1-\chi) \max_j a_{ij}$$

и затем выбирается та стратегия S_i, для которой эта величина окажется наибольшей:

$$G = \max_i G_i = \max_i \left[\chi \min_j a_{ij} + (1-\chi) \max_j a_{ij} \right].$$

Коэффициент χ называют еще и степенью оптимизма. Его значения находятся в диапазоне $0 \leq \chi \leq 1$, при $\chi = 1$ он превращается в критерий Вальда, а при $\chi = 0$ получают критерий «крайнего оптимизма», выбирающий стратегию «ва-банк», которой соответствует самый больший выигрыш. Допустим, в примере табл. 3.3.11 мы придерживаемся ближе к пессимистической оценке и полагаем, что $\chi = 0{,}8$, тогда для каждой стратегии получим соответственно:

$$G_1 = 0{,}8 \cdot 130 + (1 - 0{,}8) \cdot 350 = 174;$$
$$G_2 = 0{,}8 \cdot 60 + (1 - 0{,}8) \cdot 520 = 152;$$
$$G_3 = 0{,}8 \cdot (-140) + (1 - 0{,}8) \cdot 670 = 22.$$

В соответствии с критерием Гурвица наиболее целесообразный вариант строительства овощехранилища определяется следующим образом:

$$G = \max_i G_i = \max_i (174,\ 152,\ 22) = 174 \rightarrow S_1.$$

Следовательно, наиболее целесообразным вариантом является строительство овощехранилища площадью $S_1 = 200$ кв. м.

Таким образом, приведенные методы и модели позволяют с разных сторон провести анализ хозяйственных решений торговли в условиях неопределенности.

Пример 2. Магазин имеет некоторый запас товаров ассортиментного минимума. Если запас товаров недостаточен, то необходимо завести его с базы; если запас превышает спрос, то магазин несет расходы по хранению нереализованного товара. Пусть спрос на товары лежит в пределах S = 5–8 единиц, расходы по хранению одной единицы товара составляют c = 0,1 руб., а расходы по завозу единицы товара $k = 0{,}2$ руб. Определить оптимальную стратегию магазина по завозу товаров. Составим платежную матрицу. Игроком является магазин, а «природой» — спрос на товары.

Элементы платежной матрицы определяют следующим образом. Если магазин имеет 5 единиц товара и спрос равен S = 5, то магазин расходов не несет и элемент $\alpha_{11} = 0$.

Если магазин имеет 6 единиц товара, а спрос равен S = 5, то магазин может продать 5 единиц товара, а одну единицу должен хранить, неся при этом расходы, которые определяются элементом $\alpha_{21} = -0{,}1$.

Если магазин имеет 5 единиц товара, а спрос равен S = 6, то магазину необходимо завести одну единицу товара, расходуя на это сумму, равную k. Следовательно, элемент $\alpha_{12} = -0{,}2$. Проведя аналогичные рассуждения, можно получить значения всех элементов платежной матрицы:

Таблица 3.3.13

a_{ij}	5	6	7	8
5	0	–0,2	–0,4	–0,6
6	–0,1	0	–0,2	–0,4
7	–0,2	–0,1	0	–0,2
8	–0,3	–0,2	–0,1	0

Определим оптимальную стратегию по максиминному критерию Вальда:

$$W = \max_i \min_j \alpha_{ij}.$$

Для этого по каждой строке найдем минимальные значения элементов матрицы $\alpha_i = \min_j \alpha_{ij}$. Так как элементами являются расходы магазина, взятые с противоположным знаком, то, следовательно, минимальный выигрыш будет соответствовать минимальному числу.

Тогда $\alpha_1 = -0{,}6$; $\alpha_2 = -0{,}4$; $\alpha_3 = -0{,}2$; $\alpha_4 = -0{,}3$, из которых по критерию Вальда находим максимальное значение:

$$W = \max_i \alpha_i = \alpha_3 = -0{,}2.$$

Следовательно, оптимальная стратегия магазина заключается в поставке 7 единиц товара, что позволит ему обеспечить минимум издержек в самой неблагоприятной ситуации.

Определим оптимальную стратегию по минимаксному критерию Сэвиджа:

$$S = \min_i \max_j r_{ij}.$$

Матрица рисков строится следующим образом. По каждой строке (так как оптимальная стратегия находится для магазина, т.е. игрока А) находится элемент с максимальным значением $\beta_j = \max_i \alpha_{ij}$. Каждый элемент в i-й строке находится как разность $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$. Следовательно, матрица рисков будет выглядеть следующим образом:

Таблица 3.3.14

r_{ij}	5	6	7	8
5	0	0,2	0,4	0,6
6	0,1	0	0,2	0,4
7	0,2	0,1	0	0,2
8	0,3	0,2	0,1	0

Согласно минимаксному критерию находим максимальное значение риска по каждой строке: 0,6; 0,4; 0,2; 0,3.

Минимаксное значение риска $r = 0{,}2$. Следовательно, минимаксная стратегия магазина заключается в поставке 7 единиц товара, что позволяет ему гарантировать минимальный риск в самой неблагоприятной ситуации.

Таким образом, используя методы и модели принятия решений в условиях неопределенности, можно проводить количественный анализ сложных ситуаций, возникающих в коммерческой практике, учитывать разнообразные социально-экономические факторы, влияющие на деятельность торговых предприятий, и принимать обоснованные, близкие к оптимальным решения по управлению.

3.4. Игровые модели конфликтов

Теория игр представляет собой набор математических инструментов для построения моделей, а в социально-экономических приложениях является неиссякаемым источником гибких концепций.

Игра является математической моделью коллективного поведения, отображающей взаимодействие участников-игроков в стремлении добиться лучшего исхода, причем их интересы могут быть различны. Несовпадение, антагонизм интересов порождают конфликт, а совпадение интересов приводит к кооперации. Часто интересы в социально-экономических ситуациях не являются ни строго антагонистическими, ни точно совпадающими. Продавец и покупатель согласны, что в их общих интересах договориться о продаже, конечно, при условии, что сделка выгодна обоим. Однако они энергично торгуются при выборе конкретной цены в пределах, определяющихся условиями взаимной выгоды. Теория игр позволяет выработать оптимальные правила поведения в конфликтах.

Возможность конфликтов заложена в существе самой человеческой жизни. Причины конфликтов коренятся в аномалиях общественной жизни и *несовершенстве* самого человека. Среди причин, порождающих конфликты, следует назвать прежде всего социально-экономические, политические и нравственные причины. Они являются питательной средой для возникновения различного рода конфликтов. На возникновение конфликтов оказывают влияние психофизические и биологические особенности людей.

Во всех сферах человеческой деятельности при решении самых разнообразных задач в быту, на работе или отдыхе приходится наблюдать различные по своему содержанию и силе проявления конфликты. Об этом ежедневно пишут газеты, передают по радио, транслирует телевидение. Они занимают значительное место в жизни каждого человека, причем последствия некоторых конфликтов бывают слишком ощутимы даже на протяжении многих лет жизни. Они могут съедать жизненную энергию одного человека или группы людей в течение нескольких дней, недель, месяцев или даже лет. Бывает так, правда редко, к сожалению, что разрешение одних конфликтов проходит весьма корректно и профессионально грамотно, а других, что бывает значительно чаще, непрофессионально, безграмотно, с плохими исходами иногда для всех участников конфликта, где нет победителей, а есть только побежденные. Очевидно, необходимы рекомендации по рациональному образу действий в конфликтных ситуациях.

Причем чаще часть конфликтов являются надуманными, искусственно раздутыми, созданными для прикрытия профессиональной некомпетентности некоторыми лицами и вредны в коммерческой деятельности.

Другие же конфликты, являясь неизбежным спутником жизни любого коллектива, могут быть весьма полезны и служат импульсом для развития коммерческой деятельности в лучшую сторону.

Конфликты в настоящее время являются ключевой проблемой жизни как отдельных личностей, так и целых коллективов.

Действия литературных персонажей, героев неизбежно сопровождаются проявлением, развитием какого-либо жизненного конфликта, который так или иначе разрешается иногда мирно, иногда драматически или трагически, например на дуэли. Лучшими источниками наших знаний о человеческих конфликтах являются классические трагедии, серьезные и глубокие романы, их экранизация или театральная постановка.

Деятельности человека могут противостоять в конфликте интересы других людей или стихийные силы природы. В одних конфликтах противоположной стороной выступает сознательно и целенаправленно действующий активный противник, заинтересованный в нашем поражении, сознательно препятствует успеху, старается сделать все от него зависящее, чтобы добиться своей победы любыми средствами, например с помощью киллера.

В других конфликтах такого сознательного противника нет, а действуют лишь «слепые силы природы»: погодные условия, состояние торгового оборудования на предприятии, болезни сотрудников и т.п. В таких случаях природа не злонамеренна и выступает пассивно, причем иногда во вред человеку, а иногда к его выгоде, однако ее состояние и проявление могут ощутимо влиять на результат коммерческой деятельности.

Движущей силой в конфликте является любопытство человека, стремление **победить, сохранить** или **улучшить** свое положение, например безопасность, устойчивость в коллективе или надежда на успех достижения поставленной в явном или неявном виде цели.

Как поступить в той или иной ситуации, часто бывает неясно.

Характерной особенностью любого конфликта является то, что ни одна из участвующих сторон не знает заранее точно и полностью всех своих возможных решений, а также и другие стороны, их будущее поведение и, следовательно, каждый вынужден действовать в условиях неопределенности.

Неопределенность исхода может быть обусловлена как сознательными действиями активных противников, так и несознательными, пассивными проявлениями, например стихийных сил природы: дождя, солнца, ветра, лавины и т.п. В таких случаях исключается возможность точного предсказания исхода.

Общность всех конфликтов независимо от их природы заключается в столкновении интересов, стремлений, целей, путей достижения целей, отсутствия согласия двух или более сторон — участников конфликта. Сложность конфликтов обусловливается разумными и расчетливыми действиями отдельных лиц или коллективов с различными интересами.

Неопределенность исхода конфликта, любопытство, интерес и стремление к победе побуждают людей к сознательному вступлению в конфликт, что притягивает к конфликтам и участников, и наблюдателей.

Математическая теория игр дает научно обоснованные рекомендации поведения в конфликтных ситуациях, показывая «как играть, чтобы не проиграть». Для применения этой теории необходимо уметь представлять конфликты в виде игр.

Основой любого конфликта является наличие **противоречия,** которое принимает форму разногласий. Конфликт можно определить как отсутствие согласия между двумя или более сторонами — лицами или группами, проявляющееся при попытке разрешить противоречие, причем часто на фоне острых отрицательных эмоциональных переживаний, хотя известно, что из двух ссорящихся виновный тот, кто умнее.

Следует заметить, что вовлечение в конфликт в коммерческой деятельности большого количества людей позволяет резко увеличить и обнаружить множество **альтернатив** и **исходов**, что является важной позитивной функцией конфликта, связанной с расширением кругозора, увеличением количества альтернатив и соответственно возможных исходов.

В процессе коммерческих переговоров приходится искать область взаимных интересов (рис. 3.4.1), позволяющую найти компромиссное решение. Делая большие уступки по менее значимым аспектам для фирмы, но более значимым для оппонента, коммерсант получает больше по другим позициям, которые более значимы и выгодны для фирмы. Эти уступки имеют минимальные и максимальные границы интересов. Это условие получило название «принцип Парето» по имени итальянского ученого В. Парето.

Одним из типичных социально-психологических межличностных конфликтов является несбалансированное ролевое взаимодействие. Теоретическую основу анализа межличностных конфликтов предложил американский психолог Э. Берн, который дал описание взаимодействия партнеров (рис. 3.4.2) в виде сетевых моделей.

Каждый человек в процессе взаимодействия с окружающими вынужден играть более десятка ролей, причем далеко не всегда успешно. В предлагаемой модели каждый партнер может имитировать роль С – старшего, Р – равного или М – младшего. Если

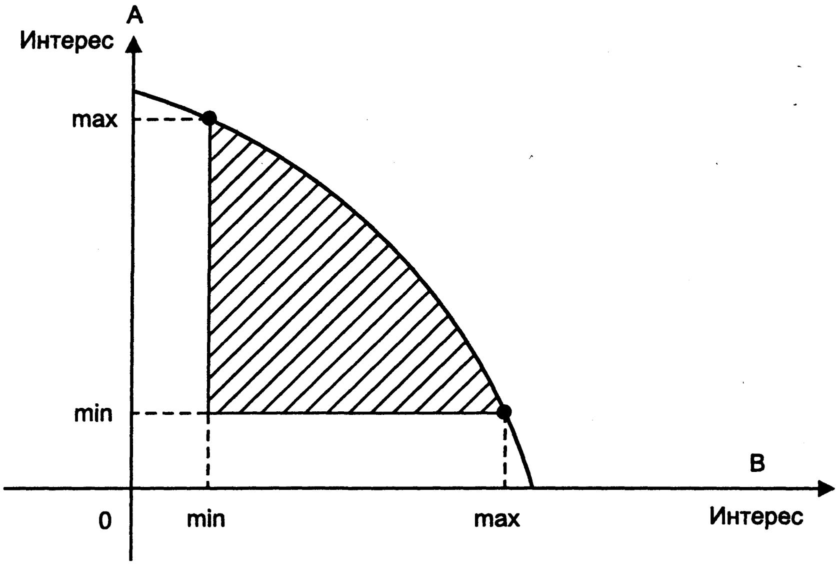


Рис. 3.4.1. Область вариантов компромиссных решений на переговорах

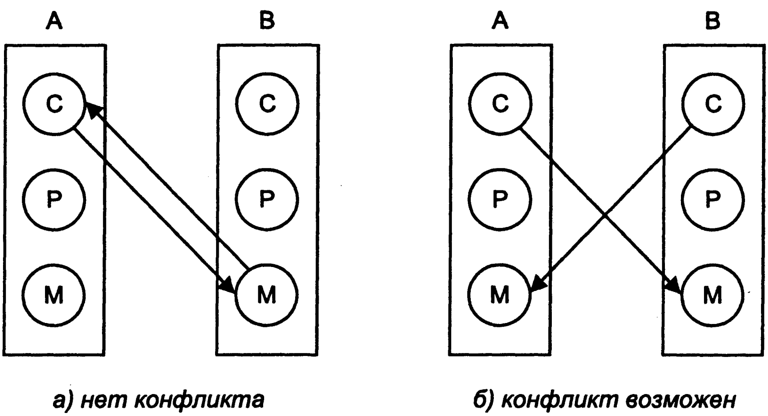


Рис. 3.4.2. Сетевые модели ролевого взаимодействия партнеров

ролевое взаимодействие сбалансировано, то общение может развиваться бесконфликтно, иначе при разбалансе ролей возможен конфликт.

В длительных конфликтах часто доля делового содержания с течением времени уменьшается и начинает доминировать личностная сфера, что и представлено на рис. 3.4.3.

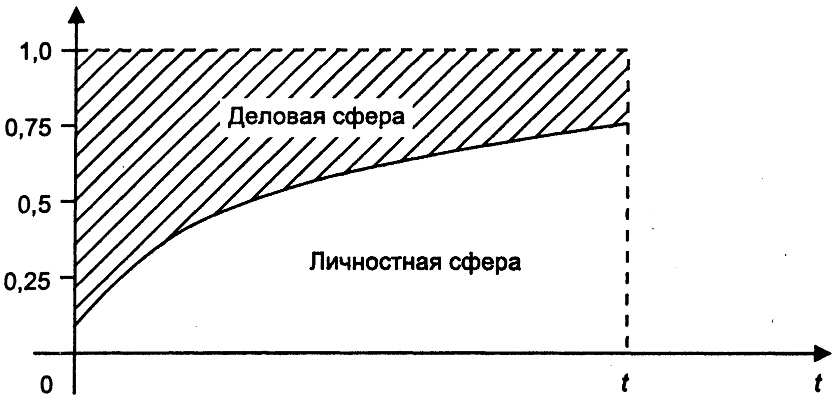


Рис. 3.4.3. Изменение соотношения деловой и личностной составляющих сфер конфликта

Конфликт представляет собой процесс, развивающийся во времени (рис. 3.4.4), который можно разделить на несколько периодов. Таковыми, например, могут быть предконфликтный период (t_n), конфликтное взаимодействие (t_k) и послеконфликтный период (t_c).

Напряженность с течением времени в предконфликтный период ($t_0 - t_1$) постепенно (1) или лавинообразно (2) нарастает, а затем достигает наибольшего значения в момент кульминации t_2 и затем спадает. Следует заметить, что зачастую конфликтное взаимодействие имеет продолжительность ($t_3 - t_1$) всего около 1 мин, а послеконфликтный период может быть больше его в 600–2000 и более раз. Причем показатели исхода конфликта для обеих сторон могут совсем не содержать выигрышных показателей, т.е. одни ущербы.

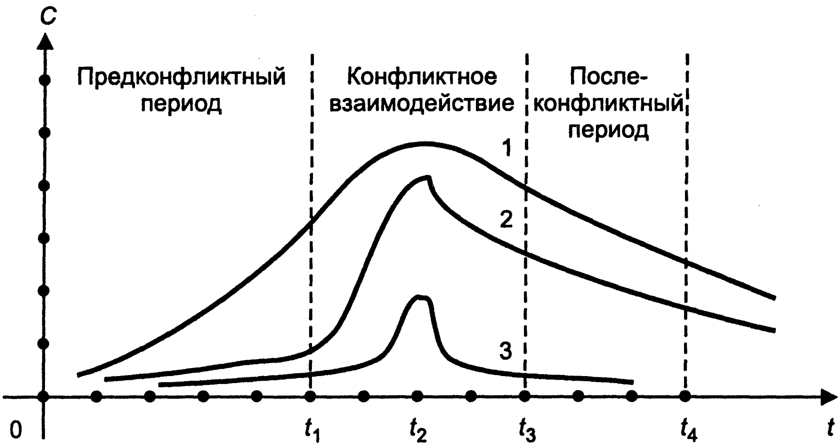


Рис. 3.4.4. Динамические модели развития конфликтов

Состояние человека во взаимодействии можно интерпретировать графически в виде сочетания степени его активности А и уровня настроения (рис. 3.4.5).

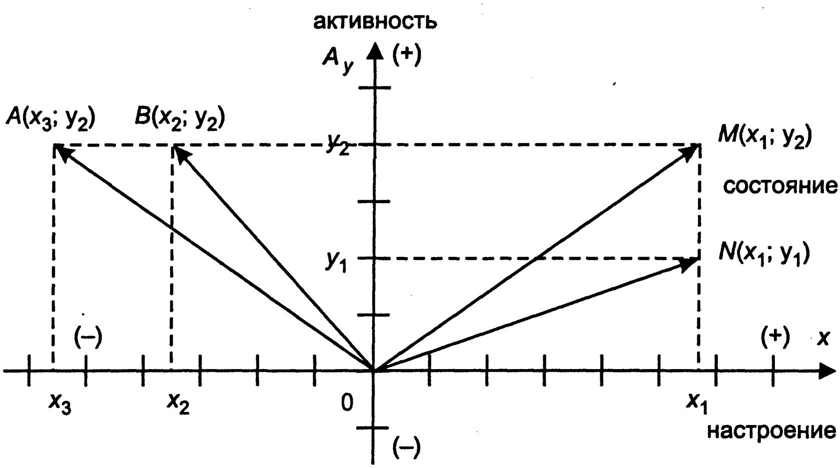


Рис. 3.4.5. Графическая модель оценки состояния партнера

Измерение этих показателей можно производить от среднего, нейтрального (0) уровня. Тогда точка состояния определяется вектором с соответствующими координатами, например $M(x_1, y_2)$. Состояние, определяемое другим вектором $N(x_1, y_1)$, отличается меньшей активностью $\Delta y = (y_2 - y_1)$. Состояние партнера, определяемое вектором $A(x_3, y_2)$, отличается более скверным настроением, чем состояние, определяемое вектором $B(x_2, y_2)$.

На рис. 3.4.6 представлена модель взаимодействия партнеров, состояния которых зафиксированы векторами А и В, по которым можно построить результирующий конфликт-вектор Е. Эта зона готовности к конфликту из всех квадрантов является самой неблагоприятной. Пользуясь такими графическими моделями оценки состояния партнеров, можно заранее подготовиться к возможным исходам их взаимодействия.

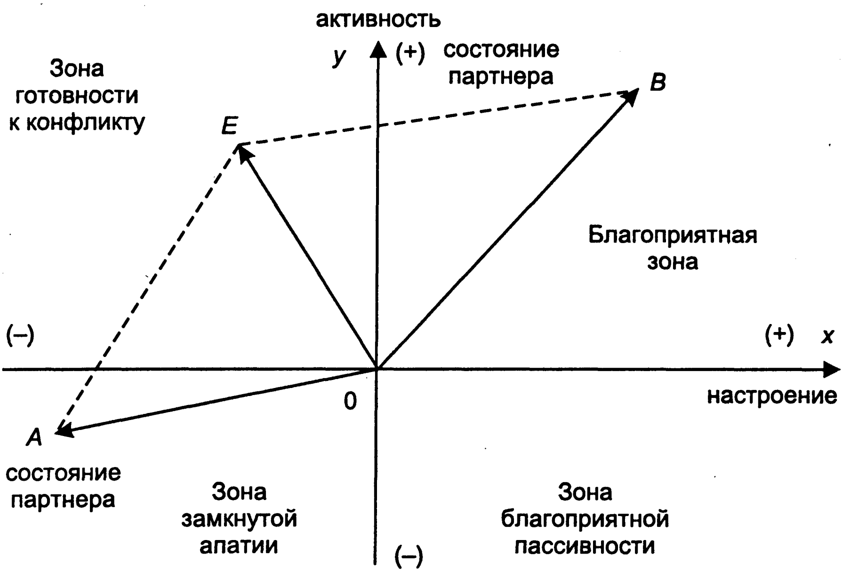


Рис. 3.4.6. Модель взаимодействия партнеров

Игровую модель конфликта можно представить как сочетание отображения (рис. 3.4.7) возможных позитивных и негативных альтернатив (ходов) участников-игроков К и П и вариантов исходов для каждой пары ходов К, П в виде платежной матрицы $B = \|b_{ij}\|$, элемент которой можно определить по формуле

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} M_k \cdot Б_k(P_{ij}),$$

где $Б_k(P_{ij})$ и M_k – соответственно оценка характеристики исхода конфликта в баллах и ее вес, $k = \overline{1, m}$.

На рис. 3.4.7 показано, что действия обеих сторон негативными альтернативами (–/–) свидетельствуют о том, что с помощью «войн» понять друг друга нельзя. Позитивные действия с обеих

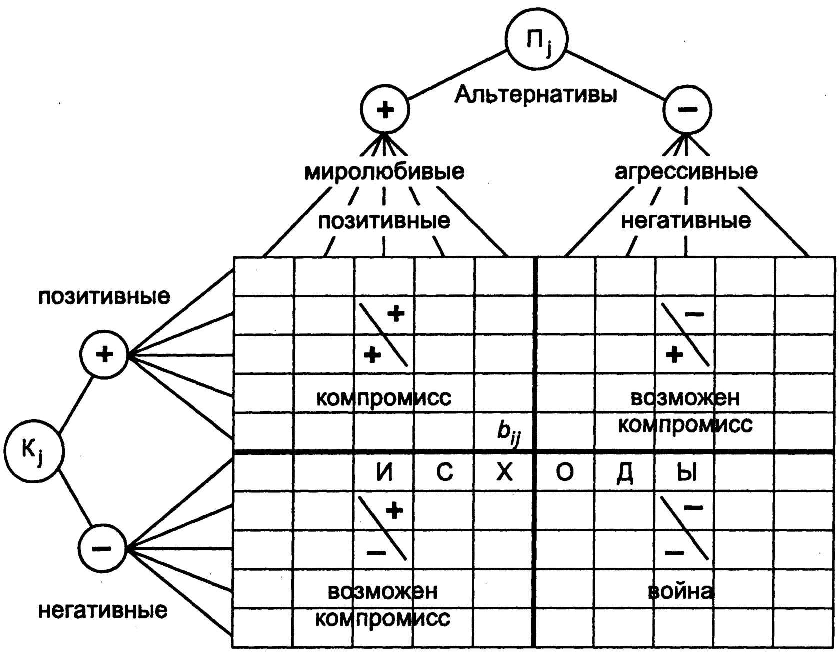


Рис. 3.4.7. Игровая модель конфликта

сторон приводят к мирному исходу. Варианты альтернатив (–/+) или (+/–) могут привести к мирному варианту согласия, что определяется цепочкой причинно-следственных альтернатив в многоходовом взаимодействии.

Пример. Рассмотрим пример решения конфликтной ситуации.

Рынок. Женщина заплатила за 2кг помидоров, а контрольные весы показали недовес 200 г. Она попросила продавца забрать помидоры и вернуть деньги. Продавец отказал и оскорбил покупательницу.

Альтернативы покупательницы: $П_1$ – вызвать администрацию, $П_2$ – обратиться в правоохранительные органы, $П_3$ – оскорбить продавца и потребовать вернуть деньги.

Альтернативы продавца: $К_1$ – вернуть деньги, $К_2$ – оскорбить покупательницу и не вернуть деньги, $К_3$ – не вернуть деньги.

В качестве характеристик оценки исходов конфликта выберем следующие.

1. Э – сила эмоционального возбуждения, дб. (0,19);
2. t_k – время конфликтного взаимодействия, мин (0,17);
3. τ – продолжительность негативных эмоций, мин (0,15);
4. $О_с$ – количество обидных, грубых слов, шт. (0,13);
5. $Л_к$ – количество участников конфликта, чел. (0,11);
6. $t_{сп}$ – послеконфликтный период, мин (0,09);
7. Т – суммарные затраты времени, мин (0,07);
8. $З_м$ – затраты материальные, руб. (0,05);
9. t_n – предконфликтный период, мин (0,03);
10. τ_+ – продолжительность позитивных и нейтральных эмоций, мин (0,01).

Характеристики расположены по рангу, в скобках указан их вес M_k, найденный методом парных сравнений (п. 1.3).

Введем 10-балльную оценку характеристик конфликта по шкале хуже ($Б_к$ = 1) – лучше ($Б_к$ = 10) и сформируем матрицу их возможных значений табл. (3.4.1).

Теперь необходимо для каждой пары альтернатив ($П_i$, $К_j$) установить фактические значения характеристик конфликта $Р_{ij}$,

Таблица 3.4.1

$Б_к$ / P_{ij}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Э	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
t_k	10	8	7	6	5	4	3	2	1	0
τ	400	300	200	160	100	80	60	40	20	0
$О_с$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	0
$Л_к$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	0
$t_{сп}$	400	300	200	150	100	80	60	40	20	0
Т	410	310	210	160	110	90	70	50	30	0
$З_м$	1500	1000	500	300	200	100	60	30	6	0
t_n	30	25	20	15	10	8	6	4	2	0
τ_+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	∞

определить балльную оценку характеристик $Б_k$ (P_{ij}), а затем вычислить значения исходов b_{ij} по формуле

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} M_k \cdot Б_k(P_{ij}),$$

где m – количество характеристик конфликта;
M_k – вес k-й характеристики конфликта;
$Б_k\,(P_{ij})$ – балльное значение k-й характеристики конфликта исхода пары альтернатив P_i, K_j.

Например, для пары альтернатив $П_1$, $К_1$ и условных значениях характеристик найдем значение исхода b_{11}:

$$b_{11} = 0{,}19 \cdot 5 + 0{,}17 \cdot 1 + 0{,}15 \cdot 3 + 0{,}13 \cdot 1 + 0{,}11 \cdot 5 + 0{,}09 \cdot 3 + 0{,}07 \cdot 3 + 0{,}05 \cdot 9 + 0{,}03 \cdot 9 + 0{,}01 \cdot 1 = 3{,}23.$$

Аналогично проводим вычисления исходов b_{ij} для остальных пар альтернатив и таким образом построим игровую модель конфликтной ситуации в виде платежной матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} 3{,}23 & 5{,}05 & 3{,}66 \\ 3{,}09 & 4{,}54 & 3{,}48 \\ 3{,}07 & 8{,}5 & 3{,}8 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь принципом минимакса, находим нижнюю и верхнюю цены игры, которые равны $\alpha = \beta = 3{,}23$, тогда пара альтернатив $П_1$, $К_1$ определяют седловую точку игры. Следовательно, минимаксные стратегии участников конфликта $П_1$ и $К_1$ являются оптимальными.

Фактически покупательница так и сделала: вызвала администратора, который изъял гири у продавца, запретил торговлю, а продавец принял назад помидоры и вернул деньги.

Следует заметить, что при других значениях показателей конфликта может быть построена матрица, которая не содержит седловой точки, тогда можно пользоваться критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица, а также воспользоваться симплексным методом линейного программирования для решения игры в смешанных стратегиях.

3.5. Деловые игры

3.5.1. Постановка деловой игры

В настоящее время применение математических методов и моделей ограничено трудностями описания задач коммерческой практики полностью на математическом языке.

В таких случаях возможно применение комбинированного метода, включающего как формальные, так и неформальные методы, использующие накопленный опыт и интуицию людей. Такая комбинация методов может быть представлена в виде игровой модели.

В современных условиях даже очень опытный руководитель не всегда оказывается в состоянии без применения специальных современных средств и методов объективно сопоставить преимущества различных вариантов решений и выбрать из них оптимальный. Поэтому одной из ключевых проблем принятия решений является повышение их обоснованности, чему и служат деловые игры. Отличительной особенностью и преимуществом деловых игр является возможность привлечения людей к решению задач. Это позволяет имитировать влияние человеческого фактора на ход решения задач и, следовательно, значительно приблизить игровую модель к практическим условиям коммерческой деятельности. В целом деловая игра воспроизводит (имитирует) взаимодействие людей по оптимальному использованию имеющихся ресурсов в процессе достижения цели. При этом участники игры действуют в условиях неопределенности по многим причинам, а исход заранее желательно бы просмотреть.

Деловая игра позволяет постепенно, по шагам раскрывать неопределенность и вносить ясность, обнаруживая цепочки причинно-следственных связей между явлениями коммерческой практики. В ходе игры появляется возможность проверять профессиональную компетентность каждого участника игры. Почти все виды практической деятельности любого человека связаны с тем, что ему приходится принимать решения, совершая выбор из имеющихся в его распоряжении возможностей. При этом он, естественно, стремится к тому, чтобы выбираемый вариант был оптимальным: наилучшим, наиболее разумным, выгодным и целесообразным. В простых ситуациях эту задачу удается решить на основе простых наглядных представлений о сути дела и соображений здравого смысла. Но если ситуация сложная (на практике чаще всего это так), то такой подход не дает желаемых результатов. С целью получения четких представлений об исходах и их количественных оценках необходимы привлечение математических методов и построение игровой модели. С их помощью можно согласовать коллективные интересы и цели, определить пути и методы их наилучшего достижения при общей наглядности и очевидности выигрышей и проигрышей каждого игрового хода. Это способствует развитию навыков работы с людьми, учета их личностных качеств в зависимости от исполнения той или иной роли – должности в игре.

Игровая модель позволяет выяснить, в каком направлении развития участники игры могут проиграть, причем ее участники имеют возможность в любой момент приостанавливать свое участие и воздействовать на механизм развития коммерческого процесса, изменять его в ту или иную сторону, многократно просматривая возможные варианты исходов игры. Поэтому время игры и личный успех каждого из участников определяются уровнем его профессиональной подготовленности. Здесь сказываются не только опыт и интуиция, но и знание современных методов анализа.

Такой наглядный анализ ситуаций коммерческого процесса позволяет установить уровень профессиональной подготовленности каждого специалиста, а в процессе поиска вариантов личного поведения выбрать наиболее эффективный путь к достижению цели.

Последовательность игры задается в такой форме, чтобы у каждого игрока была возможность перестроить свое поведение соответственно проявляющимся результатам и интересам. Здесь нельзя точно предсказать, с каким набором решений и исходов столкнется тот или иной игрок, что и позволяет участникам самообучаться.

В конструкции деловой игры входят:

игровая модель (объект и предмет моделирования; состав участников игры; описание игровых объектов; правила игры (права, обязанности, нормы и т.д.); алгоритм проведения игры; информация; алгоритм обработки данных; варианты модификации игры);

оснащение игры (задания, инструкции; таблицы; справочники; тесты; программы; алгоритмы обработки данных; технические средства обработки информации; сценарий игры; катализатор — набор факторов, влияющих на скорость игры);

игровой комплекс (торговая организация, предприятие, отдел, секция, работники торговли);

вход игры (обеспечивается исходной информацией, которую игроки могут менять в процессе игры);

выход игры (им является решение задачи или новая задача по разработке новых условий для очередного тура игры или ее модификации).

В основе конструкции любой игры лежат взаимосвязь ресурсов и использование знаний о возможностях их использования.

Важно отметить, что замена информационного массива на реальные ресурсы коммерческой системы (организации или предприятия) превращает игру в непосредственный эксперимент.

3.5.2. Деловая игра «Коммерсант»

Алгоритм деловой игры «Коммерсант» приведен на рис. 3.5.1. Игра носит многоцелевой характер, поскольку позволяет решать разные задачи коммерческой сферы: выявление знаний специалистов о коммерческой деятельности, ресурсах и их использовании, проведение анализа развития коммерческой операции; проверка навыков и умений по применению экономико-математических методов в коммерческой сфере; формирование правил поведения в конфликтных ситуациях, оценка уровня качества товара; обучение и подготовка кадров для коммерческой деятельности, решение задач распределения группы работников по должностям, проведение аттестации кадров; согласование интересов в коллективе, приобретение навыков коллективной работы, расширение представлений о возможностях трудовых ресурсов и создание атмосферы совместного решения задач коммерческой деятельности.

В соответствии с известным утверждением в бизнесе: люди – продукт – прибыль, рассмотрим работу алгоритма деловой игры на примере оценки деловых качеств сотрудников коммерческой фирмы.

Целью игры является выявление необходимых и достаточных качеств специалиста коммерческой деятельности: коммерсанта, менеджера, маркетолога, продавца, бухгалтера, экономиста, финансиста или директора.

Практические работники коммерческой сферы иногда высказывают мнение о том, что некоторые работники не обладают необходимыми качествами и не соответствуют занимаемой должности, хотя на другом месте они показали бы себя с этими же качествами значительно лучше. Такое положение свидетельствует о нерациональном распределении трудовых ресурсов в коммерческих предприятиях и организациях. Правильное распределение трудовых ресурсов является весьма сложной задачей, которая

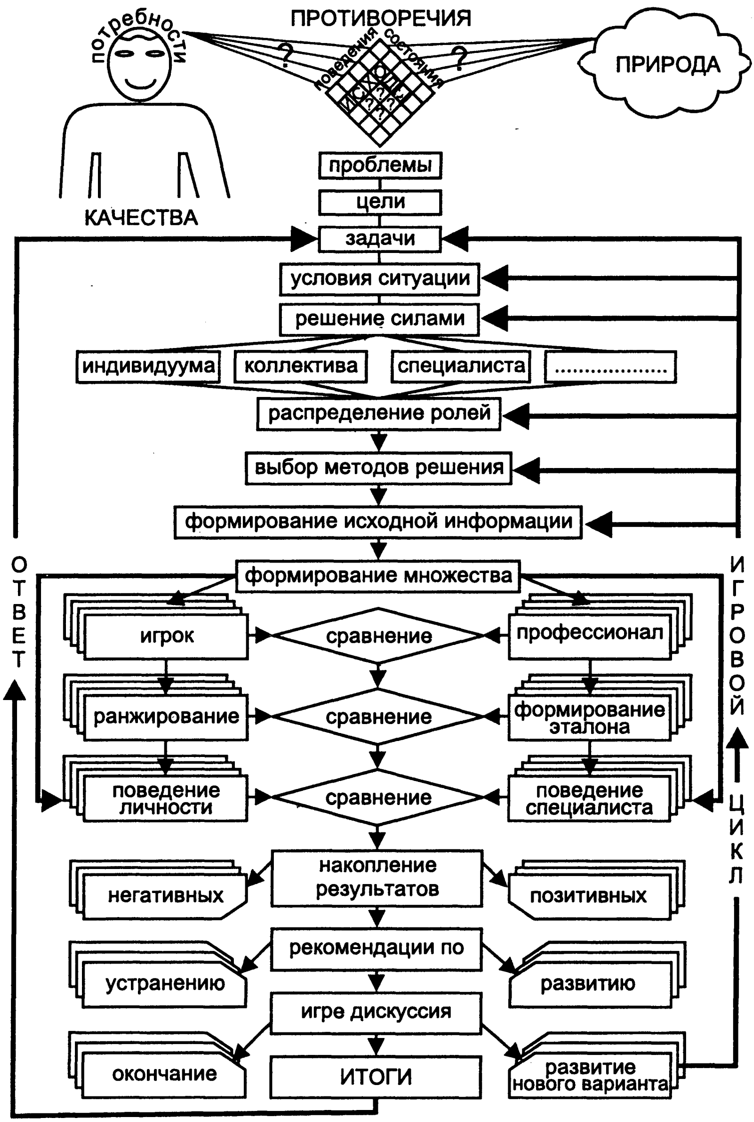


Рис. 3.5.1. Алгоритм деловой игры «Коммерсант»

приобретает особую важность и актуальность в связи со сложившейся нехваткой профессионально подготовленных работников в коммерческой сфере.

Для проведения деловой игры вначале необходимо проделать следующую организационную подготовку:

введение в игру – участникам объясняются цели, задачи игры, объект и предмет имитации, исходные условия перед началом игры;

разделение на микрогруппы – по желанию участников или разным признакам: профессии, занимаемой должности, возрасту, полу, с выделением лидеров или без них, распределение по ролям или должностям;

изучение условий игры – индивидуально и связано с освоением оснащения игры;

обсуждение условий работы в микрогруппах – необходимо для обмена мнениями по предстоящему процессу игры;

установление регламента игры – ориентируясь на наиболее рациональное время развития игры, для целей успешного планирования в группах своей деятельности во времени.

Игровой процесс в большей степени зависит от индивидуальной и групповой организованности, постоянного контроля администратором хода игры и оперативного управления, вмешательства для предупреждения негативных моментов, при этом лидеры групп постоянно следят и поддерживают игровую дисциплину в соответствии с правилами и последовательностью игровых операций, не затягивая игровую процедуру во времени.

При подведении итогов игры администратор обосновывает результат, приводит удачные и неудачные примеры решения аналогичных задач коммерческой сферы и формирует, если это необходимо, другие условия и цели для развития возможно нового варианта игры.

Для эффективного проведения игры необходима предварительная, тщательная и всесторонняя организационно-методическая подготовка, обеспечивающая деловую, творческую и интересную обстановку, активизацию привлечения знаний участников игры о возможностях эффективного использования ресурсов. Здесь большое значение имеют личностные характеристики игроков, их индивидуальные возможности, уровень профессиональной подготовки.

В целом игра является инструментом проверки знаний участников о применении накопленного опыта, формальных и эвристических методов анализа в деле принятия управленческих решений, а также заполнения пробела в знаниях о качествах специалистов вообще и своих собственных в частности, поскольку именно качества личности работников в сильной степени сказываются на результатах коммерческой деятельности.

Игровой процесс включает следующую последовательность операций.

1. Выбирается объект оценки качеств – коммерсант, продавец, финансист, менеджер, маркетолог, бухгалтер, экономист или какой-либо другой специалист.

1-й цикл – самостоятельный анализ

2. Определяются самостоятельно качества конкретной личности, например собственные (позитивные и негативные), и вносятся в табл. 3.5.1. Можно выписать качества личности из произведения, например, Ли Якокка «Карьера менеджера»: умный, внимательный, организатор, коммуникабельный, компетентный, здоровый, интересный, хобби, аналитик, прекрасно разбирается в людях, умеет увлечь за собой. Можно использовать другие литературные персонажи: Чичиков, Собакевич, Бендер; например на качества ростовщика Жана Эстера ван Гобсека из известного произведения Бальзака «Гобсек»: атеист, красноречив, холодный аналитический ум, человек-автомат, размеренный, жил бесшумно, берег жизненную энергию, очень осторожный, закрытый, сдержанный, говорил тихо, никогда не горячился, человек-вексель, золотой истукан, корсар, прожил более 80 лет.

3. Выявляется предполагаемый перечень позитивных качеств, который необходим специалисту коммерческой сферы в практической деятельности. Для раскрытия содержания понятия о качествах следует воспользоваться справочной литературой.

4. Выявляется перечень негативных качеств, который распространен в практической деятельности специалистов.

5. Сравниваются позитивные и негативные качества конкретной личности, например собственные с предполагаемыми качествами, необходимыми специалисту.

6. Формируются рекомендации по развитию позитивных и устранению существующих негативных качеств конкретной личности.

2-й цикл — коллективный анализ

7. Силами участников игры определяются позитивные и негативные качества конкретной личности.

8. Выявляются позитивные качества, необходимые специалисту торговли в практической деятельности.

9. Определяются негативные качества специалистов, проявляющиеся в практической деятельности работников торговли.

10. Каждый участник самостоятельно проводит ранжирование качеств специалиста торговли путем определения их значимости, используя метод экспертных оценок. Для этой цели составляется матрица (x_{ijl}) предпочтений (табл. 3.5.2), позволяющая самостоятельно провести попарное сравнение качеств, что в конечном итоге дает возможность определить их сравнительные (весовые) оценки. Для l-го участника игры элемент матрицы парного сравнения определяется следующим образом:

$$x_{ijl} = \begin{cases} 2, \text{ если качество } K_i \text{ доминирует } K_j;\ K_i \succ K_j; \\ 1, \text{ если качества равнозначимы, } K_i \sim K_j; \\ 0, \text{ если качество } K_i \text{ менее значимо, чем качество } K_j;\ K_i \prec K_j. \end{cases}$$

Качества сравниваются последовательно друг с другом, попарно.

Пусть в деловой игре принимают участие m игроков. Проследим технику формирования матрицы предпочтений (табл. 3.5.2) l-го игрока на примере сравнения пяти качеств: K_1 – коммуникабельность, K_2 – компетентность, K_3 – стаж работы, K_4 – дисциплинированность, K_5 – чувство юмора.

Последовательность заполнения матрицы начинается с диагонали, где качества сравниваются сами с собой. Поскольку они равны по значимости, то по всей диагонали записывается 1, затем

Таблица 3.5.1

Качества	Самостоятельный			Коллективный			
	Конкретной личности	Специалиста	Рекомендации личности	Конкретной личности	Специалиста	Ранжированный перечень	Рекомендации личности
позитивные	Компетентность Честность Чуткость Опрятность	*Желаемые:* компетентность честность чуткость вежливость дисциплинированность эрудиция	А. Развивать: компетентность вежливость дисциплинированность эрудицию	Терпение, усидчивость	*Желаемые:* честность компетентность предприимчивость смелость принципиальность здоровье	1. Здоровье 2. Компетентность 3. Чувство юмора 4. Контактность 5. Коммуникабельность 6. Принципиальность 7. Честность 8. Кругозор 9. Терпимость	А. Развивать: компетентность коммуникабельность чувство юмора честность
негативные	Суетливость Лень	*Существующие:* грубость, раздражительность, обман	В. Устранять: суетливость, лень	Суетливость Лень Обман Рассеянность	*Существующие:* злорадство, снобизм, жадность, крикливость, зависть, ненависть, мстительность	1. Раздражительность 2. Мстительность 3. Жадность 4. Зависть 5. Снобизм 6. Злорадство 7. Лень 8. Обман 9. Рассеянность 10. Суетливость 11. Грубость	В. Устранять: суетливость, лень, обман, рассеянность

Таблица 3.5.2

Качества	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	X_{il}	$M_{il} = S_i/n^2$	Ранг
K_1	1	0	2	2	1	6	0,24	2
K_2	2	1	2	1	1	7	0,28	1
K_3	0	0	1	2	2	5	0,20	4
K_4	0	1	0	1	2	4	0,16	3
K_5	1	1	0	0	1	3	0,12	5
$\sum_{i=1}^{5} X_{ij}$	4	3	5	6	7	$n^2 = 25$	$\sum_{i=1}^{5} M_i = 1{,}0$	

сравниваются качества K_1 последовательно со всеми остальными. По каждому качеству определяется сумма баллов по строкам по формуле

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Затем проводится проверка правильности заполнения матрицы по формулам

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 2n, \qquad \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} x_{ij} = n^2 = \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

После этого определяется относительная значимость каждого качества по формуле

$$M_i = \frac{S_i}{n^2}, \quad i = \overline{1, n},$$

причем следует иметь в виду, что $\sum_{i=1}^{n} M_i = 1{,}0.$

Далее определяется ранг каждого качества и соответственно составляется ранжированный перечень качеств.

11. Определяются на основе рассчитанных m игроками экспертных оценок усредненные веса качеств по модели:

$$\overline{M}_i = \frac{\sum_{l=1}^{N} M_{ij}}{N},$$

на базе чего формируется ранжированный перечень качеств специалиста участниками игры.

12. Определяется перечень необходимых и достаточных качеств специалиста, без наличия которых он не может быть допущен к работе. Для этой цели строится график связи усредненных весов качеств $\overline{M}_i = f(K_i)$, на котором качества располагаются по весам в порядке убывания их значимости. Устанавливаются верхняя и нижняя границы диапазона необходимых и достаточных качеств, которые находятся опытным путем. Найденные значения откладываются на оси весов качеств и полагают, что качества, которые имеют вес, больший $M_в$, считаются необходимыми, а остальные – достаточными. Причем в зоне достаточных качеств выделяются менее важные качества, вес которых менее $M_н$. Таким образом, формируется эталон качеств специалиста, перечень которых заносится в табл. 3.5.3.

13. Проводят сравнение качеств конкретной личности с эталоном и определяют перечень качеств, которые следует развивать в порядке их важности, а также качества, которым не придали должного значения (недооценили), и качества, которые переоценили, т.е. придали слишком большое значение.

3-й цикл — оценка качества

14. Определяются характеристики качеств K_i и записываются в табл. 3.5.3.

15. Определяется шкала оценки для характеристик качеств, например, по 10-балльной шкале (–5 +5).

16. Определяются оценки качеств специалиста C_{ci}. Количество баллов характеристике присваивается участниками-экспертами в зависимости от степени необходимости рассматриваемой характеристики качества, один из вариантов которой приведен в табл. 3.5.3.

17. Заносятся в табл. 3.5.3 усредненные веса качеств M_i.

18. Дается коллективная оценка необходимых и достаточных качеств специалиста с учетом их характеристик шкалы оценки по модели

$$C_c = \sum_{i=1}^{n} C_{ci}\overline{M}_i.$$

В результате получим сумму баллов для специалиста.

19. Производится оценка качеств конкретной личности, например самооценка по модели

$$C_Л = \sum_{i=1}^{n} C_{ci}\overline{M}_i.$$

Таким образом, получена сумма баллов оценки отдельной личности.

Таблица. 3.5.3

Качества специалиста, K_1	Усредненные веса, M_1	Ранг, R_i	Характеристики	Оценка		
				характеристик	специалиста, C_{ci}	личности, $C_{лi}$
K_1 Образование		3	Высшее Незаконченное высшее Среднее Специальное	5 4 2 3	+5	3
K_2 Чувство юмора		2	Присутствует Ситуативно Отсутствует	5 3 0	+5	3
K_3 Стаж работы		1	До 5 лет До 10 лет Свыше 20 лет	3 5 2	+5	2
K_4 Возраст		9	До 25 лет До 40 лет До 50 лет	2 4 5	+5	4

Продолжение

Качества специалиста, K_l	Усредненные веса, M_l	Ранг, R_i	Характеристики	Оценка		
				характеристик	специалиста, C_{ci}	личности, $C_{лi}$
K5 Дисциплинированность		5	Да Нет	+5 –5	+5	–5
K_6 Компетентность		4	Да Нет	+5 –5	+5	
K_7 Коммуникабельность		6	Сдержан Несдержан	+5 –5	+5	
K_8 Здоровье		8	Да Нет	+5 –5	+5	
K_9 Внимательность		7	Да Нет	+5 –5	+5	

20. Определяются расхождения оценок качеств отдельной личности и специалиста $\Delta C = C_{ci} - C_{лi}$.

21. Проводятся подведение итогов игры и дискуссия.

В результате достигается цель игры — определен перечень необходимых и достаточных качеств специалиста, без наличия которых претендент не может занимать рассматриваемую должность.

Необходимо заметить следующее обстоятельство: если игра проходила без предварительной подготовки слушателей в аудитории, то использовался только объем имеющихся у игроков знаний на входе игры – вначале индивидуальных, а затем коллективных. Проведение предварительной работы в библиотеке, выявление качеств из литературных произведений, например, посвященных описанию жизни замечательных людей, известных экономистов, предпринимателей, коммерсантов, менеджеров, руководителей, общественно-политических деятелей, использование справочной или специализированной литературы, а также привлечение специалистов соответствующих областей знаний, значительно увеличивают объем исходной информации, необходимой в игре. Подобная работа позволяет прежде всего установить перечень существующих качеств личности. Затем проводится работа по раскрытию понятия каждого качества. Это позволяет избежать разногласия и перейти к группировке качеств и построению структуры качеств личности специалиста, установлению их взаимосвязи и соподчинения. Полученную совокупность можно представить в виде древовидной структуры качеств личности специалиста. На основе этой модели можно строить анкеты экспертного опроса, формировать тесты индивидуальной оценки претендентов на работу в коммерческой сфере, проводить профилактические работы по аттестации кадров, проверки их компетентности. Решение этих задач можно проводить на базе игровой модели путем изменения условий решения задачи. В случае необходимости часть этапов игровой модели может быть пропущена.

Практика проведения игр по изложенному выше алгоритму показала недостаточность знаний работающих о качествах, которые должны быть у специалиста.

Так, например, не все работники коммерческой сферы понимают, что производительность труда зависит от компетентности, которая определяется как состояние, характеризующее готовность справляться со своими задачами на уровне современных требований и знаний, и включает семь компонентов: квалификацию, ориентацию, мотивацию, эрудицию, интуицию, стиль. Поэтому некомпетентность является общественно опасным явлением.

Таким образом, сочетание математических методов в игровой композиции с эвристическими методами позволяет построить эффективный инструмент познания различных сфер деятельности работников коммерческой сферы.

3.5.3. Оценка согласованности мнений игроков в деловой игре

Согласованность мнений игроков можно определить на базе анализа установленных ими коэффициентов весомости. Для этого используют коэффициент вариации:

$$V_1 = \frac{S_{M_i}}{\overline{M}_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

где S_{Mi} – среднее квадратическое отклонение коэффициентов весомости i-го показателя качества.

Среднее значение коэффициента весомости по i-му показателю качества определяется по следующей формуле:

$$\overline{M_i} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

где m — количество игроков;

M_{ij} — коэффициент весомости для i-го показателя качества, установленного j-м игроком.

$$S_{M_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (M_i - \overline{M_i})^2}.$$

Если для всех m показателей качества выполняется соотношение $V_i \leq 0{,}35$, то процедура определения коэффициента весомости считается законченной. Если условие не выполняется, то это свидетельствует о низкой, недопустимой согласованности игроков, и поэтому необходим дополнительный анализ.

Опыт практической работы показал следующий вариант распределения значений коэффициентов вариации с указанием степени согласованности: $V \leq 0{,}1$ – согласованность высокая; $V = 0{,}11 \div 0{,}15$ – выше средней; $V = 0{,}16 \div 0{,}25$ – средняя; $V = 0{,}26 \div 0{,}35$ – ниже средней; $V > 0{,}35$ – низкая.

Для повышения согласованности игроков проводится повторное определение коэффициентов весомости показателя с по-следующим обсуждением и проведением соответствующих вычислений V_1.

Степень согласованности мнений игроков оценивается еще и с помощью коэффициента конкордаций W о взаимовлиянии различных показателей, например единичных на групповые.

В целом необходимо ответить на вопрос: удовлетворяет нас или нет полученная степень согласованности мнений экспертов? Величина коэффициента конкордаций колеблется в пределах $0 \leq W \leq 1{,}0$: от нуля $W = 0$, соответствующего полной несогласованности мнений игроков, до единицы $W = 1{,}0$, что указывает на полную согласованность мнений.

Важность того или иного показателя в одной группе устанавливается игроками независимо друг от друга путем ранжирования на основе попарного сравнения.

Коэффициент конкордаций рассчитывается по модели

$$W = \frac{12S}{nm^2(n^2-1) - m\sum_{j=1}^{m} T_j},$$

где m – количество игроков;

n – количество показателей.

Для вычисления параметра S проводятся следующие операции:

а) каждый игрок (j) ранжирует показатели (i) качества (r_{ij}), а результаты записывает в таблицу.

Следует заметить, что сумма рангов показателей каждого игрока должна составлять величину

$$L = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Например, если имеется n – 5 показателей сравнения, то

$$L = \frac{5\cdot(5+1)}{2} = 15.$$

В этом случае, если игрок считает, что первые три показателя одинаковые по важности, присваивает следующие ранги: 2, 2, 2, 4, 5, что в сумме равно 15;

б) мнения m игроков о важности n показателей качества располагаются в виде матрицы (табл. 3.5.4), где по каждому показателю ($К_i$) определяется сумма рангов, выставленных всеми игроками:

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}.$$

Таблица 3.5.4

Мнение игроков о важности показателей

Показатель $К_i$		Игроки					$R_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}$
		1	2	3	j	m	
1	$К_1$	r_{11}	r_{12}	r_{13}	...	r_{1m}	R_1
2	$К_2$	r_{21}	r_{22}	r_{23}	...	r_{2m}	R_2
3	$К_3$	r_{31}	r_{32}	r_{33}	...	r_{3m}	R_3
...	...	...	...	...	...	...	...
n	$К_n$	r_{n1}	r_{n2}	r_{n3}	...	r_{nm}	R_n

в) находится общая сумма оценок для всех показателей:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} r_{ij};$$

г) определяется средняя сумма рангов показателей качества:

$$\overline{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} r_{ij};$$

д) находится сумма квадратов отклонений сумм рангов показателей от их средней R:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (R_i - \overline{R})^2.$$

Знаменатель коэффициента конкордации представляет собой гипотетическую сумму рангов, установленных игроками в случае полной согласованности их мнений, и вычисляется с учетом числа так называемых связанных рангов. Они появляются в том случае, если игрок не может при ранжировании отдать предпочтение какому-нибудь одному из некоторых показателей качества, тогда каждому из них присваивается один и тот же ранг.

Число одинаковых рангов важности выставленных игроком j

$$T_j = \sum_{k_j}^{p_j} (t_{k_j}^3 - t_{k_j}), \quad j = \overline{1, m},$$

где t_{kj} — число повторений одинакового ранга в k-й группе j-го игрока;
k_j — номер группы рангов j-го игрока;
p_j — число групп одинаковых рангов j-го игрока.

Чем ближе значение коэффициента конкордации W к 1, тем выше степень согласованности мнений игроков.

3.5.4. Оценка компетентности игроков в деловой игре

Оценку степени компетентности игроков можно провести косвенно и таким образом сделать отбор высококвалифицированных специалистов. Использование показателя согласованности игроков W позволяет выявить совокупность игроков, внутри которой согласованность достаточно высока. На основе этих данных можно судить о степени компетентности игрока. Для этого поочередно один из игроков исключается из суммарной оценки и подсчитываются значения W_{m-1}^i для оставшихся $(m - 1)$ игроков. Если этот коэффициент W_{m-1} оказывается существенно выше (более 10%), чем W для всей совокупности игроков, то рассматриваемый игрок i исключается из совокупности. Эту процедуру последовательно повторяют для оценки всех оставшихся игроков. Так поступают до тех пор, пока значение W не перестанет увеличиваться, т.е. останется постоянной величиной.

Последовательность анализа состоит в следующем: по каждому i-му игроку вычисляется коэффициент конкордации W_{m-1}^i для оставшихся ($m - 1$) игроков, из которого исключено мнение i-го игрока. Затем на этой основе вычисляется отклонение по формуле

$$\Delta W^i = (W - W^i_{m-1}).$$

Оценка компетентности k-го игрока осуществляется по следующему правилу: если относительная величина отклонения

$$\delta_i = \frac{(W^i - W^1_{m-1})}{W} \cdot 100$$

оказывается более 10%, то игрок исключается из совокупности и считается некомпетентным, при $d_i \leq 10\%$ игрока оставляют в совокупности и он считается компетентным. Результаты вычислений представляют в матричном виде в табл. 3.5.5.

Таблица 3.5.5

Игрок	W^i_{m-1}	ΔW	d_i, %	Компетентность (нет, да)
1	W^1	ΔW^1	d_1	да
2	W^2	ΔW^2	d_2	нет
3	W^3	ΔW^3	d_3	да
...	...	...	...	...
m	W^m	ΔW^m	d_m	да

Результаты анализа позволяют сформировать группу компетентных игроков с высокой степенью согласованности, на чье мнение в дальнейшем и следует опираться.

Контрольные вопросы

1. Каковы основные термины и определение теории игр?
2. Определите и запишите антагонистическую матричную игру.
3. Каков принцип минимакса?
4. Когда следует использовать смешанные стратегии и как их найти?
5. Каков геометрический метод решения игры?
6. Как следует принимать решение в условиях коммерческого риска?

7. Каковы критерии принятия решения в условиях коммерческой неопределенности?

8. Когда следует применять критерии Вальда, Гурвица, Сэвиджа?

9. Как следует проводить деловую игру?

10. Каковы причины и функции конфликтов?

Задачи

1. Для антагонистической матричной игры определите верхнюю и нижнюю цену игры, оптимальные стратегии игроков.

I \ II	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	15	25	50	57	10	10
A_2	20	40	70	60	20	30
A_3	80	30	40	55	90	65
A_4	45	20	35	25	75	55

2. Определите минимаксные стратегии игроков и седловую точку игры.

I \ II	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	8	7	6	3
A_2	10	12	4	7	2
A_3	15	10	8	7	4
A_4	10	7	8	12	6
A_5	7	10	11	3	5
A_6	7	2	3	12	4

3. Вычислите смешанные стратегии игроков в игре 2×2.

I \ II	B_1	B_2
A_1	4	–8
A_2	–3	15

4. Дайте геометрическую интерпретацию решения предыдущей задачи.

5. Для задачи 1 найдите оптимальные смешанные стратегии двух игроков, используя метод линейного программирования.

6. Определите оптимальную стратегию в «игре с природой», заданной следующей платежной матрицей,

I \ II	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	8	7	5	10
A_2	6	4	3	12
A_3	10	5	7	9
A_4	4	8	15	2

если вероятности наступления состояния природы $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ соответственно равны: $p_1 = 0{,}15$; $p_2 = 0{,}35$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}2$.

7. Составьте матрицу рисков для предыдущей задачи 6 и определите оптимальную стратегию по критерию минимаксного риска.

8. Определите оптимальную стратегию в «игре с природой» по критерию Вальда и Гурвица при $x = 0{,}2$ в задаче 6.

9. Определите развитие реальной конфликтной ситуации, постройте игровую модель и найдите оптимальное решение.

10. Определите для «игры с природой» оптимальную стратегию по критериям Сэвиджа и Гурвица для $\chi = 0{,}3$ и $\chi = 0{,}7$ и проанализируйте результаты.

I \ II	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	100	200	150	70	80
A_2	90	300	140	100	50
A_3	80	150	90	200	100
A_4	70	250	300	100	60

ГЛАВА 4

МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ТЕОРИИ ГРАФОВ И СЕТЕВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В коммерческой деятельности большинство возникающих задач удобно представлять для восприятия и анализа в виде сетей, которые позволяют ответить на два главных вопроса: до какого места необходимо дойти (цель) и какой путь следует избрать (как)? Коммерческую деятельность можно рассматривать как совокупность задач, предназначенных для передвижения, складирования и распределения товаров, денег, документов, воды, нефти, газа, электроэнергии, теле- и радиосистем, информации о товарах, поставках и покупателях. Наглядность и логическая обоснованность методов сетевого анализа позволяют выбрать довольно естественный подход к решению задач коммерческой деятельности. Сетевые модели для людей, не занимающихся научной работой, являются более понятными, чем другие модели, поскольку для них все же лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать. В значительной степени методы сетевого анализа основаны на теории графов — области математики, началом развития которой явилась задача о кенигсбергских мостах, сформулированная швейцарским ученым Л. Эйлером в 1736 г. Через реку Прегель, на которой стоял город Кенигсберг, семь мостов (рис. 4.1.1) связывали два острова друг с другом. Задача заключалась в том, чтобы пройти по всем мостам только один раз и вернуться обратно к началу маршрута. Эйлер доказал неразрешимость этой задачи.

Позже Д. К. Максвелл и Г. Р. Кирхгоф на основе исследования движения тока в электрических цепях сформулировали некоторые принципы сетевого анализа. Были разработаны методы расчета наибольшей пропускной способности телефонных линий. В 40-х годах XX в. в результате развития теории исследования опе-

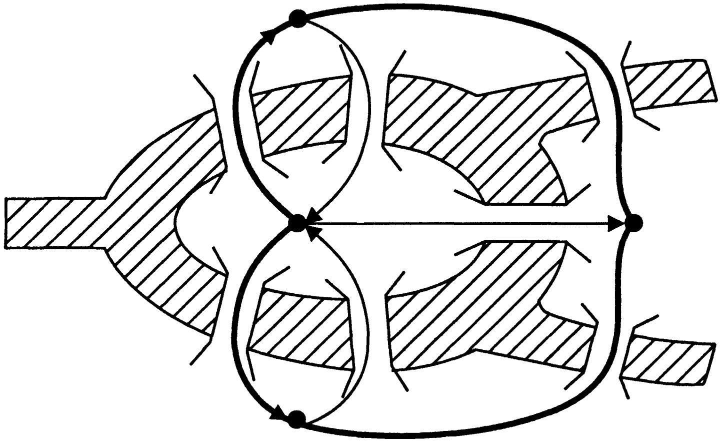


Рис. 4.1.1. Модель задачи о кенигсбергских мостах

раций был разработан ряд математических методов, необходимых для анализа больших систем. В 50–60-х годах проводились работы по построению новых сетевых моделей и разработке алгоритмов их решения на основе элементов теории графов.

4.1. Элементы теории графов

В коммерческой деятельности коммерсантам постоянно приходится решать задачи поиска покупателей продукции, товаров, имеющихся в распоряжении у предприятий, клиентов-посредников как на территории России, так и за рубежом. При этом в движении постоянно находятся люди, деньги, товары, документы, информация. Так, например, после определения руководителем возможных мест, которые необходимо посетить, возникает задача выбора оптимального маршрута из имеющихся, так называемая задача коммивояжера, которая представлена графически на рис. 4.1.2.

Структура изображения задачи на рис. 4.1.1 называется графом. Граф задается двумя множествами: непустым множеством X и множеством U, содержащим пары элементов из множества X.

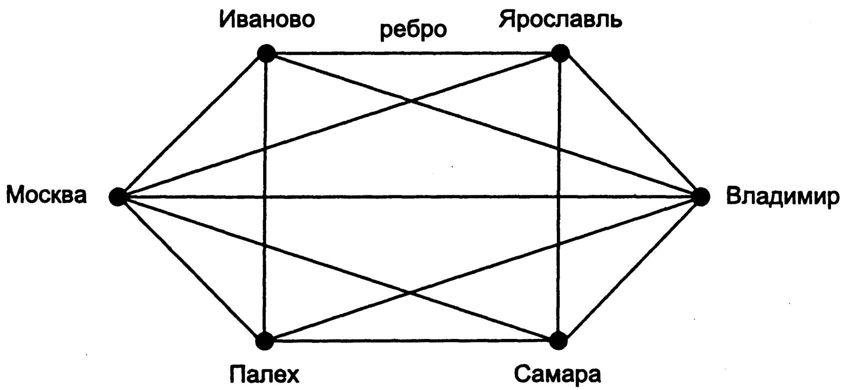


Рис. 4.1.2. Неориентированный граф задачи коммивояжера

При этом элементы множества U могут повторяться, а также могут повторяться элементы в парах. Граф, заданный на множествах X и U, обозначается $G = (X, U)$. Если элементы в парах множества U не упорядочены, то граф называется неориентированным, в противном случае — ориентированным, или орграфом.

Элементы множества X называют вершинами графа, а множества U — ребрами для неориентированного графа и дугами для орграфа. На плоскости граф задается в виде точек (вершин) и линий, соединяющих некоторые из них (ребер или дуг). На рис. 4.1.3, 4.1.4 изображены соответственно неориентированный и ориентированный графы.

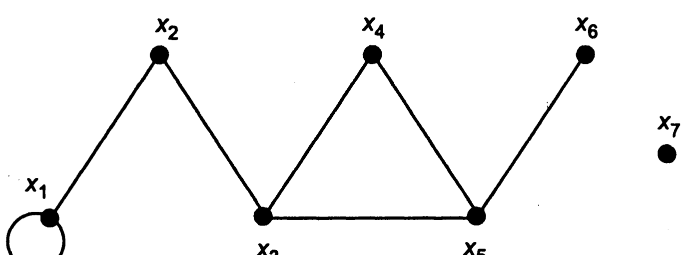


Рис. 4.1.3. Несвязный неориентированный граф

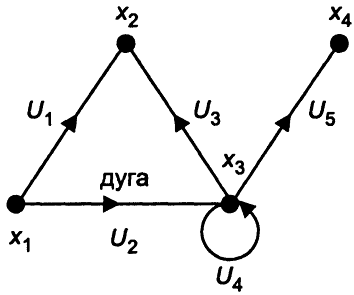


Рис. 4.1.4. Ориентированный граф

Для неориентированного графа на рис. 4.1.3 множество вершин X и ребер U можно записать так:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\},$$
$$U = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_5), (x_5, x_6)\}.$$

Для ориентированного графа множества вершин и дуг записываются следующим образом:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},\ U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_3, x_2), (x_3, x_3), (x_3, x_4)\}$$
$$\text{или } U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}.$$

1. Приведем ряд определений для **неориентированных графов**. Ребро, начало и конец которого совпадают, называется *петлей* (x_1, x_1), рис. 4.1.3.

Вершины называются *смежными*, или *соседними*, если существует ребро, их соединяющее (x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_5), (x_5, x_6), вершины x_3 и x_6 – несмежные.

Если вершина является началом или концом ребра, то вершина и ребро называются *инцидентными*.

Степенью вершины называется число инцидентных ей ребер, степень вершины x обозначается $d(x)$. Например, рис. 4.1.3 $d(x_2) = 2$; $d(x_3) = 3$; $d(x_4) = 2$; $d(x_5) = 3$. Вершина, степень которой равна нулю $d(x_7) = 0$, называется *изолированной* x_7. Вершина, степень которой равна единице $d(x_6) = 1$, называется *висячей*, или *тупиковой*, x_6.

Последовательность вершин и ребер, в которой конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего, называется *маршрутом*. Число ребер в маршруте определяет его длину: $(x_1; x_2; x_3; x_5; x_4; x_3; x_2)$ – маршрут, длина которого равна 6 (рис. 4.1.3).

Цепью называется маршрут, в котором *все ребра* различны. Например, $(x_4; x_3; x_2; x_1)$ – цепь, длина которой равна 4. *Простой* называется цепь, в которой все **вершины** различны, например $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, рис. 4.1.3.

Граф называется *связным*, если для любых двух его вершин существует цепь, соединяющая эти вершины. Граф, представленный на рис. 4.1.2, – связный, а на рис. 4.1.3 – несвязный, поскольку не существует цепи, соединяющей вершину x_7 с остальными.

Расстоянием между вершинами связного графа называется *длина самой короткой цепи*, соединяющей вершины.

Диаметром графа называется максимальное расстояние между его вершинами.

Циклом (*простым циклом*) называется цепь (простая цепь), начало и конец которой совпадают, на рис. 4.1.3 это последовательность $(x_3; x_4; x_5; x_3)$.

Цикл в графе называется *эйлеровым*, если он содержит все ребра графа ровно один раз. Связный граф, в котором есть эйлеров цикл, называется *эйлеровым графом*. Его можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги и не повторяя линий «одним росчерком» (рис. 4.1.7,б).

Теорема. Связный граф называется эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины четная.

Подграфом графа G называется граф G_1 с множеством вершин X_1 и множеством ребер U_1 такой, что $X_1 \in X$, $U_1 \in U$. Для графа на рис. 4.1.3 подграфом может быть граф $G_1 = (X_1, U_1)$, где $X_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, а $U_1 = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_3, x_5)\}$.

Компонентой связности графа называется его связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа данного графа, на рис. 4.1.3 граф имеет две компоненты связности.

Вершина графа, удаление которой повышает число компонент связности, называется *точкой сочленения*. Под *удалением вершины* понимается удаление самой вершины и всех инцидентных ей ребер. Точкой сочленения является, например, вершина x_3 (см. рис. 4.1.3), удаление которой приводит к появлению третьей компоненты связности.

Деревом называется связный граф без циклов (рис. 4.1.5).

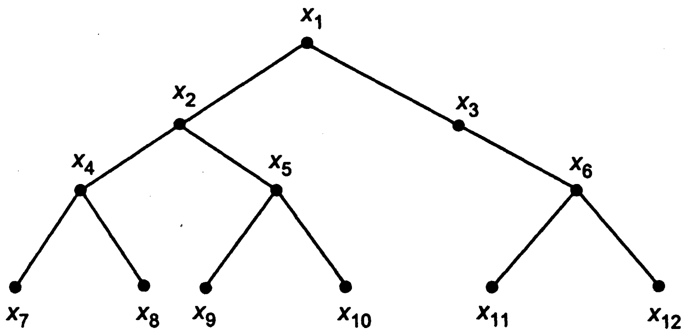


Рис. 4.1.5. Дерево

Вершина x_1 является *корнем дерева*. Лесом называется граф без циклов, представляющий собой совокупность деревьев (рис. 4.1.6).

Граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром (см. рис. 4.1.2).

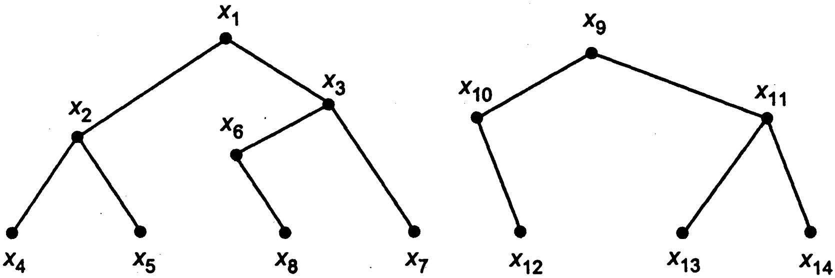


Рис. 4.1.6. Лес

Граф называется *регулярным* степени d, если все его вершины имеют степень d. На рис. 4.1.2 регулярный граф степени $d = 5$.

Регулярный граф, все вершины которого имеют степень 1, называется *паросочетанием*. Граф называется двухдольным, если множество его вершин X может быть разделено на два непересекающихся подмножества Y и Z таким образом, что каждое ребро графа соединяет вершины из двух разных подмножеств Y и Z.

Гамильтоновой цепью называется простая цепь, содержащая все вершины графа ровно один раз. Например, для графа (рис. 4.1.7а) цепь (6, 1, 5, 4, 3, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 19, 18, 17, 16, 7)является гамильтоновой.

Гамильтоновым циклом называется гамильтоновая цепь, начало и конец которой совпадают. Если в конец предыдущей цепи дописать вершину 6, получим *гамильтонов цикл*.

Граф называется *гамильтоновым*, если в нем имеется гамильтонов цикл (рис. 4.1.7,а).

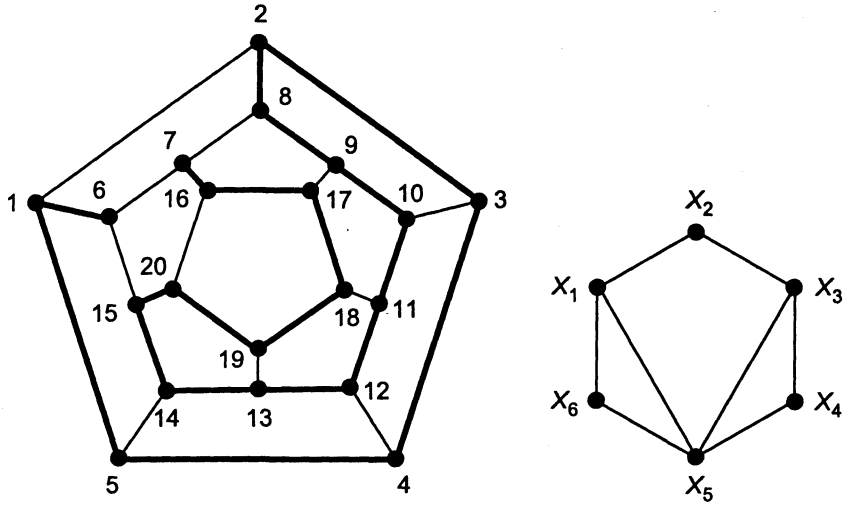
Теорема. Если в графе G с n-вершинами степень каждой вершины не меньше чем $\frac{n}{2}$, то граф G – гамильтонов.

Термин «гамильтонов» связан с именем ирландского математика У. Гамильтона, который в 1859 г. предложил игру «Кругосветное путешествие». Каждой из двенадцати вершин додекаэдра (см. рис. 4.1.7,а) соответствует один из городов мира. Необходимо, переезжая из города в город по ребрам додекаэдра, посетить каждый город только один раз и вернуться назад. Эта задача сводится к поиску простого цикла, проходящего через каждую вершину графа.

Задачи, касающиеся эйлеровых и гамильтоновых цепей и циклов, часто встречаются на практике. Например, стоимость выполнения комплекса коммерческих операций, работ существенно зависит от последовательности, в которой они выполняются.

Граф называется *взвешенным*, если каждому его ребру поставлено в соответствие некоторое число, называемое *весом ребра*, например расстояние между городами, стоимость или время проезда между ними.

Задачу коммивояжера можно представить как в виде ориентированного, так и неориентированного графа рис. (4.1.8,а,б).



а) гамильтонов *б)* эйлеров

Рис. 4.1.7. Графы

Предложенный вариант решения задачи коммивояжера представляет собой кольцевой маршрут, где каждый город посещается только один раз, начиная с любого населенного пункта.

2. Для **ориентированных графов** в основном все определения сохраняются, однако имеются некоторые отличия. Последовательность дуг, в которой конец предыдущей дуги совпадает с началом следующей, называется *путем*. *Длина пути* определяется количеством в нем дуг. Путь называется *простым*, если в нем дуга не встречается дважды, в противном случае он является *составным*. Путь, в котором никакая вершина не встречается дважды, называется *элементарным*. Путь, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине, называется *контуром*.

В неориентированном графе пользуются термином не путь, а *цепь*, а вместо контура — *цикл*.

В графе рис. 4.1.4 путем является, например, последовательность (x_1; x_3; x_3; x_2). Последовательность (x_2; x_3; x_4) путем не является, так как не существует дуги, соединяющей x_2 и x_3.

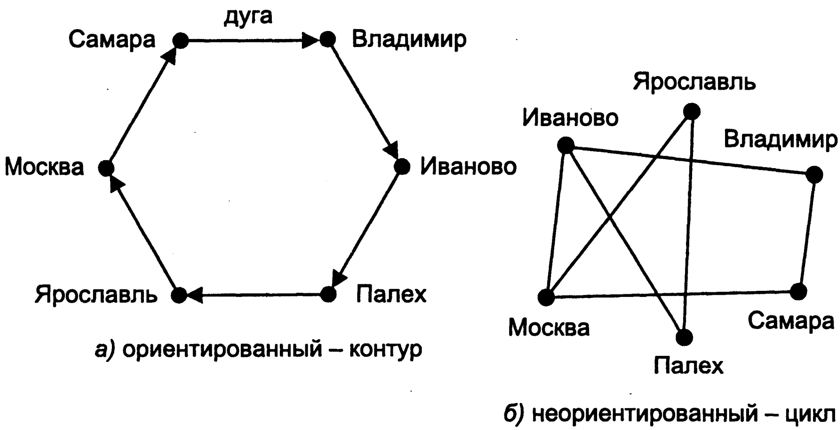


Рис. 4.1.8. Графы

Для ориентированного графа вместо степени вершины вводится понятие полустепеней исхода и захода. Если вершина является началом дуги, то дуга называется *исходящей из вершины*, если концом, то – *заходящей. Полустепенью исхода вершины* $d^-(x)$ называется число дуг, исходящих из этой вершины, *полустепенью захода* $d^+(x)$ – число дуг, заходящих в вершину. Для графа, изображенного на рис. 4.1.4, можно записать:

$$d^-(x_2) = 0,\ d^-(x_1) = 2,\ d^+(x_2) = 2,\ d^+(x_1) = 0.$$

При решении задач на компьютере граф лучше представлять в виде матриц, операции с которыми удобно проводить на компьютере.

Известно несколько типов матриц, позволяющих задавать граф: смежности, инциденции, пропускных способностей.

Матрица смежности вершин графа представляет собой квадратную матрицу $A_{n\times n}$, строки и столбцы которой соответствуют вершинам, каждый элемент которой a_{ij} определяется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} k \text{ – число ребер (дуг), соединяющих вершины } i \text{ и } j; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Для ориентированного графа элемент a_{ij} равен числу дуг, направленных от вершины i к вершине j.

Для *неориентированного* графа, представленного на рис. 4.1.3, матрица смежности симметрична и имеет размерность (7×7) и записывается в виде

$$A = \begin{array}{c|ccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Слева и сверху проставлены номера вершин.

Для *ориентированного* графа, изображенного на рис. 4.1.9, матрица смежности тоже квадратная (6 × 6) и записывается в виде

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & S & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & t \\ \hline S & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ X_1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ X_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ X_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ X_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Матрицу смежности чаще применяют для задания *неориентированного* графа. Для задания *ориентированного* графа лучше использовать матрицу инциденций.

Матрицей инциденций – вершины – дуги ориентированного графа с n вершинами и m дугами называется матрица B с n строками и m столбцами, элемент которой b_{ij} определяется следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ если вершина является началом дуги } (i,j); \\ 1, \text{ если вершина является концом дуги } (i, j); \\ 0, \text{ если вершина и дуга не инцидентны.} \end{cases}$$

Для неориентированного графа элемент $b_{ij} = 1$, если вершина инцидентна ребру и 0 в противном случае.

Для ориентированного графа, представленного на рис. 4.1.9, матрица инциденций B имеет следующий вид:

$$B = \begin{array}{c|cccccccccc} & (SX_1) & (SX_2) & (X_1X_2) & (X_1X_3) & (X_1X_4) & (X_2X_3) & (X_2X_4) & (X_3X_4) & (X_4t) & (X_3t) \\ \hline S & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ X_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ X_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}.$$

Конечный граф без циклов и петель, ориентированный в одном направлении от входа к выходу графа, называется сетью.

Взвешенный ориентированный граф без петель, в котором выделено k-вершин, называемых полюсами, является k-полюсной цепью. Среди сетей особо выделяется двухполюсная транспортная сеть (рис. 4.1.9) $S = (N, U)$ с множеством вершин N и множеством дуг U, для которых выполняется следующее условие:

1) существует только одна вершина сети $s \in N$, в которую не заходит ни одна дуга. Эта вершина называется входом, или истоком, сети;

2) существует только одна вершина сети $t \in N$, из которой не выходит ни одной дуги сети. Эта вершина называется выходом, или истоком, сети;

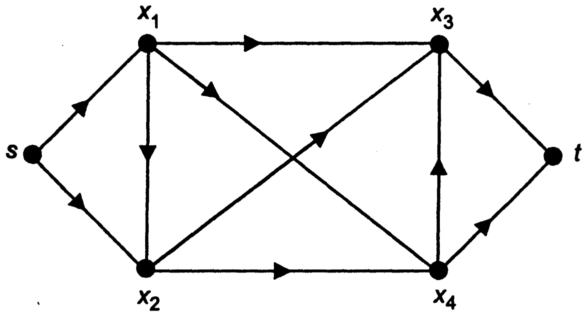


Рис. 4.1.9. Транспортная сеть

3) каждой дуге сети $u \in U$ поставлено в соответствие неотрицательное число $c(u)$, называемое пропускной способностью дуги.

Примерами вершин сети могут быть пересечения автострад, электростанции, телефонные узлы, железнодорожные узлы, аэропорты, водохранилища, товарные склады.

Примерами дуг сети могут быть дороги, линии электропередачи, телефонные линии, авиалинии, водные магистрали, нефте- и газопроводы.

Постановку и решение подобных задач можно получить с помощью методов сетевого моделирования.

4.2. Природа потоков в сетях и принцип их сохранения

Сходство сетевых представлений наблюдается в природе, технике и различных сферах деятельности человека. Так, например, с высоты птичьего полета или самолета можно наблюдать сетевую модель формирования реки, например Волги, от ее истоков маленькие ручейки и реки, соединяясь во взаимосвязанные артерии, объединяются в одно большое русло, по которому потоки воды устремляются в Каспийское море. Такие же аналогии представляют собой сети железных дорог, по которым транспортные потоки направляются из пунктов отправления в пункты назначения, осуществляя перевозку потоков грузов и пассажиров. Совокупность линий электропередач также представляют собой энергетическую сеть, по которой потоки электроэнергии от электростанций по проводам поступают к потребителям. Автомобильные дороги как в масштабе города, района, области, так и в более крупных масштабах страны или, например части света – Европы, представляют собой сети, по которым движутся потоки автомобилей. Нефте- и газопроводы в совокупности представляют собой сети трубопроводов, по которым потоки нефти или газа поступают от источников к потребителям. Водопроводные сети обеспечивают движение потоков воды по трубопроводам от источников к потребителям. Аналогичные сети представляют собой маршруты движения кораблей и самолетов, обеспечивающие перемещение потоков пассажиров и грузов по планете. Такие же аналогии представляют собой телефонные, радио- и телекоммуникационные сети, по которым циркулируют информационные потоки, например компьютерные сети связи различного назначения. Особый интерес представляют сети, образованные движением товарных и финансовых потоков, изучение которых может пояснить очень многие явления нашей жизни.

Перечисленные сетевые аналогии потоковых процессов имеют динамический характер, связанный с перемещениями различных по своей природе масс в пространстве: электроэнергии, нефти, газа, воды, воздуха, железнодорожного, воздушного, автомобильного транспорта, товаров, финансов, пешеходов, информации и т.п. Причем существование этих потоков необходимо для обеспечения и поддержания жизнедеятельности человека. Именно поэтому возник принцип сохранения потока. Сетевое представление взаимодействия и циркуляции потоков необходимо, чтобы оценить и вычислить разные характеристики, описывающие условия существования и поведения потоков в таких средах. Множество возникающих в таких случаях задач может быть решено с помощью теории потоков в сетях. В этой теории в качестве основы рассматриваются движения в сетях потоков любой природы от источника s к стоку t.

Определение. Потоком в сети $S = (N, U)$ от входа $s \in N$ к выходу $t \in N$ называется неотрицательная функция φ, определенная на множестве дуг сети U, со следующими свойствами:

1) величина потока по каждой дуге не должна превосходить ее пропускной способности $0 \le \varphi(i, j) \le c(i, j)$ $(i, j) \in U$;

2) величина потока, входящего в каждую вершину сети, за исключением входа и выхода, равна величине потока, выходящего из этой вершины.

$$\sum_{j \in N_i} \varphi^-(i, j) - \sum_{j \in \overline{N}_i} \varphi^+(j, i) = 0, \quad i \ne s, \quad j \ne t,$$

где N_i – множество вершин, инцидентных дугам, направленным от вершины i; исходящие;

$\overline{N}_i$ – множество вершин, инцидентных дугам, направленным к вершине i, входящие.

Из определения потока следует, что величина потока не исчезает и не накапливается в вершинах сети и, следовательно, количество потока из входа s равно количеству потока, заходящему в выход t. Это значение называется величиной потока V. Таким образом, поток в сети сохраняется, а величина потока равняется сумме значений потоков, выходящих из вершины s или входящих в вершину t:

$$V = \sum_{j \in N_s} \varphi^-(s, j) = \sum_{j \in N_t} \varphi^+(j, t).$$

На рис. 4.2.1 изображена сеть автомобильных потоков, которая представяет ориентированную сеть $S = (N, U)$ имеющую множество вершин $N = \{1, 2, 3, 4\}$ и множество дуг $U = \{(1, 2); (2, 3); (2, 4); (1, 3); (3,4)\}$.

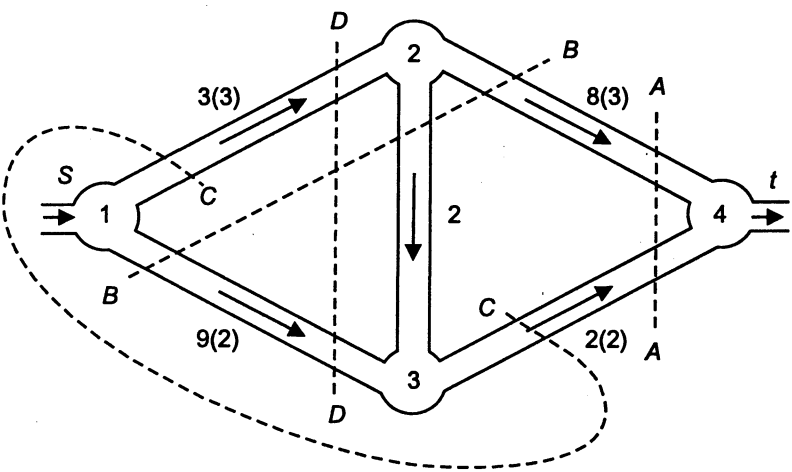


Рис. 4.2.1. Сеть автомобильных потоков

Количественные характеристики дуг сети, а также взаимосвязь между ее вершинами могут быть представлены с помощью матрицы расстояний $L = \|l_{ij}\|$ или матрицы стоимостей $C = \|c_{ij}\|$.

Для ориентированной сети рис. 4.2.1 матрица смежности имеет вид

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Матрица инциденций ориентированной сети рис. 4.2.1 имеет вид

Вершины N	Дуги (i, j)				
	(1, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(1, 3)	(3, 4)
1	–1	0	0	–1	0
2	1	–1	–1	0	0
3	0	1	0	1	–1
4	0	0	1	0	1

На рис. 4.2.1 стрелками показано направление одностороннего разрешенного движения потоков автомобилей. От одного перекрестка i до другого j пропускная способность по дуге по каждой улице $c(i, j)$ ограничена и определяется максимально допустимой скоростью движения, например 60 км/ч.

В связи с этим мощность автомобильного потока $\varphi(i, j)$ не может превысить допустимую $c(i,j)$. Таким образом, должны выполняться первое свойство потока, условие существования статического или устойчивого потока для каждой улицы:

$$0 \le \varphi(i, j) \le c(i, j) \ (i, j) \in U.$$

Рассматривая взаимодействие ограничений по каждой улице и в совокупности, по всем перекресткам (вершинам сети), условие сохранения потока в этой сети запишем следующим образом:

$$V = \sum_{j \in N_i} \varphi^-(i, j) = \sum_{j \in N_i} \varphi^+(j, i) = 0 \quad i \ne s, \quad j \ne t.$$

Для источника сети при $i = s$ нет входящих потоков, следовательно, $V = \sum_{j \in N_s} \varphi^-(s, j)$.

Для стока при $i = t$ нет выходящих потоков, следовательно, $V = \sum_{j \in N_t} \varphi^+(j, t)$.

Рассмотрим пример анализа ориентированной сети $S = (N, U)$, представленной на рис. 4.2.2, $N = \{s, 1, 2, 3, 4, ..., t\}$; $U = \{(s, 1); (s, 3); (1, 2); (1, 3); (2, t); (3, 2); (3, 4); (4, t)\}$.

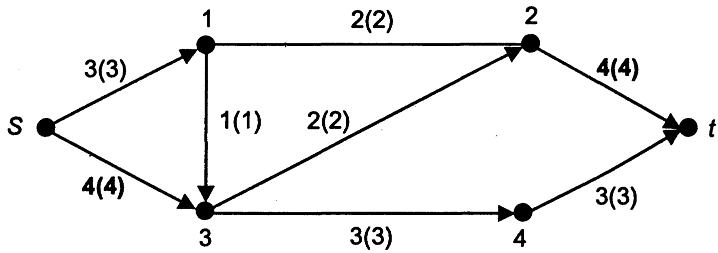


Рис. 4.2.2. Ориентированная сеть

Пропускная способность указана над каждой дугой, где рядом в скобках указано значение существующего потока. Свойства потока в данном случае выполняются, поскольку указанные величины не превышают пропускных способностей дуг. В каждой вершине, отличной от входа и выхода, поток сохраняется. Например, в вершину 2 заходят 4 единицы потока по дугам (1, 2) и (3, 2)и выходят 4 единицы по дуге (2, t). Величина потока в сети составляет $V = 3 + 4 = 7$ и сохраняется.

4.3. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе

Пусть в ориентированной сети $S = (N, U)$ от источника к стоку протекает поток, величина которого равна V. Поскольку пропускная способность каждой дуги $c(i, j)$ является величиной конечной, то максимальная величина допустимого потока всей сети тоже ограничена. Максимальный поток сети определяется на основе одного из основных понятий теории сетей — понятия разреза. Введем понятие разреза.

Множество вершин N сети $S = (N, U)$ можно разбить на два непересекающихся подмножества N_p и $\overline{N}_p$, которые соединяются между собой дугами, образующими множество дуг разреза U_p. Причем исток s принадлежит множеству вершин N_p, а сток t принадлежит множеству вершин $\overline{N}_p$. Тогда величина потока из множества N_p в множество $\overline{N}_p$, протекающего по дугам U_p, не может быть больше, чем сумма пропускных способностей дуг этого множества, что можно записать таким образом:

$$\sum_i \varphi(i, j) \leq \sum_i c(i, j) \quad i \in N_p; \quad j \in \overline{N}_p; \quad (i, j) \in U_p.$$

Этот барьер для потока, отделяющий множество вершин N_p, от множества вершин $\overline{N}_p$, называется *разрезом* и обозначается $(N_p, \overline{N}_p)$. Разрез представляет такое множество дуг U_p, исключение которых отделяет вход от выхода сети, и, следовательно, отделяет множество N_p от $\overline{N}_p$ сети $S = (N, U)$ таким образом, что существование потока в таком случае невозможно и тогда $V = 0$. Причем начало дуги разреза принадлежит множеству N_p, а конец – $\overline{N}_p$. Таким образом, в разрез входят дуги, соединяющие вершины этих множеств.

Величина максимального потока от источника s к стоку t ограничена сверху *величиной разреза* $C(Np, \overline{N}_p)$, определяемой суммой пропускных способностей всех входящих в него дуг множества U_p и, следовательно, $V \leq C(N_p, \overline{N}_p)$. *Минимальным разрезом сети* называется разрез, имеющий минимальную величину.

В соответствии с *теоремой о максимальном потоке и минимальном разрезе*, сформулированной Фордом и Фалкерсоном, величина *максимального потока* $V_{\max}$ от входа s (источника) в выход t (сток) равна величине минимального разреза, отделяющего вход и выход сети и, следовательно, $V_{\max} = \min\limits_{U_p \in U} C(N_p, \overline{N}_p)$.

Рассматриваемые сети являются сетями с ограниченной пропускной способностью и имеют распространение в реальной жизни. Это послужило поводом к появлению и постановке задач о максимальном потоке разной природы, связанных с определением максимально допустимой величины V при соблюдении условий, записанных в виде системы уравнений и неравенств.

В сформулированной выше задаче для сохранения потока автомобилей (см. рис 4.2.1), например, через перекресток (3) необходимо, чтобы поступающие потоки автомобилей к этой вершине (3) $\varphi(1, 3)$ и $\varphi(2, 3)$ равнялись величине потока, вытекающего из этой вершины $\varphi(3, 4)$, что можно записать так:

$$\varphi(1,3) + \varphi(2, 3) \leq \varphi(3, 4).$$

Аналогичные уравнения можно записать для остальных вершин сети. Поскольку задача заключается в определении максимально возможного потока в сети, то необходимо последовательно вычислить потоки через все разрезы и выбрать из них минимальный.

Разрез АА на рис. 4.2.1 отделяет источник (1) от стока (4), в данном случае вершину (4) от остальных вершин (1, 2, 3). Величина разреза определяется пропускной способностью входящих в него дуг (2, 4) и (3, 4) и соответственно равна $C(2, 4) + C(3, 4) = 2 + 8 = 10$. Затем можно определить все другие возможные варианты разрезов (B, B) (D, D) и (C, C). Тогда величина максимального потока от источника к стоку равна величине минимального разреза:

$$V_{\max} = \min\,[(A, A), (B, B), (C, C), (D, D)] = \min[10; 12; 19; 5] = 5.$$

Приведенный вариант анализа фрагмента сети автомагистрали указывает на возможность применения приведенного принципа сохранения потока в коммерческой деятельности. Это позволит своевременно принимать оптимальные управленческие решения и облегчить оперативное вмешательство по регулированию не только автомобильных, но и финансовых или товарных потоков.

Пример. Построим разрезы для сети, представленные на рис. 4.3.1 для различных *множеств* N_p:

1) $N_p = \{s, 1, 4,\}$, тогда $\bar{N}_p = \{2, 3, t\}$, следовательно, дуги разреза $U_p = \{(s, 3); (1, 3); (1, 2); (4, t)\}$ (рис. 4.3.2), таким образом, $C = (N_p, \bar{N}_p) = 10 + 4 + 3 + 9 = 26$;
2) $N_p = \{s, 3\}$, тогда $\bar{N}_p = \{1, 2, 4, t\}$, следовательно, дуги разреза $U_p = \{(s, 1); (3,4); (3,2)\}$ (рис. 4.3.3), таким образом, $C = (N_p, \bar{N}_p) = 5 + 7 + 2 = 14$.

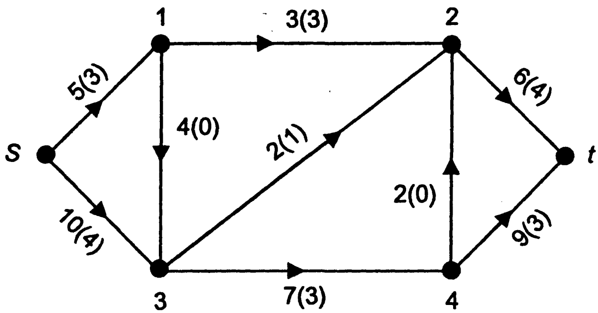


Рис. 4.3.1. Ориентированная сеть

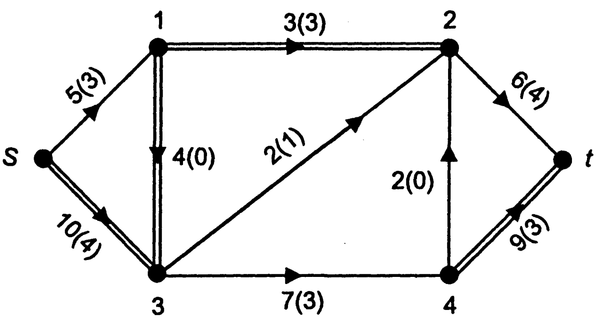


Рис. 4.3.2. Разрез сети, величина разреза 26

На рисунках дуги разрезов выделены. Из рисунков видно, что после удаления дуг разрезов перестают существовать пути движения потока от входа сети s к выходу t. Разрезы имеют различные пропускные способности. Разрез, имеющий минималь-

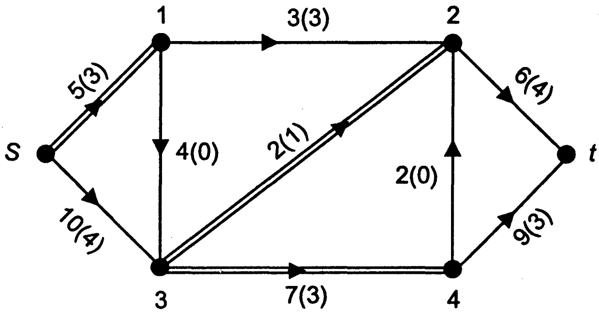


Рис. 4.3.3. Разрез сети, величина разреза 14

ную пропускную способность, называется минимальным разрезом сети.

Рассмотренные алгоритм и примеры моделирования позволяют решать аналогичные по своей природе задачи, например по бесперебойному снабжению потоками электричества, бензина, газа, мазута, нефти, воды, продовольственными и непродовольственными товарами населенных пунктов, и таким образом предупредить появление критических ситуаций в городах и поселках нашей страны.

4.4. Понятия сетевого моделирования

Одним из важных преимуществ сетевого моделирования является возможность построения сетевых моделей, наглядно отображающих процессы коммерческой деятельности. Так, например, на рис. 4.4.1 представлен ориентированный граф движения денежных потоков на счетах бухгалтерского учета, где в кружках указаны номера счетов бухгалтерского учета, а стрелками — проводки.

Значительное место в сетевом моделировании занимают задачи, связанные с планированием и составлением расписания выполнения работ или операций в коммерческой деятельности. В таких моделях множество работ всей совокупности задается от-

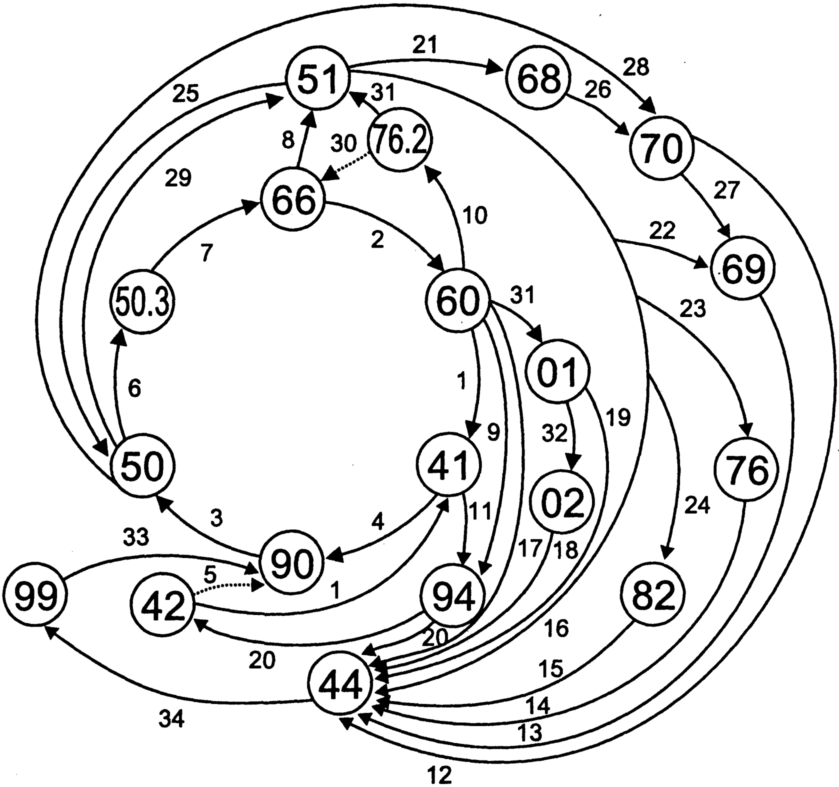


Рис. 4.4.1. Ориентированный граф движения денежных средств на счетах бухгалтерского учета

ношениями предшествования между ними. Например, на рис. 4.4.2 изображена сетевая модель комплекса работ по переводу торгового предприятия на самообслуживание.

Обычно время и ресурсы выполнения каждой работы задаются вначале. Кроме того, прежде чем работа может начаться, все предшествующие ей работы должны быть завершены. Например, доставка оборудования, событие 15 является предшествующей работой (или опорной) для работы по монтажу оборудования.

Рис. 4.4.2. Сетевая модель перевода торгового предприятия на самообслуживание

Следовательно, при наличии полного перечня работ комплекса сеть можно построить, если точно установлены предшествующие операции для каждой работы. В таких случаях сетевая модель представляет собой отражение логической взаимосвязи всех входящих элементарных работ в комплекс от начала до конца. Сетевые графики представляют собой орграфы без контуров, дугам и вершинам которых приписаны числовые значения. Наибольшее распространение получил способ задания сетевых графиков в терминах дуги — операции, а вершины – события.

Исходное (1) – это такое событие, с которого начинается выполнение всего комплекса операций, а завершающее событие (32) соответствует достижению конечной цели. События обозначаются кружками, квадратами, ромбами или другими геометрическими фигурами.

В сетевом моделировании различают следующие понятия:

1) фактическая работа (6, 7) изображена стрелкой (→), это процесс, требующий затрат ресурсов — времени, денег, людей, электроэнергии, товаров и т.п.;

2) работа-ожидание (— · — · →), это процесс, требующий только затрат времени, например ожидание, сушка, старение, затвердевание цементного раствора и т.п.;

3) критическая работа (⇒), наиболее напряженная, нагруженная работа (13, 15);

4) фиктивная работа (- - - →) обозначает логическую зависимость между работами (28, 29), имеет нулевую продолжительность;

5) путь – любая непрерывная последовательность событий и работ;

6) критический путь – это путь, не имеющий резервов, включает только критические работы (1, 2), (2,12), (12,13), (13,15), (15, 27), (27, 29), (29, 30), (30, 31), (31,32).

Приведенные определения, понятия и графические изображения являются основой методов сетевого планирования и управления, позволяющие проводить построение, а затем анализ и оптимизацию сетевых моделей задач коммерческой деятельности.

4.5. Постановка сетевых задач коммерческой деятельности

4.5.1. Задача о максимальном потоке

Рассмотрим двухполюсную сеть $S = (N, U)$ с одним входом (источником) $s \in N$ и выходом (стоком) $t \in N$, дуги сети $(i, j) \in U$ имеют ограниченную пропускную способность c_{ij}. Задача о максимальном потоке заключается в поиске таких потоков φ_{ij} по дугам (i, j) сети, что результирующий поток из источника в сток является максимальным.

Математическая модель задачи о максимальном потоке выглядит следующим образом:

найти такие значения φ_{ij}, при которых

$$V = \sum_j \varphi^+_{sj} = \sum_j \varphi^-_{jt} \Rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi_{ij} \le c_{ij} \\ \sum_j \varphi_{ij} - \sum_j \varphi_{ji} = 0, \quad i \in N, \quad i \ne s, \quad i \ne t. \end{cases}$$

Для решения этой задачи может быть использован метод построения увеличивающих цепей.

4.5.2. Задача о потоке минимальной стоимости

Пусть дана двухполюсная сеть $S = (N, U)$ с источником s и стоком t.

Для каждой дуги $(i, j) \in U$ заданы пропускная способность c_{ij} и стоимость доставки по ней единицы потока r_{ij}. Необходимо найти поток от источников в сток заданной величины V, имеющей минимальную стоимость доставки. Очевидно, при этом поток V не должен превышать максимальной величины $V_{\max}$.

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$R=\sum_i\sum_j r_{ij}\varphi_{ij}\to\min$$

$$\begin{cases}\sum\limits_j \varphi_{sj}=\sum\limits_j \varphi_{jt}=V,\\ \sum\limits_j \varphi_{ij}-\sum\limits_j \varphi_{jt}=0, \quad i\in N, \quad i\neq s, \quad i\neq t,\\ 0\leq\varphi_{ij}\leq c_{ij} \quad (i,\ j)\in U.\end{cases}$$

4.5.3. Транспортная задача

Транспортная задача является одной из первых потоковых задач, которая была сформулирована и решена в 1941 г. Ф. Хичкоком, а затем стала применяться в различных задачах перевозки и распределения. В этой задаче рассматриваются предложение грузов (товаров) от m-поставщиков в объемах a_1, a_2, a_3, ..., a_i, ..., a_m и спрос от n-покупателей в объемах b_1, b_2, b_3, ..., b_j, ..., b_n, затраты на перевозку единицы груза от i-го поставщика к j-му покупателю составляют c_{ij}, а объемы перевозимых грузов соответственно составляют x_{ij}, которые необходимо определить. Математическая модель имеет следующий вид.

Определить такие объемы перевозок

$$x_{ij}=?\ i=\overline{1,m};j=\overline{1,n},$$

которые при условиях-ограничениях

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}\leq a_i, \quad i=\overline{1,m},\\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}\geq b_j, \quad j=\overline{1,n},\\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_i=\sum\limits_{j=1}^{n} b_j,\\ x_{ij}\geq 0\end{cases}$$

обеспечивали бы минимальные затраты на перевозку в соответствии с целевой функцией

$$F(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\rightarrow \min.$$

Модель этой задачи может быть представлена в виде сети (рис. 4.5.1), если вершинам поставить в соответствие поставщиков и покупателей, а ориентированным дугам – пути для перевозки грузов.

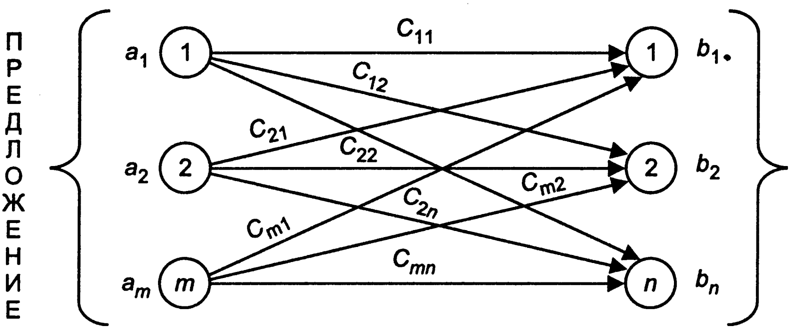


Рис. 4.5.1. Сетевая модель транспортной задачи

Эта задача является частным случаем задачи поиска потока минимальной стоимости. В то же время частным случаем транспортной задачи являются задачи о назначениях, например задача оптимального распределения по населенным пунктам торговых агентов или маркетологов для изучения рынка.

4.5.4. Задача коммивояжера

В коммерческой деятельности коммерсанты, торговые агенты постоянно проводят работу по поиску партнеров или клиентов для заключения договоров на поставку и покупку товаров. Для решения этих задач коммерсантам необходимо выезжать в командировки, выполнять вояж по целой сети городов как по нашей стране, так и за рубежом. Поскольку продолжительность командировки и транспортные расходы следует сокращать, то необходимо перед поездкой составить кратчайший маршрут, предусматривающий посещение каждого пункта только один раз, и возвращение обратно. Задача коммивояжера заключается в определении такой последовательности объезда городов, которая обеспечит минимальное время переезда, или минимальную стоимость проезда, или минимальное расстояние переезда.

Постановка задачи. Пусть имеется n городов. Расстояния между любой парой городов (i, j) известны и составляют d_{ij}, где $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$. Если прямого маршрута сообщения между городами не существует, а также для всех $i = j$ полагаем, что $d_{ij} = \infty$. На этом основании расстояния между городами удобно представить в виде матрицы $D = (d_{ij})_{n \times n}$.

Если городам поставить в соответствие вершины графа (рис. 4.5.2), а соединяющим их дорогам ребра, то в терминах теории графов задача заключается в определении гамильтонова цикла минимальной длины. Гамильтонов цикл включает все вершины графа ровно один раз, причем начальная вершина совпадает с ко-

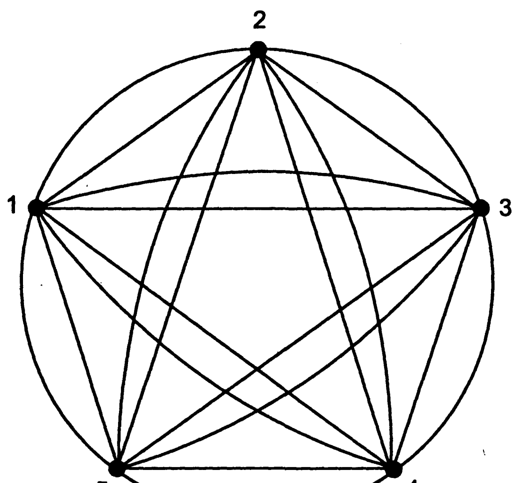


Рис. 4.5.2. Неориентированный граф задачи коммивояжера

нечной, а длина определяется суммой длин всех ребер. Таким образом, необходимо построить кольцевой маршрут проезда всех городов минимальной длины, начиная с любого пункта и в любую сторону.

Поскольку всего городов n, то коммивояжер, выехав из заданного города, должен побывать в остальных $(n-1)$ городах только один раз. Следовательно, всего существует $(n-1)!$ возможных маршрутов, среди которых один или несколько – оптимальные. В большинстве случаев можно предположить, что расстояние между городами i и j является симметричным и равно расстоянию от города j до города i, т. е. $d_{ij} = d_{ji}$. Расстояния между городами запишем в виде матрицы D. Если в задаче n городов, то D является матрицей размером $(n \times n)$ с неотрицательными элементами $d_{ij} \geq 0$, которые отображают длины ребер в сети городов. Так, при $n = 5$ количество возможных вариантов маршрутов равно $(5-1)! = 24$. Расстояния между городами заданы матрицей в табл. 4.5.1.

Таблица 4.5.1

j \ i	1	2	3	4	5
1	∞	90	80	40	100
2	60	∞	40	50	70
3	50	30	∞	60	20
4	10	70	20	∞	50
5	20	40	50	20	∞

Решение задачи можно представить в виде замкнутого контура, представляющего собой кольцевой маршрут, например, для графа, изображенного на рис. 4.5.2, возможный вариант можно записать в виде совокупности соответствующих пар дуг:

$$M_k = \{(1, 2), (2, 4), (4, 5), (5, 3), (3,1)\}.$$

Длина $F(M_k)$ маршрута равна сумме соответствующих длин ребер матрицы расстояний, тогда целевую функцию можно записать так:

$$F(M_k) = \sum_{(i,j)\in M_k} d_{ij} \to \min \quad i = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, (n-1)}.$$

Для любого допустимого маршрута каждая строка и каждый столбец матрицы расстояний D содержат только по одному элементу. Решением задачи является определение кольцевого маршрута минимальной длины.

4.5.5. Распределение торговых агентов по городам

Торговая фирма продает товары в различных городах. В целях развития торговая фирма провела маркетинговые исследования в n городах и установила покупательную способность в каждом городе по b_j условных единиц. Затем фирма наняла на конкурсной основе n торговых агентов для продвижения своих товаров на продажу в эти города. Профессиональный уровень агентов различен и составляет долю реализуемых товаров i-м агентом a_i. Как распределить торговых агентов по городам, чтобы фирма получила максимальный доход от продажи товаров?

Введем управляющие переменные x_{ij}.

$$x_{ij} = \begin{cases} \text{если } i \text{ агент направлен в } j\text{-й город,} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Введем параметр $d_{ij} = a_i b_j$, который определяет объем товаров, реализуемых i-м торговым агентом в j-м городе.

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = \overline{1, n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Найти такие x_{ij}, которые при условиях-ограничениях обеспечили бы максимальный доход от продажи в соответствии с целевой функцией

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \to \max.$$

Первое и второе условия ограничений формализуют направление в каждый город по одному агенту.

Представленная математическая модель соответствует задаче о назначениях и может быть решена венгерским методом или методом потенциалов.

4.5.6. Формирование оптимального штата фирмы

Коммерческая фирма провела независимый анализ своей работы и установила профессиональную некомпетентность части сотрудников. Проведенные финансовые расчеты показали невыгодность обучения этих сотрудников. Фирма объявила конкурс на замещение вакантных должностей и провела отбор 300 человек из 15 000 претендентов, поскольку обучение некомпетентных сотрудников очень дорого.

На фирме имеется n групп различных должностей: продавцов, кассиров, менеджеров, бухгалтеров, коммерсантов, маркетологов, в каждой из которых по b_j вакантных единиц, $j = \overline{1, n}$. Претенденты проходили тестирование на профессиональную пригодность, по результатам которого их разделяли на m групп по a_i кандидатов в каждой группе, $i = \overline{1, m}$. Для каждого кандидата из i-й группы необходимы дополнительные затраты c_{ij} на обучение для занятия j-й должности. Если $c_{ij} = 0$, претендент соответствует должности, а если $c_{ij} = \infty$, претендент не может вообще занимать рассматриваемую должность. Необходимо так распределить отобранных кандидатов по должностям, чтобы затраты на их обучение были бы минимальными.

Математическую модель задачи можно записать так:

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Решение этой задачи можно получить с помощью методов линейного программирования, в частности методов решения транспортной задачи или венгерским методом.

4.5.7. Планирование работ коммерческой деятельности

В коммерческой деятельности с целью исключения ущербов или неприятных неожиданностей необходимо составлять планы будущих работ, развернутых во времени. Любое множество работ связано отношениями предшествования. Причем каждая работа может быть начата, если все предшествующие ей работы будут завершены. В таких случаях сетевые методы позволяют решать как прямые, так и обратные задачи планирования работ коммерческой деятельности.

В результате решения прямых задач определяется оптимальный план комплекса работ при заданной схеме организации работ.

Решение обратной задачи связано с поиском оптимального плана схемы организации работ, обеспечивающего максимальную эффективность.

Множество возникающих задач коммерческой деятельности можно свести к одной из трех наиболее типичных постановок задач оптимизации.

1. Какое максимальное количество средств и каким образом может быть высвобождено при заданной организации работ при условии, что общее время выполнения всего комплекса работ не возросло?

2. Как наилучшим образом использовать выделенные ограниченные ресурсы, чтобы время выполнения всего комплекса работ не превысило заданной величины?

3. Как распределить выделенные ресурсы между работами, чтобы время выполнения всего комплекса работ было бы минимальным?

При этом в исходных данных задач параметры работ могут быть заданы совершенно точно (детерминированный случай) или с некоторой степенью определенности, вероятности (стохастический случай).

Рассмотрим детерминированный вариант постановки задачи.

Подготовка задачи к решению начинается с формирования исходной информации на основе бесед со специалистами, детально представляющих специфику предстоящей работы. Например, специалисты бухгалтерии могут пояснить движение денежных средств предприятия с указанием счетов и проводок бухгалтерского учета, что позволило построить ориентированный граф, представленный на рис. 4.5.3.

После описания содержания комплекса работ коммерческой деятельности следует выделить определяющие их характеристики. В качестве таковых могут быть:

B – общие ресурсы по выполнению комплекса работ;

b_{ij} – выделенные ресурсы для выполнения элементарной работы (i, j);

t_{ij} – длительность выполнения элементарной работы (i, j) выделенными ресурсами b_{ij};

c_{ij} – коэффициент пересчета ресурсов работы (i, j); $c_{ij} = \dfrac{1}{b_{ij}}$;

T – время выполнения всего комплекса;

n – количество работ.

Затем проводят выбор главного экономического показателя, критерия эффективности, по которому определяется успех выполнения всего комплекса, например время выполнения работ T или ресурсы B. В качестве критерия эффективности выбираем T – время, которое необходимо найти минимальным из возможных.

В начале решения задачи рассматривается исходный вариант распределения общих ресурсов B по элементарным работам b_{ij}, что и определяет длительность их выполнения, поскольку известна связь $t_{ij}=f(b_{ij})$.

Затем проводятся следующие операции:

а) составляется перечень всех работ, которые необходимо включить в сетевой график; б) указывается логическая очередность выполнения работ (предшествующие и последующие); в) определяются ресурсы для каждой работы, длительность их выполнения; г) определяются правила пересчета ресурсов при их перераспределении между работами; д) все сведения представляют в виде структурно-временной таблицы. Например, табл. 4.5.2 составлена для комплекса работ по переводу предприятия на самообслуживание.

Таблица 4.5.2

Работа (i,j)	Содержание работы	Ресурсы, b_{ij}	Коэффициенты пересчета $c_{ij}=1/b_{ij}$	Длительность работ, дни t_{ij}	
				фактически	оптимальная
(0, 1)	Составление сметы	$b_{0,1}$	$c_{0,1}=0,1$	$t_{0,1}=15$	?
(1, 2)	Приобретение оборудования	$b_{1,2}$	$c_{1,2}=0,2$	$t_{1,2}=16$	?
(1, 3)	Подбор кадров	$b_{1,3}$	$c_{1,3}=0,5$	$t_{1,3}=6$	?
(2, 4)	Монтаж оборудования	$b_{2,4}$	$c_{2,4}=0,3$	$t_{2,4}=6$	?
(3, 5)	Подготовка кадров	$b_{3,5}$	$c_{3,5}=0,6$	$t_{3,5}=5$	?
(4, 6)	Оформление зала	$b_{4,6}$	$c_{4,6}=0,4$	$t_{4,6}=8$	?
(5, 6)	Доставка товаров	$b_{5,6}$	$c_{5,6}=0,7$	$t_{5,6}=6$	?
(5, 8)	Заказ и получение формы	$b_{5,8}$	$c_{5,8}=0,9$	$t_{5,8}=14$	?
(5, 7)	Заказ и получение ценников	$b_{5,7}$	$c_{5,7}=1,0$	$t_{5,7}=8$	?
(6, 8)	Выкладка товаров	$b_{6,8}$	$c_{6,8}=0,8$	$t_{6,8}=2$	?
(7, 8)	Заполнение ценников	$b_{7,8}$	$c_{7,8}=1,1$	$t_{7,8}=4$	?
(8, 9)	Генеральная репетиция	$b_{8,9}$	$c_{8,9}=1,2$	$t_{8,9}=3$	?

Задача состоит в поиске минимального времени выполнения всего комплекса работ при заданных ограничениях в ресурсах B путем их оптимального перераспределения между работами.

Поскольку управляемыми параметрами являются ресурсы элементарных работ b_{ij}, определяющие длительность их выполнения t_{ij}, то необходимо найти новый вариант перераспределения выделенных ресурсов B путем переноса с одних работ (i, j) части ресурсов $0 < x_{ij} \le b_{ij}$ на другие работы (h, k), т. е. $x_{ij} = x_{hk}$ так, чтобы общий срок выполнения работ был минимальным из возможных.

Математическую модель задачи по переводу предприятия розничной торговли на самообслуживание можно представить таким образом:

найти такой вариант распределения ограниченных ресурсов B между элементарными работами

$$b_{0,1} = ?\ b_{1,2} = ?\ b_{2,3} = ?\ b_{3,4} = ?\ \ldots\ b_{8,9} = ?$$

и такие неотрицательные значения длительностей их выполнения

$$t_{0,1} = ?\ t_{1,2} = ?\ t_{2,3} = ?\ t_{3,4} = ?\ \ldots\ t_{8,9} = ?$$

которые бы при заданных ограничениях

$$0 < x_{ij} \le b_{ij},\ \ x_{ij} = x_{hk},\ \ t_{ij} > 0,\quad B = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$$

обращали бы в минимум функцию цели:

$$T = f\{t_{0,1} = f(b_{0,1});\ t_{1,2} = f(b_{1,2});\ t_{2,3} = f(b_{2,3});\ \ldots,\ t_{8,9} = f(b_{8,9})\} \to \min.$$

Решение задач этого класса может быть решено методами сетевого планирования, рассмотренными в п. 4.6.3.

4.6. Методы решения сетевых задач

4.6.1. Построение максимального потока

На практике часто возникают задачи определения максимального количества товара, которое может быть перевезено от производителя потребителю. Аналогичными являются задачи определения максимальной пропускной способности системы автомагистралей или энергосети определения максимального количества нефти или газа, передаваемых по трубопроводам, информации, пропускаемой по компьютерной или телефонной сети. Формально эти проблемы сводятся к задаче построения максимального потока в сети. Для их решения необходимо ввести несколько определений.

Пусть задана сеть $S = (N, U)$ с множеством вершин N и множеством дуг U.

Определение. Дуга $u \in U$, соединяющая вершины $i \in N, j \in N$ сети S, называется *допустимой дугой*, если она обладает одним из следующих свойств:

1) направление дуги совпадает с направлением потока, и значение потока по этой дуге меньше ее пропускной способности:

$$u = (i, j),\ \varphi(u) < c(u);$$

2) направление дуги, противоположное направлению потока, а величина потока отлична от нуля:

$$u = (j, i),\ \varphi(u) > 0.$$

Дуги, обладающие первым свойством, называют *увеличивающими;* дуги, обладающие вторым свойством, – *уменьшающими*.

Определение. Увеличивающей цепью, соединяющей вход и выход сети, называется простая цепь, все дуги которой являются допустимыми.

Пример. Построим увеличивающую цепь для сети $S = (N, U)$, представленной на рис. 4.6.1.

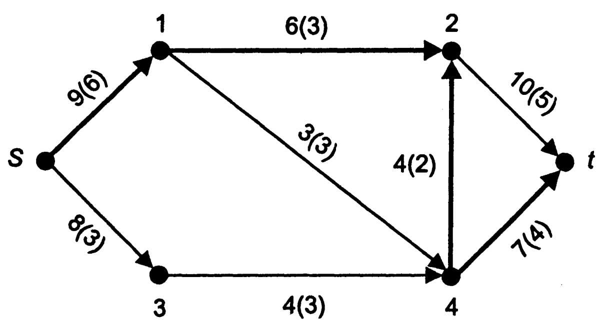


Рис. 4.6.1. Построение увеличивающей цепи

Над каждой дугой указана ее пропускная способность и в скобках – величина потока по этой дуге.

Цепь (*s*, 1, 2, 4, *t*) является увеличивающей, так как все ее дуги – допустимые:

дуга (*s*, 1) – увеличивающая, так как она проходит по направлению потока и поток по ней меньше ее пропускной способности: 6 < 9;

дуга (1, 2) – также увеличивающая дуга: 3 < 6;

дуга (2, 4) – уменьшающая, так как она а) проходит против движения потока б) поток по ней 2 > 0;

дуга (4, *t*) – увеличивающая: 4 < 7.

Построим увеличивающую цепь для сети, представленной на рис. 4.6.2.

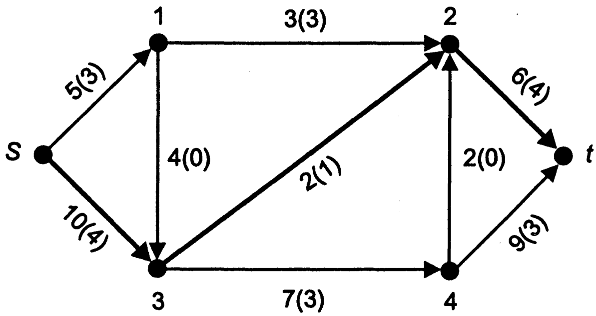


Рис. 4.6.2. Построение увеличивающей цепи

Цепь (s, 3, 2, *t*) – увеличивающая, так как все ее дуги являются допустимыми увеличивающими дугами.

Определение максимального потока основано на увеличении потока вдоль увеличивающей цепи на величину $\Delta\varphi$.

Алгоритм построения максимального потока включает следующую последовательность:

1) задание начального значения потока. Удобно задавать нулевое начальное значение ($V_0 = 0$);

2) построение увеличивающей цепи от входа к выходу сети. Если такой цепи нет, то максимальный поток построен, и его величина

$$V_{\max} = \sum_{j=N_p} \varphi(s,j) = \sum_{j=\bar{N}_p} \varphi(j,t),$$

в противном случае переходят к пункту 3;

3) увеличение вдоль построенной цепи значения потока на максимально возможную величину $\Delta\varphi$, при этом по каждой увеличивающей дуге поток увеличивается на $\Delta\varphi$, а по каждой уменьшающей дуге уменьшается на $\Delta\varphi$.

Возврат к пункту 2).

Пример. Определим максимальный поток для сети (см. рис. 4.6.1). Начальный поток в сети задан, следовательно, пункт 1 алгоритма выполнен.

1. Увеличим поток вдоль цепи (s, 1, 2, 4, t).

Вдоль дуги (s, 1) поток можно увеличить на разницу между пропускной способностью этой дуги 9 и уже проходящим по ней потоком 6 (9 – 6 = 3).

Вдоль дуги (1, 2) аналогичным образом поток можно увеличить на 3 (6 – 3).

Дуга (2, 4) является уменьшающей. Максимальная величина, на которую можно уменьшить поток по ней, равна 2, т.е. значению уже проходящего потока.

По дуге (4. t) поток можно увеличить на 3 (7 – 4).

Таким образом, максимальная величина $\Delta\varphi$, на которую можно увеличить поток, составляет наименьшую из величин:

$$\Delta\varphi = \min(3, 3, 2, 3) = 2,$$

при этом на каждой увеличивающей дуге поток увеличивается на эту величину, а по каждой уменьшающей – уменьшается.

Новое значение потока записано в скобках над дугой (рис. 4.6.3).

После такого перераспределения значение потока увеличилось на 2 и стало равным $V = 11$ (8 + 3 = 6 + 5), а условие сохранения потока в вершинах сети по-прежнему выполняется. Заметим, что если увеличить поток не на 2, а на 3, то на дуге (4, 2) получим отрицательное значение –1 (2 – 3), что противоречит свойству неотрицательности потока.

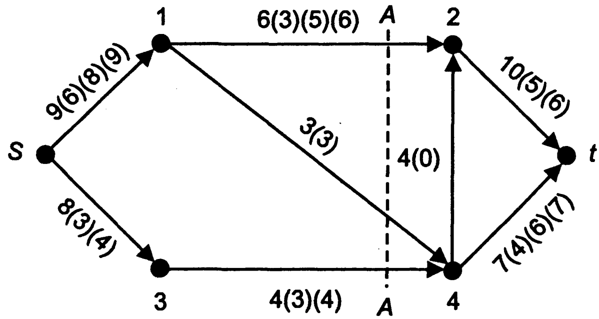


Рис. 4.6.3. Построение максимального потока

2. Рассмотрим теперь цепь (s, 1, 2, t).

Эта цепь увеличивающая, так как все дуги – допустимые. Поток вдоль этой цепи можно увеличить на

$$\Delta\varphi = \min(9 - 8;\ 6 - 5;\ 10 - 5) = 1.$$

Новое значение потока указано во вторых скобках на рис. 4.6.3.

Заметим, что если допустить увеличение потока на 5, то поток по дугам (s, 1) и (1, 2) превзойдет пропускную способность этих дуг.

3. Затем рассмотрим цепь (s, 3, 4, t):

$$\Delta\varphi = \min(8 - 3;\ 4 - 3;\ 7 - 6) = 1.$$

Больше увеличивающих цепей нет, следовательно, максимальный поток построен. Его величина:

$$V_{max} = 11 + 1 + 1 = 9 + 4 = 6 + 7 = 13.$$

Минимальный разрез АА, соответствующий этому потоку, содержит дуги: {(1, 2); (1,4); (3,4)}, а его пропускная способность $6 + 3 + 4 = 13$ соответствует величине максимального потока.

Из примера следует, что значение $\Delta\varphi$, на которое увеличивается поток вдоль увеличивающей цепи, определяется следующим образом:

$$\Delta\varphi = \min_{u \in U}\{\Delta\varphi(u)\} = \begin{cases} c(u) - \varphi(u), & \text{если дуга увеличивающая} \\ \varphi(u), & \text{если дуга уменьшающая.} \end{cases}$$

Специалистам часто приходится изучать возможности сетей с незаданной, жестко фиксированной ориентацией, например, автомагистралей с двухсторонним движением при отсутствии сплошной разделительной полосы. При этом неориентированные сети позволяют увеличить значение максимальных потоков по ним.

Построить максимальный поток в этом случае можно по следующему алгоритму:

1) заменить каждое ребро сети, не выходящее из источника и не входящее в сток, двумя противоположно направленными дугами, имеющими каждая ту же пропускную способность, что и заменяемое ребро;

2) перейти к алгоритму построения максимального потока для ориентированной сети.

Пример. Построим максимальный поток (сначала) для ориентированной сети, представленной на рис. 4.6.4.

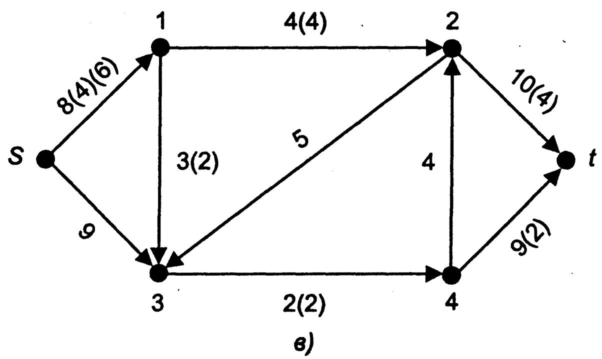


Рис. 4.6.4. Построение максимального потока в ориентированной сети

Начальное значение потока равно нулю $V = 0$.

Увеличивающие цепи:

1) $(s, 1, 2, t)$, $\Delta\varphi = \min(8, 4, 10) = 4$;

2) $(s, 1, 3, 4, t)$, $\Delta\varphi = \min(8 - 4, 3, 2, 9) = 2$.

Больше увеличивающих цепей построить нельзя.

$$V_{\max} = 6.$$

Пример. Построим максимальный поток для сети с той же структурой (рис. 4.6.5).

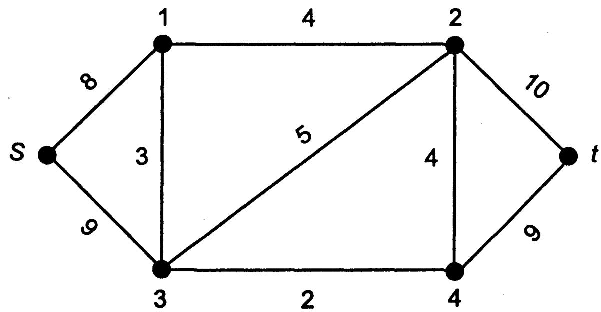


Рис. 4.6.5. Сеть

Заменяя ребра двумя противоположно направленными дугами, получаем следующую сеть (рис. 4.6.6).

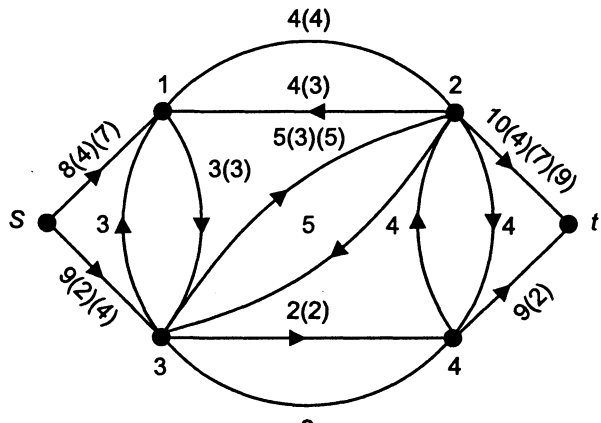


Рис. 4.6.6. Построение максимального потока в неориентированной сети

Увеличивающие цепи:

1) $(s, 1, 2, t)$, $\Delta\varphi = 4$;
2) $(s, 1, 3, 4, t)$, $\Delta\varphi = 3$;
3) $(s, 3, 2, t)$, $\Delta\varphi = 2$;
4) $(s, 3, 4, t)$, $\Delta\varphi = 2$.

Больше увеличивающих цепей не существует. Максимальный поток $V_{max} = 7 + 4 = 9 + 2 = 11$. Оптимальная ориентация сети показана на рис. 4.6.7.

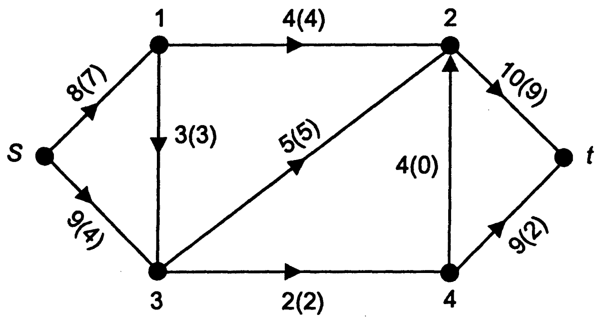


Рис. 4.6.7. Оптимальная ориентация сети

4.6.2. Метод ветвей и границ

Существует достаточно большой класс задач, в которых для нахождения оптимального решения необходимо перебрать все возможные варианты решений по какому-либо критерию. Однако такой прямой перебор может занять очень много времени. Например, для выбора оптимальной последовательности проведения маркетинговых исследований группой из m специалистов разного профиля в n объектах рынка необходимо перебрать большое множество вариантов. В задаче коммивояжера для формирования оптимального маршрута объезда n городов необходимо выбрать один лучший из $(n - 1)!$ вариантов по критерию времени, стоимости или длине маршрута. Эта задача связана с определением гамильтонова цикла минимальной длины. В таких случаях множество всех возможных решений следует представить в виде дерева – связного графа, не содержащего циклов и петель. Процесс разбиения множества всех маршрутов на непересекающиеся подмножества в виде дерева представлен на рис. 4.6.8. Корень этого дерева объединяет все множество вариантов, а вершины дерева – это подмножества частично упорядоченных вариантов решений.

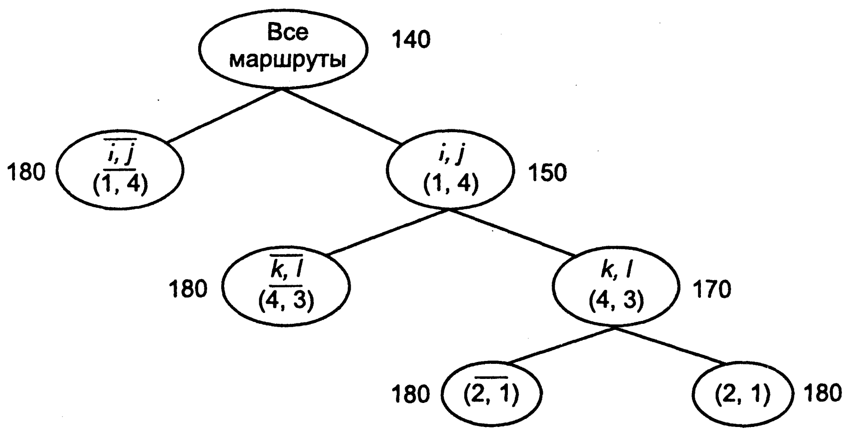


Рис. 4.6.8. Дерево ветвления маршрутов

Вершина (i, j) соответствует подмножеству всех маршрутов, содержащих ребро (i, j), а вершина $(\overline{i, j})$ – подмножеству всех маршрутов, где это ребро отсутствует.

Процесс разбиения на эти подмножества можно рассматривать как ветвление дерева. Поэтому метод называется *методом поиска по дереву решений*, или *методом ветвей и границ*.

Метод ветвей и границ представляет собой алгоритм направленного перебора множества вариантов решения задачи. Сущность этого метода состоит в том, что от корня дерева ветвятся не все вершины.

Вначале проводится оценка каждой вершины первого уровня, а затем ветвится та вершина, которая получает лучшую оценку (минимальную или максимальную) в соответствии с выбранным критерием. Однако вычислить точное значение критерия, не перебрав всех вариантов, невозможно. Чтобы избежать этой рутины, используют не точное значение критерия, а оценку снизу или сверху, которую называют нижней оценкой границы и верхней оценкой границы множества вариантов. При этом оценка вершины должна удовлетворять следующим требованиям:

1) оценка не должна быть больше (при минимизации) или меньше (при максимизации) минимального (максимального) значения функции для рассматриваемого множества;

2) оценка подмножества нижнего уровня не должна быть меньше (при минимизации) или больше (при максимизации) значения оценки подмножества более высокого уровня;

3) оценка единственного варианта решения на последнем уровне точно совпадает со значением критерия целевой функции решения.

Процесс разбиения на подмножества позволяет получить подмножество, содержащее оптимальный маршрут. Пары городов (звенья) маршрута фиксируются при движении по дереву в обратном направлении к начальной вершине. На каждом шаге итерации на основе сравнения нижних границ подмножеств ветвление выполняется только из вершины, имеющей меньшее значение нижней границы.

Рассмотрим решение задачи коммивояжера с исходными данными, записанными в табл. 4.5.1.

Для определения нижней границы множества воспользуемся операцией редукции или приведения матрицы по строкам, для чего необходимо в каждой строке матрицы D найти минимальный элемент табл. 4.6.1.

$$d_i = \min_j d_{ij}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таблица 4.6.1

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	d_i
1	∞	90	80	40	100	40
2	60	∞	40	50	70	40
3	50	30	∞	60	20	20
4	10	70	20	∞	50	10
5	20	40	50	20	∞	20

Затем вычесть его из элементов рассматриваемой строки. В связи с этим во вновь полученной матрице табл. 4.6.2 в каждой строке будет как минимум один ноль.

Таблица 4.6.2

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	50	40	0	60
2	20	∞	0	10	30
3	30	10	∞	40	0
4	0	60	10	∞	40
5	0	20	30	0	∞
d_j	0	10	0	0	0

Затем такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце табл. 4.6.2 находим минимальный элемент

$$d_j = \min_i d_{ij}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Таким образом мы получим полностью редуцированную матрицу табл. 4.6.3, где величины d_i и d_j называют константами приведения.

Сумма констант приведения определяет нижнюю границу:

$$H = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i + \sum_{j=1}^{n} d_j \right) = 140.$$

Таблица 4.6.3

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	d_i
1	∞	40	40	$0^{(40)}$	60	40
2	20	∞	$0^{(20)}$	10	30	10
3	30	$0^{(10)}$	∞	40	$0^{(30)}$	0
4	$0^{(10)}$	50	10	∞	40	10
5	$0^{(0)}$	10	30	$0^{(0)}$	∞	0
d_j	0	10	10	0	30	

Элемент матрицы d_{ij} соответствует расстоянию от пункта i до пункта j. Поскольку в матрице n городов, то D является матрицей $n{\times}n$ с неотрицательными элементами $d_{ij} \geq 0$. Каждый допустимый маршрут представляет собой цикл, по которому коммивояжер посещает город только один раз и возвращается в исходный город. Длина маршрута определяется выражением

$$F(M_k) = \sum_{(i,j)\in M_k}^{n} d_{ij}, \quad k = \overline{1;\,(n-1)},$$

причем каждая строка и столбец входят в маршрут только один раз с элементом d_{ij}.

Определяем ребро ветвления и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i, j) и $(\overline{i, j})$ (рис. 4.6.8). С этой целью для всех клеток матрицы табл. 4.6.3 с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на ∞ и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках (табл. 4.6.3). Наибольшая сумма констант приведения равна (40 + 0) = 40 для ребра (1,4), следовательно, множество разбивается на два подмножества $\{(1,4)\}$ и $\{(\overline{1,4})\}$.

Исключение ребра (1,4) проводим путем замены элемента $d_{1,4} = 0$ на ∞, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества $\{(\overline{1,4})\}$, в результате получим редуцированную матрицу (табл. 4.6.4).

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества

$$H(\overline{1,4}) = 140 + 40 = 180.$$

Таблица 4.6.4

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	d_i
1	∞	40	40	∞	60	40
2	20	∞	0	10	30	0
3	30	0	∞	40	0	0
4	0	50	10	∞	40	0
5	0	10	30	0	∞	0
d_j	0	0	0	0	0	40

Включение ребра (1,4) проводится путем исключения всех элементов первой строки и четвертого столбца табл. 4.6.4, в которой элемент $d_{4,1} = 0$ заменяем на ∞, для исключения образования негамильтонова цикла. В результате получим другую сокращенную матрицу (4 × 4) табл. 4.6.5, которая подлежит операции приведения.

Таблица 4.6.5

$i \backslash j$	1	2	3	5	d_i
2	20	∞	0	30	0
3	30	0	∞	0	0
4	∞	50	10	40	10
5	0	10	30	∞	0
d_j	0	0	0	0	10

Сумма констант приведения сокращенной матрицы

$$\sum_i d_i + \sum_j d_j = 10.$$

После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид табл. 4.6.6.

Нижняя граница подмножества {(1,4)} равна:

$$H(1,4) = 140 + 10 = 150 < 180.$$

Таблица 4.6.6

$i \backslash j$	1	2	3	5	d_i
2	20	∞	$0^{(20)}$	30	20
3	30	$0^{(10)}$	∞	$0^{(30)}$	0
4	∞	40	$0^{(30)}$	30	30
5	$0^{(30)}$	10	30	∞	10
d_j	20	10	0	30	

Поскольку нижняя граница этого подмножества {(1,4)} меньше, чем подмножества $\{\overline{(1,4)}\}$, то ребро (1,4) включаем в маршрут.

Затем опять определяем ребро ветвления. С этой целью определяем сумму констант приведения (указаны в скобках) табл. 4.6.6 для нулевых клеток, заменяя их поочередно на ∞. Максимальная сумма констант $d_4 + d_3 = 30 + 0 = 30$ принадлежит ребру (4,3). Следовательно, разбиваем множество маршрутов {(1,4)} на два подмножества $\{(1,4); (\overline{4,3})\}$ и {(1,4); (4,3)}. Затем проводим исключение ребра (4,3) путем замены элемента матрицы $a_{43} = 0$ на ∞ и определяем $H(4,3) = 130$. Включаем ребро (4,3), определяем $H(\overline{4,3}) = 170$. Продолжая дальше операции в соответствии с указанным алгоритмом решения задачи, в конечном итоге получаем сокращенную матрицу табл. 4.6.7.

Таблица 4.6.7

$i \backslash j$	2	5
3	∞	0
5	0	∞

В соответствии с этой матрицей включаем в гамильтонов маршрут ребра (3,5) и (5,2). В результате по дереву ветвлений гамильтонов цикл образуют ребра (1,4), (4,3), (3,5), (5,2), (2,1), рис. 4.6.9. Последовательность объезда городов коммивояжером 4 – 4 – 3 – – 5 – 2 – 1 представлена матрицей смежности в табл. 4.6.8. Длина маршрута равна $F(M_k) = 180$ совпадает с нижней границей подмножества.

Таблица 4.6.8

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	0
2	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1
4	0	0	1	0	0
5	0	1	0	0	0

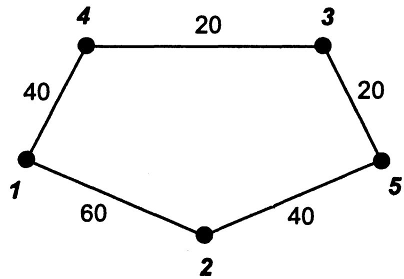


Рис. 4.6.9. Гамильтонов цикл коммивояжера

Алгоритм решения задач методом ветвей и границ включает следующую последовательность.

1. Проводим операцию редукции матрицы расстояний по строкам и столбцам, находим нижнюю границу всего множества маршрутов: $H = \sum_i d_i + \sum_j d_j$.

2. В каждой клетке, в которых $d_{ij} = 0$, заменяем поочередно нули на ∞, затем находим суммы новых констант приведения: $d_i + d_j$, которые записываем в клетках рядом с нулем в скобках табл. 4.6.3, 4.6.6.

3. Выбираем ребро ветвления (i, j) по максимальной величине суммы констант приведения. Затем исключаем его из множества путем замены элемента матрицы $d_{ij} = \infty$. В результате будет образовано подмножество маршрутов $\{(i, j)\}$.

4. Редуцируем полученную матрицу расстояний и определяем нижнюю границу этого подмножества маршрутов $H(i, j)$.

5. Включаем дугу (i, j) в маршрут путем исключения i-й строки и j-го столбца из матрицы и замены симметричного элемента матрицы $d_{ji} = \infty$ для исключения образования негамильтонова цикла.

6. Редуцируем сокращенную матрицу и определяем нижнюю границу подмножества $H(\overline{i, j})$.

7. Сравниваем нижние границы подмножеств $H\{(i, j)\}$ и $H\{(\overline{i, j})\}$ и подвергаем подмножество, имеющее меньшее значение нижней границы, ветвлению.

8. Определяем гамильтонов цикл при получении матрицы 2×2.

4.6.3. Методы сетевого планирования

Современное разнообразие, многосвязность и взаимозависимость задач коммерческой деятельности вызывают большие трудности при планировании реальных сроков их выполнения.

Традиционные, сложившиеся методы планирования и управления иногда не обеспечивают выполнение операций в коммерческой деятельности в намеченные сроки и не позволяют определить оптимальные объемы ресурсов, а, как известно, «время — деньги».

Необходимым свойством системы планирования и управления работами является способность оценить текущее состояние, учесть возможное состояние в будущем, предсказать дальнейший ход работ и таким образом предупредить от возможных ошибок, заранее оперативно воздействовать на ход комплекса работ в сжатые сроки и с наименьшими затратами.

Наиболее эффективны в настоящее время сетевые методы и модели, на базе которых созданы методы сетевого планирования и управления (СПУ). Такие системы предназначены для управления объектами особого типа и сложности, получившими название комплексов взаимосвязанных работ, коммерческих операций, разработок, которые требуют четкой координации взаимодействия множества исполнителей. СПУ позволяет осуществить надежную координацию всех звеньев и подразделений, участвующих в сложном комплексе. В таких случаях СПУ, по существу, является единственно возможным методом научного планирования и управления по выполнению больших масштабов работ с высокой вероятностью соблюдения заданных сроков их реализации, что является их главным достоинством.

Особенность СПУ заключается в том, что деятельность всех коллективов исполнителей рассматривается в целом как единый комплекс взаимосвязанных и взаимозависимых операций, направленных на достижение общей конечной цели. Здесь используется информационно-динамическая модель особого вида, так называемая сетевая модель логико-математического описания, позволяющая алгоритмизировать расчеты параметров этого процесса: продолжительности, трудоемкости, стоимости и т.д. Системы рассчитаны на использование компьютерных систем обработки исходных и оперативных данных для расчета контролируемых показателей и получения необходимых аналитических и отчетных сводок.

В СПУ применяются графическое изображение или аналитическая запись плана работ, в которых отражается их логическая последовательность, взаимосвязь, продолжительность, стоимость и др. Они создаются с целью оптимизации разработанного плана и текущего управления ходом работ путем периодического сбора информации и соответствующей корректировки плана.

Эти системы являются комплексом графических и расчетных методов, организационных мероприятий и контрольных приемов, обеспечивающих моделирование и динамическую перестройку планов в коммерческой деятельности. Причем графические методы дают наиболее наглядно-обозримую информацию о ходе комплекса работ как в целом, так и в деталях. В целом система СПУ включает сбор, переработку информации, поступающей от управляемого объекта, выработку решений на ее основе и передачу распоряжений на управляемый объект.

СПУ концентрируют внимание руководителей на самых важных работах комплекса, отсеивая второстепенные. Так, при сложившихся методах управления в поле зрения руководителя обычно находится до 70% работ, что, безусловно, затрудняет принятие им эффективных решений. Разработка СПУ позволила установить, что практически лишь около 10% работ от всего комплекса существенно влияют на ход выполнения работ. При этом время, затрачиваемое руководителями на решение вопросов управления, сокращается на 50–60%. Кроме того, все участники работ находятся в объективно равных условиях осведомленности, что оказывает влияние на успех завершения всего комплекса работ в намеченные сроки.

Преимущество СПУ заключается в следующем:

а) концентрирует внимание руководителей на небольшом числе работ и исполнителей;

б) устанавливает четкую взаимосвязь между исполнителями, обеспечивая тесное организационное единство;

в) позволяет в любой момент времени располагать исчерпывающей информацией;

г) обеспечивает непрерывность управления ходом работ, своевременность принятия решений, оперативность вмешательства;

д) позволяет рационально маневрировать выделенными ресурсами;

е) дает большую экономию времени, средств, энергии, материалов и т.д.;

ж) дисциплинирует исполнителей, создается объективная картина качества работ, доступная каждому, исключается штурмовщина;

з) создается возможность выполнения вычислительных работ на компьютере.

В настоящее время методами СПУ решается около 14% задач общего объема применяемых математических методов. Работы по использованию и развитию СПУ получили широкое распространение в разных отраслях народного хозяйства нашей страны и за рубежом, уже накоплен большой опыт и сложилась своя история. Например, в США в конце 50-х годов появилась система CRM – метод критического пути – для управления строительными работами, затем PERT – метод оценки и обзора программ при разработке ракетного вооружения «Поларис».

В России работы по применению методов и моделей СПУ начались с 1961 г. В процессе развития появились различные целевые системы: ПУСК – планирование, управление созданием корабля; СУР – система управления разработками; АСОР – автоматизированная система организации работ; ЦПК – централизованное планирование и контроль и др.

В зависимости от масштаба комплекса работ различают такие системы: с числом событий в сети 10 $\div$ 12 тыс. – большие разработки, средние – 1,5 $\div$ 10 тыс. и малые – до 1,5 тыс. В случае небольших разработок от нескольких десятков событий до 100 используются ручные методы расчета и анализа, в остальных случаях – по специальным компьютерным программам.

Методы и модели СПУ могут с успехом применяться в коммерческой деятельности при выполнении различных комплексов работ: проведении текущего или капитального ремонта; реконструкции коммерческих торговых предприятий; подготовке и проведении оптовых и розничных ярмарок; разработке плана коммерческой деятельности; заготовке, переработке и закладке плодоовощной продукции на длительное хранение; переводе предприятий торговли на самообслуживание; оперативной реконструкции секций супермаркетов; строительстве универсальных оптовых предприятий; разработке плана развития торговой сети; планировании торговой деятельности; составлении бухгалтерского отчета; поставке товаров покупателям; заключении договоров на поставку; открытии нового торгового предприятия, а также многих комплексов финансово-коммерческих операций.

Подготовка задач к решению. На предварительном этапе сетевого моделирования определяются структура комплекса работ, последовательность выполнения отдельных операций, состав и взаимосвязь организаций соисполнителей, ориентировочные сроки поставок, потребность в основных ресурсах и ассигнованиях. Внешние связи плана работ торгового предприятия согласовываются со всеми организациями. Затем переходят к исходному планированию по одному из трех вариантов.

В первом случае проводят расчленение комплекса работ централизованно «сверху вниз» на составляющие элементы, на базе которых ответственным исполнителям выдаются задания.

Второй вариант построения сетевой модели «снизу вверх» базируется на сшивании, т.е. соединении нескольких первичных сетевых графиков, полученных от ответственных исполнителей, в одну сеть.

Третий, наиболее распространенный способ «сверху вниз» — «снизу вверх» включает поочередное членение комплекса работ и укрупнение с координацией на основе первичных графиков ответственных исполнителей, детально представляющих специфику операций.

Ответственные исполнители в системах СПУ – это специалисты, осуществляющие руководство работами по отдельным частям комплекса и несущие за них персональную ответственность.

Более наглядное представление о содержании работ в целом и в деталях дает построение сетевой модели комплекса работ.

4.6.4. Правила построения сетевых моделей

Наиболее распространенным способом изображения СПУ являются сетевые модели в терминах работ и событий, где работы изображаются стрелками, а события – кружками (см. рис. 4.4.1, 4.4.2). При построении сетевых моделей следует придерживаться следующих основных правил.

1. Строится трафарет событий (рис. 4.6.10).

2. Наносятся на трафарет в соответствии со структурно-временной табл. 4.5.2 последовательно все работы.

3. Просматриваются возможные варианты следования событий и работ; табличная запись и формы изображения приведены на рис. 4.6.11.

4. Всем стрелкам сетевого графика задают общее направление слева направо.

5. Не должно быть стрелок, которые ниоткуда не выходят и никуда не входят.

6. Между одной парой событий можно изобразить только одну работу.

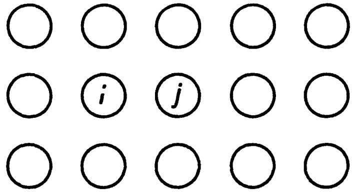


Рис. 4.6.10. Трафарет событий

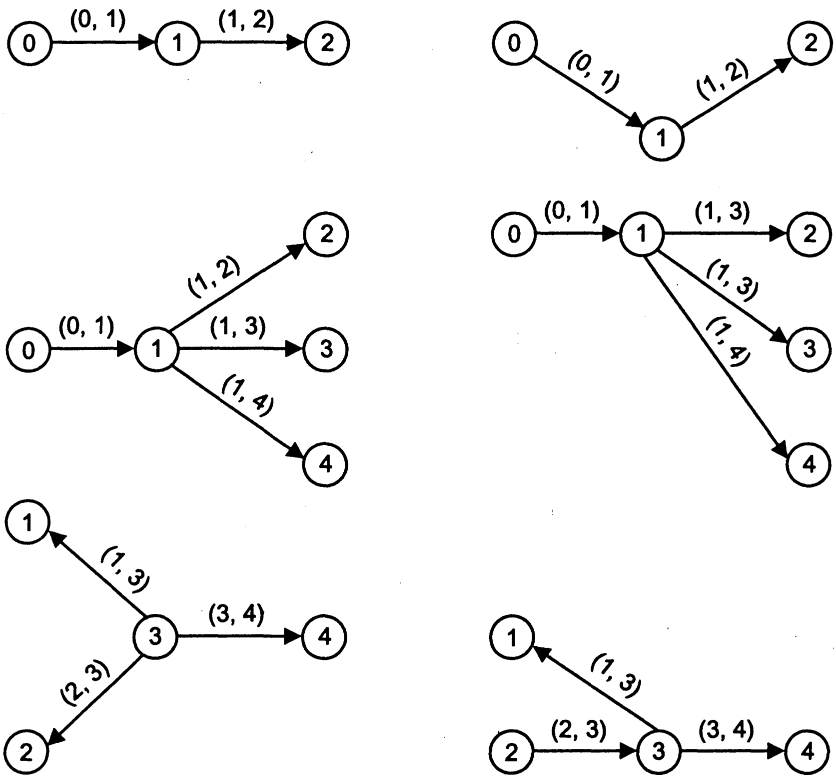


Рис. 4.6.11. Варианты следования событий и работ

7. При необходимости изображения двух параллельно выполненных работ между двумя событиями 5 и 7 (рис. 4.6.12а) вводят дополнительное промежуточное событие 6 и фиктивную работу (6, 7) с нулевой продолжительностью (рис. 4.6.12б).

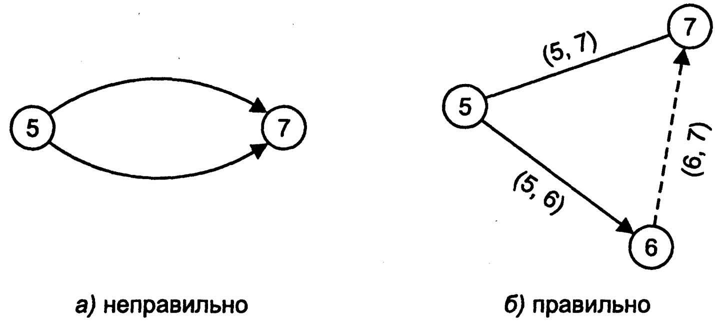


Рис. 4.6.12. Варианты изображения работ

8. Из сети исключают тупиковые события, от которых не начинается ни одна работа, за исключением завершающего события комплекса.

9. Проводят преобразование геометрии взаимного расположения работ и событий к виду, удобному для восприятия в целом, устраняют пересечения работ.

10. Нумерацию событий проводят последовательно слева направо и сверху вниз.

Построенная по исходным данным табл. 4.5.2 и перечисленным правилам взаимосвязи работ и событий (рис. 4.6.13) представляют собой сетевую модель задачи по переводу коммерческого предприятия на самообслуживание.

В случае больших комплексов работ сначала строят частные сетевые графики ответственные исполнители, а затем формируют сводную модель комплекса путем их сшивания.

Установлено, что на листе бумаги размером 1,5 × 2 м можно разместить сетевой график, включающий до 1000 событий.

Следует учитывать, что сетевые модели большого объема труднообозримы. В связи с этим проводят укрупнение сетевой

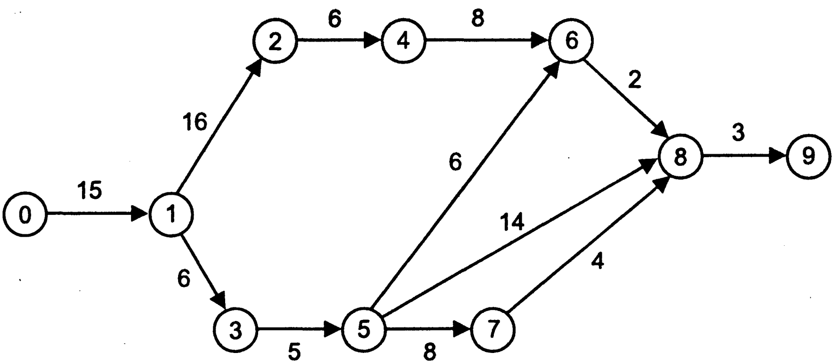


Рис. 4.6.13. Сетевая модель по переводу коммерческого предприятия на самообслуживание

модели путем устранения менее важных фрагментов и, следовательно, уменьшения числа изображаемых событий и работ, оставляя только наиболее значимые.

4.6.5. Параметры сетевых моделей и методы их расчета

Основные параметры сетевых моделей – это критический путь, резервы времени событий, работ и путей. Кроме этих показателей имеется ряд вспомогательных, которые являются исходными для получения дополнительных характеристик по анализу и оптимизации сетевого плана комплекса работ.

При расчетах применяют следующие обозначения параметров сетевой модели:

t_j^p – ранний срок свершения j-го события;

t_j^n – поздний срок свершения j-го события;

R_j – резерв времени на свершение j-го события;

$t_{ij}^{\text{Р.Н}}$ – ранний срок начала работы (i, j);

$t_{ij}^{\text{Р.О}}$ – ранний срок окончания работы (i, j);

$t_{ij}^{\text{П.Н}}$ – поздний срок начала работы (i, j);

$t_{ij}^{\text{П.О}}$ – поздний срок окончания работы (i, j);

$r_{ij}^{\text{П}}$ – полный резерв времени работы (i, j);

$r_{ij}^{\text{С.В}}$ — свободный резерв времени работы (i, j);
$k_{ij}^{\text{Н}}$ — коэффициент напряженности работы (i, j);
$T_{\text{П}}$ — продолжительность пути $L_{\text{П}}$; $T_{\text{П}} = t(L_{\text{П}})$;
$T_{\text{КР}}$ — продолжительность критического пути $L_{\text{КР}}$;
$R_{(L_{\text{П}})}$ — полный резерв времени пути $L_{\text{П}}$.

Рассмотрим определения и модели расчета параметров сетевой модели.

Ранний срок свершения j-го события t_j^p — наиболее ранний (минимальный) из возможных моментов наступления данного события при заданной продолжительности работ.

Поздний срок свершения j-го события t_j^n — наиболее поздний (максимальный) из допустимых моментов наступления данного события, при котором еще возможно выполнение всех последующих работ в установленный срок.

Резерв времени на свершение j-го события R_j — это промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление события j без нарушения сроков завершения всего комплекса, определяется как разность между поздним t_j^n и ранним t_j^p сроками наступления события $R_j = t_j^n - t_j^p$.

Ранний срок начала работы $t_{ij}^{\text{Р.Н}}$ — наиболее ранний (минимальный) из возможных моментов начала данной работы при заданной продолжительности работ. Он совпадает с ранним сроком наступления ее начального события:

$$t_{ij}^{\text{Р.Н}} = t_j^p.$$

Ранний срок окончания работы $t_{ij}^{\text{Р.О}}$ — наиболее ранний (минимальный) из возможных моментов окончания данной работы при заданной продолжительности работ. Он превышает ранний срок наступления ее события i на величину продолжительности работы:

$$t_{ij}^{\text{Р.О}} = t_j^{\text{Р}} + t_{ij}.$$

Поздний срок начала работы $t_{ij}^{\text{П.Н}}$ — наиболее поздний (максимальный) из допустимых моментов начала данной работы, при котором еще возможно выполнение всех последующих работ в установленный срок:

$$t_{ij}^{\text{П.Н}} = t_j^{\text{П}} - t_{ij}.$$

Поздний срок окончания работы $t_{ij}^{\text{П.О}}$ – наиболее поздний (максимальный) из допустимых моментов окончания данной работы, при котором еще возможно выполнение последующих работ в установленный срок:

$$t_{ij}^{\text{П.О}} = t_j^{\text{П}}.$$

Полный резерв времени работы (i, j) $r_{ji}^{\text{П}}$ – максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность работы t_{ij} без изменения общего срока выполнения комплекса:

$$r_{ij}^{\text{П}} = t_j^{\text{П}} - t_i^{\text{Р}} - t_{ij}.$$

Свободный резерв времени работы (i, j) $r_{ij}^{\text{С.В}}$ – максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность работы при условии, что все события сети наступают в свои ранние сроки:

$$r_{ij}^{\text{С.В}} = t_j^{\text{Р}} - t_i^{\text{Р}} - t_{ij}.$$

Полный резерв времени пути $R_{(L_{\text{П}})}$ показывает, на сколько могут быть увеличены продолжительности всех работ в сумме пути $L_{\text{П}}$ относительно критического пути $L_{\text{КР}}$:

$$R_{(L_{\text{П}})} = t(L_{\text{КР}}) - t(L_{\text{П}}) = T_{\text{КР}} - T_{\text{П}}.$$

Коэффициент напряженности работы (i, j) $k_{ij}^{\text{Н}}$ характеризует напряженность по срокам выполнения работы (i, j) и определяется по формуле

$$k_{ij}^{H} = \frac{t(L_{\max}) - t'(L_{KP})}{T_{KP} - t'(L_{KP})},$$

где $t(L_{\max})$ — длительность максимального из некритических путей, проходящих через работу (i, j);

$t'(L_{\text{КР}})$ – продолжительность части критических работ, входящих в рассматриваемый путь $L_{\max}$.

Чем ближе коэффициент напряженности к 1, тем сложнее выполнять эту работу в установленные сроки.

Методы расчета параметров сетевой модели делятся на две группы.

В *первую группу* входят аналитические методы, которые включают вычисления по формулам непосредственно на сетевом графике, табличный и матричный методы.

Ко *второй группе* относятся методы, основанные на теории статистического моделирования, которые целесообразно применять при расчете стохастических сетей с очень большим разбросом возможных сроков выполнения работ.

В качестве примера рассмотрим из первой аналитической группы табличный метод расчета параметров. В этом случае заполнение табл. 4.6.8 производится последовательно по следующим правилам:

а) графы 1 и 3 заполняются на основе исходных данных, представленных в структурно-временной табл. 4.5.2;

Таблица 4.6.8

Работа (i, j)	Количество предшествующих работ	Продолжительность t_{ij}	Сроки выполнения работ				Резервы времени		
			ранние		поздние		работ		событий R_j
			начало $t_{ij}^{Р.Н}$	окончание $t_{ij}^{Р.О}$	начало $t_{ij}^{П.Н}$	окончание $t_{ij}^{П.О}$	полный $t_{ij}^{П}$	свободный $t_{ij}^{С.В}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(0,1)	0	15	0	15	0	15	0	0	0
(1,2)	1	16	15	31	15	31	0	0	0
(1,3)	1	6	15	21	22	28	7	0	7
(2,4)	1	6	31	37	31	37	0	0	0
(3,5)	1	5	21	26	28	33	7	0	7
(4,6)	1	8	37	45	37	45	0	0	0
(5,6)	1	6	26	32	39	45	13	13	0
(5,8)	1	14	26	40	33	47	7	7	0
(5,7)	1	8	26	34	35	43	9	0	9
(6,8)	2	2	45	47	45	47	0	0	0
(7,8)	1	4	34	38	43	47	9	9	0
(8,9)	3	3	37	50	47	50	0	0	0

б) в графе 2 записывается количество предшествующих работ по сетевому графику или определяется из графы 1 по числу работ, имеющих второй цифрой в коде ту, с которой начинается данная работа. Например, в графе 1 имеются три работы, оканчивающиеся на цифру 8: (5,8); (6,8); (7,8), поэтому работа (8,9) имеет три предшествующие работы;

г) в графе 4 раннее начало работ, выходящих из исходного события, а раннее окончание этих работ равно их продолжительности (гр. 5). Раннее начало последующих работ определяется путем выбора максимального из сроков раннего окончания предшествующих работ. Количество сравниваемых сроков равно количеству предшествующих работ графы 2. Раннее начало последующих работ можно определить после того, как найдено раннее окончание предшествующих. В свою очередь раннее окончание каждой работы находится как сумма величин раннего начала и продолжительности данной работы;

г) продолжительность критического пути определяется после заполнения граф 4 и 5 как максимальная величина из сроков раннего окончания работ, которые ведут к завершающему событию 9;

д) найденная величина критического пути $T_{\text{КР}} = 50$ дням заносится в графу 7 для всех работ, ведущих к завершающему событию. Затем заполнение ведется снизу вверх. Находятся все работы, следующие за рассматриваемой, и определяются разности между поздним окончанием этих работ и их продолжительностями. Минимальная из величин заносится в графу 7;

е) в графе 6 позднее начало работы определяется как разность позднего окончания этих работ и их продолжительности (из значений графы 7 вычитаются данные графы 3);

ж) в графе 8 полный резерв времени работы определяется разностью между значениями граф 7 и 5. Если он равен нулю, то работа является критической;

з) в графе 10 резерв времени событий j определяется как разность позднего окончания работы, заканчивающегося событием j графы 7, и ранним началом работы, начинающимся событием j;

и) значение свободного резерва времени работы определяется как разность значений графы 10 и данных графы 8 и указывает на расположение резервов, необходимых для оптимизации.

Пользуясь полученными значениями параметров работ по переводу предприятия торговли на самообслуживание (табл. 4.6.8), можно перейти к анализу сетевой модели, а затем провести оптимизацию.

4.6.6. Анализ сетевых моделей

Анализ сетевой модели проводим с целью выявления резервов и «узких мест». Табличный метод расчета параметров (табл. 4.6.8) позволяет решить эту задачу. Однако большую наглядность все же дает графический метод анализа. Соединение различных методов сетевого моделирования позволяет объединить их преимущества.

Следует помнить, что обнаруженные резервы позволяют более гибко управлять комплексом работ путем их разумного перераспределения с одних работ на другие, более напряженные не произвольно, а по специальным методам оптимизации.

Анализ сетевой модели (рис. 4.6.13) начинаем с определения минимального времени выполнения всего комплекса работ. Для этой цели проследим все возможные пути перехода из исходного события (0) к завершающему (9). Таких путей четыре:

$$L_1 = [(0,1)\ (1,2)\ (2,4)\ (4,6)\ (6,8)\ (8,9)],$$
$$L_2 = [(0,1)\ (1,3)\ (3,5)\ (5,6)\ (6,8)\ (8,9)],$$
$$L_3 = [(0,1)\ (1,3)\ (3,5)\ (5,6)\ (8,9)],$$
$$L_4 = [(0,1)\ (1,3)\ (3,5)\ (5,7)\ (7,8)\ (8,9)].$$

Определим длительность этих путей:

$$T_1 = t(L_1) = t_{0,1} + t_{1,2} + t_{2,4} + t_{4,6} + t_{6,8} + t_{8,9} = 16 + 16 + 6 + 8 + 2 + 3 = 50 \text{ дн.}$$

$$T_2 = t(L_2) = t_{0,1} + t_{1,3} + t_{3,5} + t_{5,6} + t_{6,8} + t_{8,9} = 15 + 6 + 5 + 6 + 2 + 3 = 37 \text{ дн.}$$

$$T_3 = t(L_3) = t_{0,1} + t_{1,3} + t_{3,5} + t_{5,6} + t_{8,9} = 15 + 6 + 5 + 14 + 3 = 43 \text{ дн.}$$

$$T_4 = t(L_4) = t_{0,1} + t_{1,3} + t_{3,5} + t_{5,7} + t_{7,8} + t_{8,9} = 15 + 6 + 5 + 8 + 4 + 3 = 41 \text{ дн.}$$

Поскольку многие из работ, лежащих на этих путях, выполняются параллельно, общий срок перевода коммерческого предприятия на самообслуживание будет определяться путем максимальной продолжительности, называемым критическим:

$$T_{\text{КР}} = \max_i \{t(L_i)\} = 50 \text{ дн.}$$

Длительность пути L_2 составляет $t(L_2) = 37$ дней, т.е. минимальна, однако не позволяет выполнить все работы комплекса.

Длительность пути L_1 составляет $t(L_1) = 50$ дней, однако за это время все работы комплекса могут быть выполнены. Следовательно, минимальное время, за которое может быть выполнен весь комплекс работ, составляет 50 дней, следовательно, путь L_1 является критическим.

Теперь определим полные резервы времени по всем путям:

$$R(L_1) = T_{\text{КР}} - T_1 = 0$$
$$R(L_2) = T_{\text{КР}} - T_2 = 13 \text{ дн.}$$
$$R(L_3) = T_{\text{КР}} - T_3 = 7 \text{ дн.}$$
$$R(L_4) = T_{\text{КР}} - T_4 = 9 \text{ дн.}$$

В пределах имеющихся резервов времени с выполнением некоторых работ можно не спешить, и общий срок выполнения комплекса работ не увеличится. Если же длительность выполнения любой из работ критического пути увеличилась, то общий срок выполнения комплекса неизбежно возрастет.

Для наглядного выявления мест расположения резервов времени построим сетевой график работ в масштабе времени (рис. 4.6.13).

Построение начинается с критического пути $L_{\text{КР}}$ в соответствии с правилами сетевого моделирования по графику событий с учетом изображения длительностей *работ* t_{ij} в масштабе времени по оси абсцисс. По оси ординат длины стрелок выбираются из соображений удобства восприятия топологии сети в целом. Этим объясняется большая длина стрелки работы (6,8) в сравнении с работой (4,6), хотя по масштабу времени длительность $t_{4,6}$ больше $t_{6,8}$.

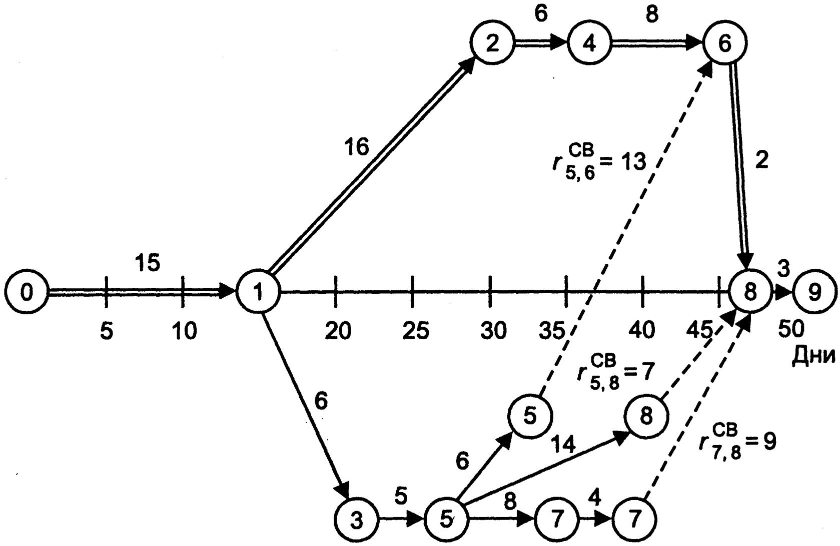


Рис. 4.6.13. Сетевой график работ в масштабе времени

Длительность всех остальных путей T_2, T_3, T_4 меньше, поэтому вводим фиктивные события 5′, 8′, 7′ и фиктивные работы (5′,6), (8′,8), (7′,8) с нулевой продолжительностью.

В результате мы получили полную картину расположения мест свободных резервов времени (табл. 4.3.1) работ $r_{5,6}^{СВ} = 13$ дням, $r_{5,8}^{СВ} = 7$ дням и $r_{7,8}^{СВ} = 9$ дням. Наиболее напряженными являются работы критического пути L_1, которые не имеют резервов и поэтому являются «узкими местами» комплекса работ.

Таким образом, в результате анализа сетевой модели мы получили необходимые данные для проведения оптимизации.

Наличие резервов позволит провести оптимизацию сетевого графика путем лучшего перераспределения выделенных ресурсов и построить более экономный план, который даст возможность выполнить весь комплекс работ за меньшее время.

4.6.7. Оптимизация сетевых моделей

Сетевой график работ составлен таким образом, что израсходованы все ресурсы B. Однако на этом графике не все работы критические, поэтому можно уменьшить время $T_{\text{КР}}$ за счет резервов, имеющихся на некритических работах. Перенеся эти резервы на критические работы, можно уменьшить время их выполнения и тем самым получить новые сроки выполнения работ и соответственно меньший $T_{\text{КР}}$. Оптимальным сетевым планом будет такой план, когда $T^0_{\text{КР}}$ получится наименьшим из всех возможных в данных условиях. Очевидно, новые длительности всех путей в таком случае будут равны, т.е.

$$T_1^0 = T_2^0 = T_3^0 = T_4^0 = T^0_{\text{КР}}.$$

Механизм перераспределения средств включает уменьшение средств части работ (i, j) на некоторую величину $x_{ij} < b_{ij}$, что приводит, естественно, к увеличению времени ее выполнения:

$$t'_{ij} = f(x_{ij}) > t_{ij}.$$

Средства x_{ij}, вложенные в другую работу (h, k), $x_{ij} = x_{hk}$, приводят к уменьшению времени ее выполнения:

$$t'_{hk} = f(x_{hk}) < t_{hk}.$$

Продолжительность выполнения работ зависит от объема выделенных ресурсов, работает формула «время – деньги» и не зависит от того, каким образом эти ресурсы были инвестированы. Нетрудно показать, что эта зависимость нелинейная и может быть представлена выражением

$$t = \lim_{n\to\infty} t_0\left(1 \pm c\frac{x}{n}\right)^n = t_0 \exp(cx) = t_0 \exp\left(\frac{x}{b}\right),$$

что показывает на экспонентную форму связи.

В практике выполнения расчетов эти функции обычно представляют приближенно линейными выражениями следующего вида:

$$t'_{ij} = t_{ij}(1 + c_{ij}x_{ij}) = t_{ij} + t_{ij}\frac{x_{ij}}{b_{ij}};$$

$$t'_{hk} = t_{hk}(1 - c_{yr}x_{hk}) = t_{hk} - t_{hk}\frac{x_{hk}}{b_{hk}}.$$

В связи с тем что выделенные ресурсы B ограничены, то должно выполняться условие их сохранения, т.е. сумма средств, снимаемых с работ (i, j), должна быть равна сумме средств, передаваемых работам (h, k):

$$\sum_{\text{СН}}^{M} x_{ij} = \sum_{\text{ПЕР}}^{N} x_{hk},$$

где M – число работ, с которых средства снимались;
N – число работ, на которые средства переносились.

На этом основании общий срок выполнения всего комплекса работ определяется целевой функцией следующего вида:

$$T_{\text{КР}} = \sum_{\text{КР}} t_{l,m} + \sum_{\text{КР}}^{N} f(x_{hk}),$$

где (l, m) – номера работ критического пути, средства которых не изменялись.

В процессе перераспределения средств необходимо соблюдать условие ограничения на величину снимаемых средств x_{ij} с работы (i, j), которое определяется наличием свободного резерва времени $r_{ij}^{\text{СВ}}$ этой работы по формуле

$$t_{ij} + r_{ij}^{\text{СВ}} \geq t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij}),$$

и, следовательно, удовлетворять этому условию

$$x_{ij} \leq \frac{r_{ij}^{\text{СВ}}}{t_{ij}c_{ij}}.$$

Решение задачи оптимизации состоит в последовательном переносе средств с некритических работ на критические, переходе от одного пути к другому до тех пор, пока все работы не будут критическими и не будут иметь резервов, а длительности всех путей станут равными.

Перед началом оптимизации расположим длительности всех путей последовательно в порядке увеличения их резервов.

На первом этапе оптимизации выбираем резервы работ, ближайший к критическому пути $L_1 = 50$ дней, путь $L_3 = 43$ дня. На этом пути L_3 некритическая работа (5,8′) имеет свободный резерв времени $r_{5,8'}^{\text{СВ}} = 7$ дней. Условие допустимости решения по величине переносимых средств определяется выражением

$$x_{5,8'} \le \frac{r_{5,8'}^{\text{СВ}}}{t_{5,8'} c_{5,8'}}.$$

Перенесем часть средств работы (5,8′) на работу критического пути (1,2).

Замечание. Переносить средства с работы одного пути, например (5,8′) пути L_2, на любую работу, даже и критическую, но входящую в этот же путь L_2, например (0,1), нельзя.

Величину переносимых средств и длительности новых равных критических путей $T_1' = T_3' = T_{\text{КР}}'$ можно найти, составив и решив следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{5,8'} = x_{1,2}. \\ T_3 + t_{5,8'} \cdot c_{5,8'} \cdot x_{5,8'} = T_1 - t_{1,2} \cdot c_{1,2} \cdot x_{1,2}. \end{cases}$$

Найдя величину переносимых средств, проверяем допустимость такого решения по ограничению. Если оно недопустимо, то переносим средства на любую другую работу; опять составляем новую систему уравнений и таким образом продолжаем оптимизацию. Новые длительности работ (5,8′) и (1,2) находим по формулам

$$t_{5,8'}' = t_{5,8'}(1 + c_{5,8'} \cdot x_{5,8'}),$$
$$t_{1,2}' = t_{1,2}(1 - c_{1,2} \cdot x_{1,2}),$$

а длительности новых критических путей определяем из следующего выражения:

$$T_1' = T_3' = T'_{\text{КР}} = T_1 - t_{1,2} \cdot c_{1,2} \cdot x_{1,2}.$$

На втором этапе рассматриваем следующий ближайший некритический путь L_4, на котором у работы (7,7′) имеется свободный резерв времени

$$r_{7,7'}^{\text{СВ}} = T'_{\text{КР}} - T_4.$$

Проверяем условие допустимости решения относительно величины переносимых средств:

$$x_{7,7'} < \frac{r_{7,7'}^{\text{СВ}}}{t_{7,7'} c_{7,7'}}.$$

Затем переносим часть средств $x_{7,7'}$ работы (7,7′) на две работы (1,2)и(5,8′) для сокращения времени выполнения работ первого и второго путей. Для нахождения величин переносимых средств составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{7,7'} = x'_{1,2} + x'_{5,8}, \\ T'_{\text{КР}} - t'_{1,2} \cdot c_{1,2} \cdot x_{1,2} = T_4 + t'_{7,7'} \cdot c_{7,7'} \cdot x_{7,7'}, \\ T'_{\text{КР}} - t'_{5,8'} \cdot c_{5,8'} \cdot x_{5,8'} = T_4 + t'_{7,7'} \cdot c_{7,7'} \cdot x_{7,7'}. \end{cases}$$

Затем находим величины переносимых средств $x_{7,7'}$, $x'_{1,2}$, $x'_{5,8'}$, а также новые длительности работ:

$$t''_{1,2} = t'_{1,2}\,(1 - c_{1,2} \cdot x'_{1,2}).$$
$$t''_{5,8'} = t'_{5,8'}\,(1 - c_{5,8'} \cdot x'_{5,8}).$$
$$t''_{7,7'} = t'_{7,7'}\,(1 - c_{7,7'} \cdot x'_{7,7'}).$$

Длительности новых критических путей вычисляем по формуле

$$T_1'' = T_3'' = T_4'' = T''_{\text{КР}} = T_4 + t_{7,7'} \,.\, c_{7,7'} \,.\, x_{7,7'}.$$

На третьем этапе путь L_2 имеет резерв времени у работы (5,5′):

$$r_{5,5'}^{\text{СВ}} = T_{\text{КР}} - T_2.$$

Проверяем условие допустимости решения по формуле

$$x_{5,5'} \le \frac{r^{\text{СВ}}_{5,5'}}{t_{5,5'} c_{5,5'}}.$$

Затем переносим резервы с некритической работы (5,5′) на работы (1,2), (5,8′), (7,7′) остальных критических путей, для чего запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{5,5'} = x''_{1,2} + x''_{5,8} + x'_{7,7'}, \\ T''_{\text{КР}} - t''_{1,2} \cdot c_{1,2} \cdot x''_{1,2} = T_2 + t'_{5,5'} \cdot c_{5,5'} \cdot x_{5,5'}, \\ T''_{\text{КР}} - t''_{5,8'} \cdot c_{5,8'} \cdot x''_{5,8'} = T_2 + t'_{5,5'} \cdot c_{5,5'} \cdot x_{5,5'}, \\ T''_{\text{КР}} - t'_{7,7'} \cdot c_{7,7'} \cdot x'_{7,7'} = T_2 + t'_{5,5'} \cdot c_{5,5'} \cdot x_{5,5'}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим величины переносимых средств, проверяем на допустимость такого решения и определяем новые длительности работ:

$$t'''_{1,2} = t''_{1,2}\,(1 - c_{1,2} \cdot x_{1,2}) = 9{,}3 \text{ дня},$$
$$t'''_{5,8'} = t''_{5,8'}\,(1 - c_{5,8'} \cdot x_{5,8}) = 14{,}3 \text{ дня},$$
$$t''_{7,7'} = t'_{7,7'}\,(1 - c_{7,7'} \cdot x_{7,7'}) = 6{,}3 \text{ дня},$$
$$t'_{5,5'} = t_{5,5'}\,(1 - c_{5,5'} \cdot x_{5,5'}) = 12{,}3 \text{ дня}.$$

Теперь длительности всех четырех путей от исходного события (0) к завершающему (9) стали равными:

$$T_1''' = T_3''' = T_4'' = T_2' = T^0_{\text{КР}} = 43{,}3 \text{ дня}.$$

Оптимизация закончена. Таким образом, применение методов сетевого моделирования позволило выявить экономию 50 – 43,3 = 6,7 дня по переводу коммерческого предприятия на самообслуживание.

С учетом полученных в результате решения новых значений длительностей работ построим оптимальный сетевой план (рис. 4.6.14) комплекса работ по переводу коммерческого предприятия на самообслуживание.

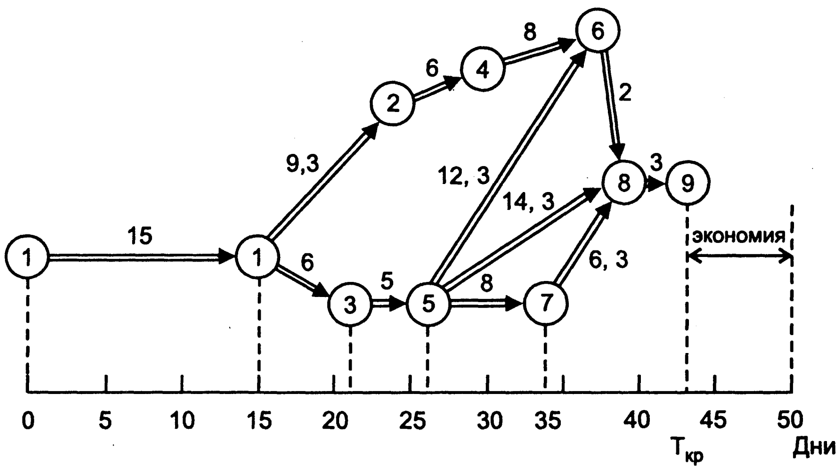


Рис. 4.6.14. Оптимальный сетевой план работ

Этот план является оптимальным, поскольку все его работы лежат на критических путях и не имеют резервов. Следует заметить, что мы переносили резервы с некритических работ на критические произвольно, поэтому полученный план не является единственным. Вообще можно перебрать все возможные варианты на компьютере и затем выбрать из них лучший.

4.6.8. Венгерский метод решения задач о назначениях

Специфические особенности задач о назначениях послужили поводом к появлению эффективного венгерского метода их решения. Основная идея венгерского метода заключается в переходе от исходной квадратной матрицы стоимости C к эквивалентной ей матрице $C_э$ с неотрицательными элементами и системой n независимых нулей, из которых никакие два не принадлежат одной и той же строке или одному и тому же столбцу. Для заданного n существует $n!$ допустимых решений. Если в матрице назначения X расположить n единиц так, что в каждой строке и столбце находится только по одной единице, расставленных в соответствии с расположенными n независимыми нулями эквивалентной матрицы стоимости $C_э$, то получим допустимые решения задачи о назначениях.

Алгоритм венгерского метода рассмотрим на примере решения задачи по заданной матрице стоимости:

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 6 \\ 15 & 3 & 13 & 7 \\ 13 & 13 & 15 & 10 \\ 3 & 14 & 12 & 17 \end{pmatrix}.$$

Следует иметь в виду, что для любого недопустимого назначения соответствующая ему стоимость условно полагается равной достаточно большому числу М в задачах на минимум. Если исходная матрица не является квадратной, то следует ввести дополнительно необходимое количество строк или столбцов, а их элементам присвоить значения, определяемые условиями задачи, возможно после редукции, а доминирующие альтернативы дорогие или дешевые исключить.

А. Решение задач на минимум затрат

$$C(X) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} C_{ij} X_{ij} \to \min.$$

1. Проводим редукцию матрицы по строкам и столбцам, как и в методе ветвей и границ

$$\begin{array}{cccc|c} &&&& \min \\ 1 & 9 & \boxed{8} & 6 & 1 \\ 15 & \boxed{3} & 13 & 7 & 3 \\ 13 & 13 & 15 & \boxed{10} & 10 \\ \boxed{3} & 14 & 12 & 17 & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcccc} & 0 & 8 & 7 & 5 \\ & 12 & 0 & 10 & 4 \\ & 3 & 3 & 5 & 0 \\ & 0 & 11 & 9 & 14 \\ \hline \min & 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} 0 & 8 & 2 & 5 \\ \hline 12 & 0 & 5 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 11 & 4 & 14 \end{array}$$

2. Методом проб и ошибок проводим поиск допустимого решения, для которого все назначения имеют нулевую стоимость. Поскольку расположение нулевых элементов в матрице не позво-

ляет образовать систему из четырех независимых нулей, то решение недопустимое.

3. Проводим модификацию матрицы. Вычеркиваем строки и столбцы с возможно большим количеством нулевых элементов – строки 2 и 3, столбец I, и получаем сокращенную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 11 & 4 & 14 \end{pmatrix} - 2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 9 & 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

Минимальный элемент сокращенной матрицы (2) вычитаем из всех ее элементов и складываем его с элементами, расположенными на пересечениях вычеркнутых строк и столбцов: 12 + 2 = = 14; 3 + 2 = 5 редуцированной матрицы. В результате получаем эквивалентную матрицу:

$$C_э = \begin{pmatrix} 0 & 6 & [0] & 3 \\ 14 & [0] & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & [0] \\ [0] & 9 & 2 & 12 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Методом проб и ошибок определяем матрицу назначения X, которая позволяет по аналогично расположенным элементам исходной матрицы (в квадратах) вычислить минимальную стоимость назначения

$$C_{\min} = 8 + 3 + 10 + 3 = 24 \text{ ед.}$$

В. Решение задач на максимум прибыли

$$C(X) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} C_{ij} X_{ij} \to \max.$$

1. Модифицируем матрицу умножением всех элементов на (–1) и затем сложением их с максимальным элементом матрицы (17) так, чтобы матрица не содержала бы отрицательных элементов:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{9} & 8 & 6 \\ \boxed{15} & 3 & 13 & 7 \\ 13 & 13 & \boxed{15} & 10 \\ 3 & 14 & 12 & \boxed{17} \end{pmatrix} \quad x(-1) + 17 = \begin{array}{cccc|c} & & & & \min \\ 16 & 8 & 9 & 11 & 8 \\ 2 & 14 & 4 & 10 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 7 & 2 \\ 14 & 3 & 5 & 0 & 0 \end{array}$$

2. Редуцируя матрицу по строкам и столбцам, получим эквивалентную матрицу:

$$C_э = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 12 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \\ 14 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Методом проб и ошибок строим матрицу назначения X и по ней вычисляем максимальную (в исходной матрице в квадратах) прибыль:

$$C_{max} = 9 + 14 + 15 + 17 = 55 \text{ ед.}$$

Пример. Распределить производство трех видов товара T_1, T_2, T_3 среди пяти предприятий $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, $П_5$ с целью получения максимальной прибыли от продажи товаров по следующим данным:

издержки производства c_{ij} единицы товара (долл.)

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
T_1	20	25	40	15	35
T_2	10	30	5	35	35
T_3	5	10	2	5	10

затраты по сбыту d_{ij} единицы товара (долл.)

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
T_1	20	50	20	10	15
T_2	10	80	10	35	50
T_3	5	5	5	15	5

годовой спрос и цена товара (долл.)

	Спрос Q_i (шт.)	Цена P_i (долл.)
T_1	40 000	60
T_2	200 000	55
T_3	60 000	40

Решение

1. Экономико-математическая постановка задачи. Расчет прибыли для каждой пары товара – производитель T_i, $П_j$ определяем по следующей модели: прибыль = цена – издержки – затраты:

$$h_{ij} = P_j - (c_{ij} + d_{ij}).$$

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
T_1	20	–15	0	35	10
T_2	1035	–55	40	–15	–30
T_3	530	25	33	20	25

Формируем матрицу годовой прибыли с учетом спроса

$$H_{ij} = h_{ij} \cdot Q_i, \text{ (тыс. долл.)}$$

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
T_1	800	–600	0	$\boxed{1\,400}$	400
T_2	7 000	–11 000	$\boxed{8\,000}$	–3 000	–6000
T_3	$\boxed{1\,800}$	1 500	1980	1 200	1 500

2. Модифицируем матрицу умножением всех элементов на (–1) и сложением с максимальным числом матрицы (8000) и для устранения дисбаланса вводим два вида T_4, T_5 фиктивной продукции с нулевой прибылью, поскольку матрица должна быть квадратной:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	min
T_1	7200	8600	8000	6600	7600	6600
T_2	1000	19000	0	11000	14000	0
T_3	6200	6500	6020	6800	6500	6020
T_4	0	0	0	0	0	0
T_5	0	0	0	0	0	0

3. Редуцируем матрицу по строкам и столбцам

$$\begin{pmatrix} 600 & 2000 & 1400 & 0 & 1000 \\ 1000 & 19\,000 & 0 & 11\,000 & 14\,000 \\ 180 & 480 & 0 & 780 & 480 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Модифицируем матрицу путем исключения строк 4,5 и столбцов 3,4, получим сокращенную матрицу

$$\begin{pmatrix} 600 & 2000 & 1000 \\ 1000 & 19000 & 14000 \\ [180] & 480 & 480 \end{pmatrix} - 180 = \begin{pmatrix} 420 & 1820 \\ 820 & 18820 \\ 0 & 300 \end{pmatrix}.$$

Затем определяем в ней минимальный элемент 180, вычитаем его из всех элементов этой матрицы и суммируем его с элементами, находящимися на пересечениях исключаемых строк и столбцов редуцированной матрицы (выделена в квадрат), объединяем результаты и получаем эквивалентную матрицу.

$$C_3 = \begin{pmatrix} 420 & 1820 & 1400 & 0 & 820 \\ 820 & 18820 & 0 & 11000 & 13820 \\ 0 & 300 & 0 & 780 & 300 \\ 0 & 0 & 180 & 180 & 0 \\ 0 & 0 & 180 & 180 & 0 \end{pmatrix},$$

по которой строим матрицу назначения

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и по ней, наложив на матрицу исходных данных, определяем максимальное значение прибыли:

$$П_{max} = 1400 + 8000 + 1800 = 11{,}2 \text{ млн долл.}$$

Наиболее сложной и тонкой работой является постановка задач о назначениях, связанных с вычислением элементов c_{ij} матрицы стоимости. Так, например, в известной задаче распределения претендентов по должностям необходимо определить каким-либо образом эффективность проявления личности на каждой вакантной должности, например бухгалтера, менеджера, коммерсанта или финансиста. В этом случае можно воспользоваться сравнением требуемого перечня необходимых и достаточных качеств – эталона для занятия должности, например, коммерсанта и фактически имеющихся качеств у претендента. Затем, пользуясь методом парных сравнений п. 1.3 и моделями деловой игры «Коммерсант» п.3.5.2, вычислим элемент матрицы c_{ij} как разность интегральных критериев эталона и личности с учетом еще и отрицательных качеств претендента. В качестве претендентов на должности можно использовать известных литературных персонажей разного времени, например Гобсека, Чичикова, Собакевича, Ноздрева, Плюшкина, Остапа Бендера, положительные и отрицательные качества которых описаны авторами в известных произведениях. Решение задачи в такой постановке вызывает огромный интерес и заставляет задуматься, например, о собственных положительных и отрицательных качествах и вообще своей потенциальной возможности предназначения в жизни.

Контрольные вопросы

1. Каковы основные термины и определения для неориентированных графов?
2. Каковы основные термины и определения для ориентированных графов?
3. В чем отличие гамильтонова и эйлерова графов?
4. Как строится матрица смежности?
5. Как строится матрица инциденций?
6. В чем заключается принцип сохранения потоков в сетях?
7. В чем состоит сущность теоремы о максимальном потоке?
8. Как выполняются разрезы сети?
9. Сформулируйте задачу коммивояжера.
10. Каков алгоритм метода ветвей и границ?

11. Сформулируйте задачу планирования коммерческой деятельности.

12. Каковы правила построения сетевых моделей?

13. Каков принцип оптимизации задач сетевого планирования?

Задачи

1. Запишите матрицу инциденций для орграфа, представленного на рис. 4.6.15:

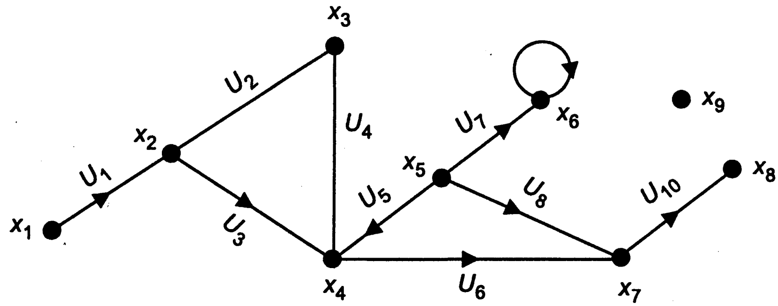


Рис. 4.6.15

2. Определите полустепени вершин орграфа из задачи 1.

3. Нарисуйте граф по матрицам смежности A и B. Слева и сверху указаны номера вершин.

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

4. Для сети, изображенной на рис. 4.6.16, постройте разрезы на заданных множествах:

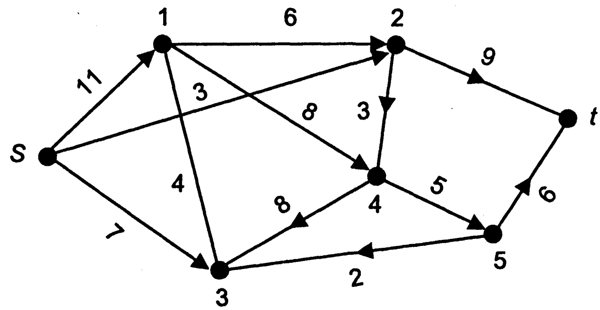


Рис. 4.6.16

1) $N_p = \{s, 1, 3\}$;
2) $N_p = \{s\}$;
3) $N_p = \{s, 2, 5\}$;
4) $N_p = \{s, 4\}$.

5. Постройте минимальный разрез для сети, представленной на рис. 4.6.16, и найдите максимальный поток.

6. Найдите максимальный поток автомобилей для сети 4.

7. Определите максимальный поток для сети, представленной на рис. 4.6.1, и докажите, что он максимальный, показав минимальный разрез.

8. Определите максимальный поток для ориентированной сети, изображенной на рис. 4.6.17.

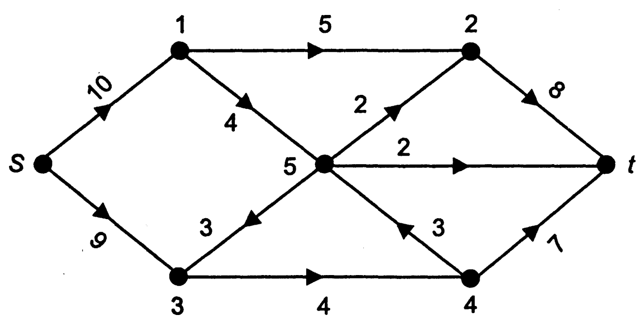


Рис. 4.6.17

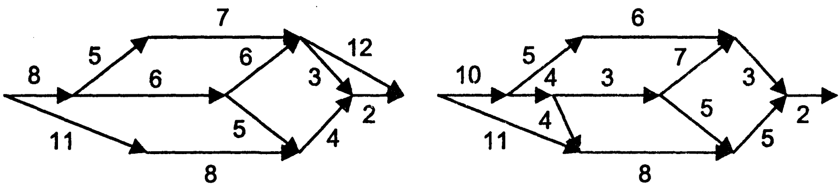
9. Постройте оптимальный кольцевой маршрут перевозки почты между городами, если матрица имеет следующий вид:

N	1	2	3	4	5
1	∞	20	50	40	10
2	20	∞	70	20	15
3	50	70	∞	30	40
4	40	20	30	∞	80
5	10	15	40	80	∞

10. Постройте сетевую модель задачи планирования поставки товаров оптовым покупателям. Проведите оптимизацию по критерию времени, определите критический путь, резервы времени и экономию.

Содержание работ	Работа			Длительность, t_i				
	коэффициент, c_i	обозначение, a_i	опорная, a_j	варианты				
				1	2	3	4	5
Отбор товара	0,1	a_1	–	2	4	5	6	3
Подготовка к отправке	0,2	a_2	a_1	3	2	4	5	6
Выписка накладных	0,3	a_3	a_2	1	2	3	4	3
Определение объема отгрузки	0,4	a_4	a_3	1	2	3	4	3
Проверка цен	0,5	a_5	a_3	1	2	2	2	2
Оформление счета	0,6	a_6	a_5	1	2	4	3	2
Заказ автомашин	0,7	a_7	$a_4\ a_6$	3	1	1	2	2
Отправление счета покупателю	0,8	a_8	$a_4\ a_6$	1	4	4	3	3
Проверка товара по счету	0,9	a_9	a_7	2	3	3	4	4
Оплата счета	1,0	a_{10}	a_8	12	10	8	6	14
Погрузка товара и проверка количества	1,1	a_{11}	$a_9\ a_{10}$	2	3	3	4	4
Перевозка товара	1,2	a_{12}	a_{11}	4	4	5	6	7
Выгрузка и сверка с документами	1,3	a_{13}	a_{12}	4	4	5	4	5

11. Проведите оптимизацию сетевых моделей по критерию времени, используя значения коэффициентов c_i из задачи 10; длительности выполнения работ указаны в моделях.



а) б)

Рис. 4.6.18

12. В Калифорнии был построен космический корабль «Шаттл», который затем был перевезен на площадку для запуска. До начала строительства была поставлена задача выбора одного из трех возможных мест *A*, *B* или *C* строительства (рис. 4.6.19), а затем оптимального маршрута транспортировки корабля к одному из трех мест запуска *D*, *E* или *F*.

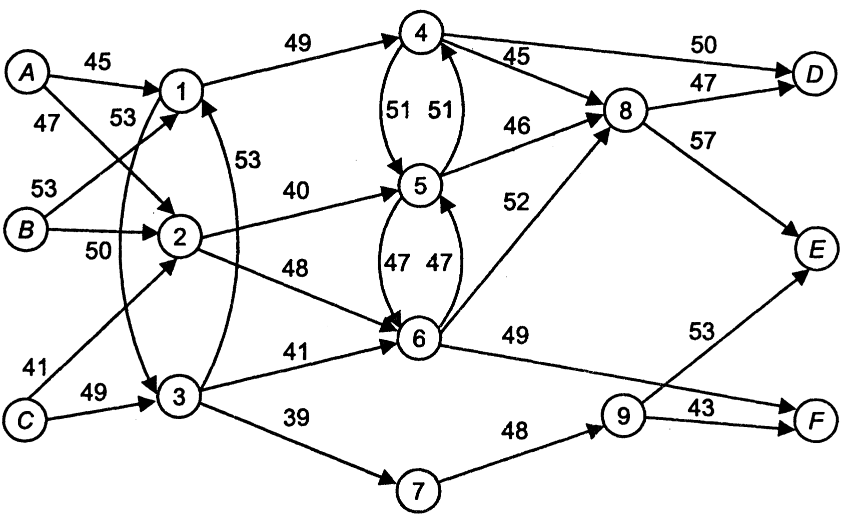


Рис. 4.6.19. Сетевая модель транспортных маршрутов

Перевозку решено было выполнить только на грузовых автомобилях с безбортовой платформой. Между выбранными пунктами расположено 28 мостов, максимально допустимые нагрузки в тоннах которых показаны на рис. 4.6.15. Определить максимально допустимый вес для транспортировки частями корабля «Шаттл» и оптимальный маршрут следования с места строительства до места запуска.

13. Проведите решение задачи о назначениях на max и min венгерским методом:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 12 & 10 & 9 & 8 \\ 7 & 10 & 8 & 14 & 15 \\ 9 & 8 & 7 & 10 & 7 \\ 3 & 11 & 5 & 6 & 11 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & - & 2 \\ 7 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 5 & - \\ 7 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 10 & 12 & 10 & 16 \\ 14 & 8 & 9 & 14 \\ 8 & 6 & 6 & 12 \\ 6 & 10 & 14 & 10 \\ 12 & 8 & 16 & 12 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & - & 2 & 2 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 3 & 5 & - & 2 \\ 7 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

14. Распределите венгерским методом заказы на изготовление товаров T_1, T_2, T_3 среди предприятий $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, $П_5$ и определите величину максимальной прибыли при следующих условиях:

а) издержки на производство единицы товара

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
T_1	20	23	38	15	35
T_2	8	29	6	35	35
T_3	5	8	3	4	7

б) затраты по сбыту единицы товара

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
T_1	20	50	20	10	13
T_2	7	30	8	35	60
T_3	5	5	4	15	6

Таблица 4.6.9

Директор	Менеджер	Экономист	Бухгалтер	Коммерсант	Маркетолог
Ответственность, организатор, образование, опыт работы, воля, здоровье, интуиция, энтузиазм, коммуникабельность, самокритичность, уравновешенность, объективность, самообладание, воображение, разбираться в людях, знание законов, адаптивность, бесконфликтность, владение этикетом	Образование, опыт, коммуникабельность, уравновешенность, работа с людьми, интуиция, целеустремленность, находчивость, сообразительность, активность, консультативность, реакция	Образование, аналитичность, опыт, коммуникабельность, уравновешенность, работа с людьми, интуиция, пунктуальность, бесконфликтность, предвидение, уверенность, бизнес-план, практичность	Образование, стаж, внимательность, усидчивость, любовь к счету, четкость, пунктуальность, исполнительность, ответственность, целеустремленность, контроль, неподкупность, логичность, практичность, самообладание, аналитичность, формализм, бюрократизм	Коммуникабельность, бесконфликтность, энтузиазм, практичность, вежливость, умение убеждать, активность, кругозор в товарных группах, обязательность, исполнительность, начитанность, конкурентоспособность, находчивость, чувство юмора	Чувство рынка, исследовательские, аналитические способности, коммуникабельность, образование, активность, опыт работы, аналитичность, прогнозирование — предвидение, бесконфликтность, постоянный сбор информации, оптимизм, рационализм, осторожность, ответственность, конъюнктура рынка

Таблица 4.6.10

Гобсек	Бендер О.	Чичиков	Собакевич	Плюшкин
+ Умный, хитрый, спокойный, твердый, практичный, осторожный, сдержанный, проницательный, образованный, ловкий, деловой, педантичный, инстинкт самосохранения, жизненный опыт, недоверчивый, организованный, разбирается в людях	Предприимчивость, находчивость, оптимизм, коммуникабельность, авантюризм, остроумие, хитрость, изобретательность, ловкость, чувство юмора, неприхотливость, напористость, незлопамятность, приспособляемость, изворотливость	Аккуратность, степенность, педантичность, расчетливость, целеустремленность, бережливость, прилежность, практичность, предприимчивость, самоограничение, терпение, интуиция, ловкость, работоспособность, осторожность, коммерческая жилка	Хозяйственность, деловитость, основательность, хваткость, умение торговаться, точность в делах, недоверчивость, обязательность	
– Жадный, бесчувственный, ехидный, жесткий, лукавый, мстительный, скряга, эгоистичный, скупой, некоммуникабельный	Корыстолюбие, небрежность, беспринципность, жуликоватость, дерзость, меркантильность, плутовство, фантазерство, нахальство, азартность	Подхалимство, неискренность, чинопочитание, жадность, меркантильность, вороватость, непорядочность, взяточничество, увертливость, скользкость	Неуклюжесть, грубость, невежество, плутовство, подозрительность, бескультурье, нетерпимость к людям	Бесхозяйственность, мелочность, ограниченность, пассивность, жадность, отсутствие коммерческой жилки, скупость, неряшливость, скопидомство, беспокойство

в) годовой спрос и и прогнозируемые цены товаров

	Спрос Q (шт.)	Цена P (за шт.)
T_1	35 000	55
T_2	160 000	50
T_3	54 000	30

15. Распределите претендентов, например, из табл. 4.6.10 по должностям, используя табл. 4.6.10, и модели расчета деловой игры «Коммерсант». Можно использовать гороскоп Друидов или знаки Зодиака для углубления сведений о качествах претендентов.

16. На Луну космическим кораблем был доставлен луноход в расположение моря Нектара (1) для сбора образцов лунных пород со следующих морей: Изобилия (2), Кризисов (3), Спокойствия (4), Ясности (5). Лунные моря представляют собой застывшую лаву, темная окраска которых определяется содержанием темного минерала ильменита. Расстояния между морями представлены в виде матрицы:

l_{ij}	1	2	3	4	5
1	0	61	122	75	133
2	61	0	72	68	129
3	122	72	0	78	106
4	75	68	78	0	65
5	133	129	106	65	0

Постройте кратчайший кольцевой маршрут объезда луноходом всех морей.

17. Почтовому ведомству США потребовалось определить экономный маршрут доставки почтовых грузов до открытия зимней олимпиады в Солт-Лейк-Сити по городам: Сиэтл (С), Чикаго (Ч), Нью-Йорк (Н), Мемфис (М), Хьюстон (Х), Сан-Франциско (С-Ф), Солт-Лейк-Сити (С-Л-С), Сент-Луис (С-Л). Расстояния между городами представлены в виде матрицы:

l_{ij}	С	Ч	Н	М	Х	С-Ф	С-Л-С	С-Л
С	0	120	–	–	–	50	45	–
Ч	120	0	55	35	–	–	80	25
Н	–	55	0	60	–	–	–	–
М	–	35	60	0	75	–	–	30
Х	–	–	–	75	0	95	85	30
С-Ф	50	–	–	–	95	0	40	–
С-Л-С	45	80	–	–	85	40	0	75
С-Л	–	25	–	30	30	–	75	0

Постройте маршрут минимальной длины.

ГЛАВА 5

МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Динамическое программирование связано с возможностью представления процесса управления в виде цепочки последовательных действий или шагов, развернутых во времени и ведущих к цели. Таким образом, процесс управления можно разделить на части и представить его в виде динамической последовательности и интерпретировать в виде пошаговой программы. Это позволяет спланировать программу будущих действий. Поскольку вариантов возможных планов – программ множество, то необходимо из них выбрать лучший, оптимальный по какому-либо критерию в соответствии с поставленной целью, что позволяют методы динамического программирования.

5.1. Предмет динамического программирования

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, который подходит к решению некоторого класса задач путем их разложения на части, небольшие и менее сложные задачи. При этом отличительной особенностью является решение задач по этапам, через фиксированные интервалы, промежутки времени, что и определило появление термина «динамическое программирование». Следует заметить, что методы динамического программирования успешно применяются и при решении задач, в которых фактор времени не учитывается. В целом математический аппарат можно представить как пошаговое или поэтапное программирование. Решение задач методами динамического программирования проводится на основе сформулированного Р.Э. Беллманом **принципа оптимальности:** оптимальное поведение обладает тем свойством, что какими бы ни были первоначальное состояние системы и первоначальное решение, последующее решение должно определять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате первоначального решения.

Из этого следует, что планирование каждого шага должно проводиться с учетом общей выгоды, получаемой по завершении всего процесса, что и позволяет оптимизировать конечный результат по выбранному критерию.

Таким образом, динамическое программирование в широком смысле представляет собой оптимальное управление процессом посредством изменения управляемых параметров на каждом шаге, и, следовательно, воздействовать на ход процесса, изменяя на каждом шаге состояние системы.

Необходимость такого подхода к управлению можно пояснить на следующем примере. Так, простая оптимизация лыжной гонки на 30 км относительно только одного критерия показывает на необходимость бежать спортсмену изо всех сил на каждом участке дистанции. В таком случае он рискует быстро выбиться из сил и не дойти до финиша вообще. Очевидно, в ходе процесса изменяется состояние спортсмена (системы), которое и следует учитывать в пошаговой оптимизации управления движением спортсмена.

Динамическое программирование (ДП) является одним из разделов оптимального программирования. Для него характерны специфические методы и приемы, применительные к операциям, в которых процесс принятия решения разбит на этапы (шаги). Однако если в задачах линейного программирования зависимости между критериальной функцией и переменными обязательно линейны, то в задачах ДП эти зависимости могут иметь еще и нелинейный характер. ДП можно использовать как для решения задач, связанных с динамикой процесса или системы, так и для статических задач, связанных, например, с распределением ресурсов. Это значительно расширяет область применения ДП для решения задач управления. А возможность упрощения процесса решения, которая достигается за счет ограничения области и количества исследуемых при переходе к очередному этапу вариантов, усиливает достоинства этого метода.

Вместе с тем ДП свойственны и недостатки. Прежде всего в нем нет единого универсального метода решения. Практически каждая задача, решаемая этим методом, характеризуется своими особенностями и требует проведения поиска наиболее приемлемой совокупности методов для ее решения. Кроме того, большие объемы и трудоемкость решения многошаговых задач, имеющих множество состояний, приводят к необходимости отбора задач малой размерности либо использования сжатой информации. Последнее достигается с помощью методов анализа вариантов и переработки списка состояний.

Для процессов с непрерывным временем ДП рассматривается как предельный вариант дискретной схемы решения. Получаемые при этом результаты практически совпадают с теми, которые получаются методами максимума Л.С. Понтрягина или Гамильтона – Якоби – Беллмана.

ДП применяется для решения задач, в которых поиск оптимума возможен при поэтапном подходе, например распределение дефицитных капитальных вложений между новыми направлениями их использования; разработка правил управления спросом или запасами, устанавливающими момент пополнения запаса и размер пополняющего заказа; разработка принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию; составления календарных планов текущего и капитального ремонтов оборудования и его замены; поиск кратчайших расстояний на транспортной сети; формирование последовательности развития коммерческой операции и т.д.

5.2. Постановка задачи динамического программирования

Постановку задачи динамического программирования рассмотрим на примере инвестирования, связанного с распределением средств между несколькими предприятиями. В результате управления инвестициями система последовательно переводится из начального состояния S_0 в конечное S_n. Предположим, что управление можно разбить на n шагов и решение принимается последовательно на каждом шаге, а управление представляет собой совокупность n пошаговых управлений. На каждом шаге необходимо определить два типа переменных – переменную состояния системы S_k и переменную управления x_k. Переменная S_k определяет, в каких состояниях может оказаться система на рассматриваемом k-м шаге. В зависимости от состояния S_1 на этом шаге можно применить некоторые управления, которые характеризуются переменной x_k, удовлетворяющей определенным ограничениям, и называются допустимыми.

Допустим, $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n)$ арифметический вектор – управление, переводящий систему из состояния S_0 в состояние S_n, а S_k – промежуточное состояние системы на k-м шаге управления. Тогда последовательность состояний системы можно представить в виде графа (рис. 5.2.1).

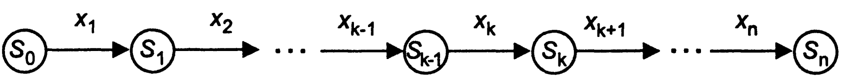


Рис. 5.2.1. Граф состояний системы

Применение управляющего воздействия x_k на каждом шаге переводит систему в новое состояние S_k и приносит некоторый результат $\varphi_k(S_{k-1}x_k)$. Для каждого возможного состояния на каждом шаге среди всех возможных управлений выбирается оптимальное управление x_k^* – такое, чтобы результат, который достигается за шаги с k-го по последний n-й, оказался бы оптимальным. Числовая характеристика этого результата называется функцией Беллмана $F_k(S_k)$ и зависит от номера шага k и состояния системы S_{k-1}.

Задача динамического программирования формулируется следующим образом: требуется определить такое управление $\overline{X}^*$, переводящее систему из начального состояния S_0 в конечное состояние S_n, при котором целевая функция принимает наибольшее (наименьшее) значение $F(S_0, \overline{X}^*) \to \text{extr}$.

Особенности математической модели динамического программирования заключаются в следующем:

1) задача оптимизации формулируется как конечный многошаговый процесс управления;

2) показатель эффективности или критерий оптимальности операции определяется целевой функцией, которая является аддитивной от каждого шага оптимизации.

$$F(\overline{X}) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k (S_{k-1},\ x_k);$$

3) выбор управления x_k на каждом шаге зависит только от состояния системы к этому шагу S_{k-1} и не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи);

4) состояние системы S_k после каждого шага управления зависит только от предшествующего состояния системы S_{k-1} и управляющего воздействия x_k (отсутствие последействия) и может быть записано в виде уравнения состояния системы:

$$S_k = f_k(S_{k-1}, x_k),\ k = \overline{1, n};$$

5) на каждом шаге управление x_k зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние системы S_k зависит от конечного числа параметров;

6) оптимальное управление представляет собой арифметический вектор $\overline{X}^*$, определяемый последовательностью оптимальных пошаговых управлений: $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*, ..., x_n^*)$, число которых и определяет количество шагов задачи.

5.3. Принцип оптимальности и математическое описание динамического процесса управления

В основе метода ДП лежит принцип оптимальности, впервые сформулированный в 1953 г. американским математиком Р.Э. Беллманом: *каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая выигрыш на данном шаге.* При решении задачи на каждом шаге выбирается управление, которое приводит к оптимальному выигрышу. Если считать все шаги независимыми, тогда оптимальным управлением будет то управление, которое обеспечит максимальный выигрыш на каждом шаге. Однако, например, при покупке новой техники взамен устаревшей на ее приобретение затрачиваются определенные средства, поэтому доход от ее эксплуатации в начале может быть небольшой, а в следующие годы новая техника будет приносить больший доход. И наоборот, если принято решение оставить старую технику для получения дохода в текущем году, то в дальнейшем это приведет к значительным убыткам. Этот пример демонстрирует следующий факт: в многошаговых процессах управление на каждом конкретном шаге надо выбирать с учетом его будущих воздействий на весь процесс.

Кроме того, при выборе управления на данном шаге следует учитывать возможные варианты состояния предыдущего шага. Например, при определении количества средств, вкладываемых в предприятие в i-м году, необходимо знать, сколько средств осталось в наличии к этому году и какой доход получен в предыдущем $(i-1)$-м году. Таким образом, при выборе шагового управления необходимо учитывать следующие требования:

1) возможные исходы предыдущего шага S_{k-1};

2) влияние управления x_k на все оставшиеся до конца процесса шаги $(n-k)$.

В задачах динамического программирования первое требование учитывают, делая на каждом шаге условные предположения о возможных вариантах окончания предыдущего шага и проводя для каждого из вариантов условную оптимизацию. Выполнение второго требования обеспечивается проведением безусловной оптимизации в обратном порядке.

Условная оптимизация. На первом этапе решения задачи, называемом условной оптимизацией, определяются функция Беллмана и оптимальные управления для всех возможных состояний на каждом шаге, начиная с последнего в соответствии с алгоритмом обратной прогонки. На последнем, n-м, шаге оптимальное управление x_n^* определяется функцией Беллмана: $F(S) = \max\{\varphi_n(S, x_n)\}$, в соответствии с которой максимум выбирается из всех возможных значений x_n, причем $x_n \in X$.

Дальнейшие вычисления проводятся согласно рекуррентному соотношению, связывающему функцию Беллмана на каждом шаге с этой же функцией, но вычисленной на предыдущем шаге. В общем виде это соотношение имеет вид

$$F_n(S) = \max\{\varphi_n(S_{n-1}, x_n) + F_{k+1}(f_k(S_{k-1}, x_k))\}\ x_k \in X.$$

Этот максимум (или минимум) определяется по всем возможным для k и S значениям переменной управления $x_n \in X$.

Безусловная оптимизация. После того как функция Беллмана и соответствующие оптимальные управления найдены для всех шагов с n-го по первый, осуществляется второй этап решения задачи, называемый безусловной оптимизацией, проводимой в обратном порядке.

Пользуясь тем, что на первом шаге ($k = 1$) состояние системы известно – это ее начальное состояние S_0, можно найти оптимальный результат за все n шагов и оптимальное управление на первом шаге x_1, которое этот результат доставляет. После применения этого управления система перейдет в другое состояние $S_1 = f_1(S_0, x_1^*)$, зная которое, можно, пользуясь результатами условной оптимизации, найти оптимальное управление на втором шаге x_2^* и так далее до последнего n-го шага.

Вычислительную схему динамического программирования можно строить на сетевых моделях, а также по алгоритмам прямой прогонки (от начала) и обратной прогонки (от конца к началу). Рассмотрим примеры решения различных по своей природе задач, содержание которых требует выбора переменных состояния и управления.

5.4. Оптимальное распределение инвестиций

Требуется распределить имеющиеся B единиц средств среди n предприятий, доход $g_i(x_i)$ от которых в зависимости от количества вложенных средств x_i определяется матрицей ($n \times n$), приведенной в табл. 5.4.1, так, чтобы суммарный доход со всех предприятий был бы максимальным. Состояние системы перед каждым шагом определяется числом еще не вложенных средств.

Таблица 5.4.1

x \ g_i	g_1	g_2	...	g_i	...	g_n
x_1	$g_1(x_1)$	$g_2(x_1)$	...	$g_i(x_1)$	...	$g_n(x_1)$
x_2	$g_1(x_2)$	$g_2(x_2)$	...	$g_i(x_1)$	...	$g_n(x_2)$
x_i	...	...	...	$g_i(x_i)$	...	...
x_n	$g_1(x_n)$	$g_2(x_n)$	...	$g_i(x_n)$	...	$g_n(x_n)$

Запишем математическую модель задачи.

Определить $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_i^*..., x_n^*)$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = B, & (5.4.1) \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n} & (5.4.2) \end{cases}$$

и обеспечивающий максимум целевой функции

$$F(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) \to \max. \qquad (5.4.3)$$

Теперь необходимо записать рекуррентное соотношение связи между шагами управления $F_k(x)$ и $F_{k+1}(x)$.

Очевидно, эта задача может быть решена простым перебором всех возможных вариантов распределения B единиц средств по n предприятиям, например на сетевой модели. Однако ее можно решить более эффективным методом, который заключается в замене сложной многовариантной задачи многократным решением простых задач с малым количеством исследуемых вариантов.

С этой целью разобьем процесс оптимизации на n шагов и будем на каждом k-м шаге оптимизировать инвестирование не всех предприятий, а только предприятий с k-го по n-е. При этом естественно считать, что в остальные предприятия (с первого по $(k-1)$-е тоже вкладываются средства, и поэтому на инвестирование предприятий с k-го по n-е остаются не все средства, а некоторая меньшая сумма $c_k \leq$ B. Эта величина и будет являться переменной состояния системы. Переменной управления на k-м шаге назовем величину x_k средств, вкладываемых в k-е предприятие. В качестве функции Беллмана $F_k(c_k)$ на k-м шаге можно выбрать максимально возможный доход, который можно получить с предприятий с k-го по n-е при условии, что на их инвестирование осталось c_k средств. Очевидно, что при вложении в k-е предприятие x_k средств будет получена прибыль $g_k(x_k)$, а система к $(k + 1)$-му шагу перейдет в состояние S_{k+1} и, следовательно, на инвестирование предприятий с $(k + 1)$-го до n-го останется средств: $c_{k+1} = (c_k - x_k)$.

Таким образом, на **первом шаге условной оптимизации** при $k = n$ функция Беллмана представляет собой прибыль только с n-го предприятия. При этом на его инвестирование может остаться количество средств c_n, $0 \le c_n \le B$. Чтобы получить максимум прибыли с этого предприятия, можно, например, вложить в него все эти средства, т.е. $F_n(c_n) = g_n(c_n)$ и $x_n = c_n$.

На каждом последующем шаге для вычисления функции Беллмана необходимо использовать результаты предыдущего шага. Пусть на k-м шаге для инвестирования предприятий с k-го по n-е осталось c_k средств $(0 \le c_k \le B)$. Тогда от вложения в k-е предприятие x_k средств будет получена прибыль $g_k(x_k)$, а на инвестирование остальных предприятий (с k-го по n-е) останется $c_{k+1} = (c_k - x_k)$ средств. Максимально возможный доход, который может быть получен с предприятий (с k-го по n-е), будет равен:

$$F_k(c_k) = \max_{x_k \le c_k} \{g_k(x_k) + F_{k+1}(c_k - x_k)\}, \quad k = \overline{1, n}. \qquad (5.4.4)$$

Максимум выражения (5.4.4) достигается на некотором значении x_k^*, которое является оптимальным управлением на k-м шаге для состояния системы S_k. Действуя таким образом, можно определить функцию Беллмана и оптимальные управления последовательно вплоть до шага $k = 1$.

Значение функции Беллмана $F_1(c_1)$ представляет собой максимально возможный доход со всех предприятий, а значение x_1^*, на котором достигается максимум дохода, является оптимальным количеством средств, вложенных в первое предприятие. Затем на этапе безусловной оптимизации для всех последующих шагов вычисляется величина $c_k = (c_{k-1} - x_{k-1})$ и оптимальным управлением на *k-м* шаге является то значение x_k, которое обеспечивает максимум дохода при соответствующем состоянии системы S_k.

Пример. На развитие трех предприятий g_1, g_2, g_3 выделено 5 млн руб. Известна эффективность капитальных вложений в каждое предприятие, заданная значением нелинейной функции $g_i(x_i)$, представленной в табл. 5.4.2. Необходимо распределить выделенные средства между предприятиями таким образом, чтобы получить максимальный суммарный доход.

Таблица 5.4.2

x_i	g_1	g_2	g_3
0	0	0	
1	**2,2**	2	2,8
2	3	**3,2**	**5,4**
3	4,1	4,8	6,4
4	5,2	6,2	6,6
5	5,9	6,4	6,9

Для упрощения расчетов предполагаем, что распределение средств осуществляется в целых числах $x_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ млн руб.

Решение

I этап. Условная оптимизация (k = 3, 2, 1)

1-й шаг: $k = 3$. Предположим, что все средства в количестве $x_3 = 5$ млн руб. отданы третьему предприятию. В этом случае максимальный доход, как это видно из табл. 5.4.3, составит $g_3(x_3) =$ $= 6{,}9$ тыс. руб., следовательно:

$$F_3(c_3) = g_3(x_3).$$

2-й шаг: $k = 2$. Определяем оптимальную стратегию при распределении денежных средств между вторым и третьим предприятиями. При этом рекуррентное соотношение Беллмана имеет вид

$$F_2(c_2) = \max_{x_2 \le c_2} \{g_2(x_2) + F_3(c_2 - x_2)\},$$

Таблица 5.4.3

c_3 \ x_3	0	1	2	3	4	5	$F_3(c_3)$	x_3^*
0	0	–	–	–	–	–	0	0
1	–	2,8	–	–	–	–	2,8	1
2	–	–	5,4	–	–	–	**5,4**	**2**
3	–	–	–	6,4	–	–	6,4	3
4	–	–	–	–	6,6	–	6,6	4
5	–	–	–	–	–	6,9	6,9	5

на основе которого составлена табл. 5.4.4 по данным табл. 5.4.2.

Таблица 5.4.4

c_2 \ x_2	0	1	2	3	4	5	$F_2(c_2)$	x_2^*
0	0 + 0	–	–	–	–	–	0	0
1	0 + 2,8	2 + 0	–	–	–	–	2,8	0
2	0 + 5,4	2 + 2,8	3,2 + 0	–	–	–	5,4	0
3	0 + 6,4	2 + 5,4	3,2 + 2,8	4,8 + 0	–	–	7,4	1
4	0 + 6,6	2 + 6,4	**3,2 + 5,4**	4,8 + 2,8	6,2 + 0	–	**8,6**	**2**
5	0 + 6,9	2 + 6,6	3,2 + 6,4	**4,8 + 5,4**	6,2 + 2,8	6,4 + 0	10,2	3

3-й шаг: $k = 1$. Определяем оптимальную стратегию при распределении денежных средств между первым и двумя другими предприятиями, используя следующую формулу для расчета суммарного дохода:

$$F_1(c_1) = \max_{x_1 \le c_1}\{g_1(x_1) + F_2(c_1 - x_1)\},$$

на основе которого составлена табл. 5.4.5.

Таблица 5.4.5

c_1 \ x_1	0	1	2	3	4	5	$F_1(c_1)$	x_1^*
0	0 + 0	–	–	–	–	–	0	0
1	0 + 2,8	2,2 + 0	–	–	–	–	2,8	0
2	0 + 5,4	2,2 + 2,8	3 + 0	–	–	–	5,4	0
3	0 + 7,4	2,2 + 5,4	3 + 2,8	4,1 + 0	–	–	7,6	1
4	0 + 8,6	2,2 + 7,4	3 + 5,4	4,1 + 2,8	5,2 + 0	–	9,6	1
5	0 + 10,2	**2,2 + 8,6**	3 + 7,4	4,1 + 5,4	5,2 + 2,8	5,9	**10,8**	**1**

II этап. Безусловная оптимизация (к = 1, 2, 3).

Определяем компоненты оптимальной стратегии.

1-й шаг: к = 1. По данным из табл. 5.4.5 максимальный доход при распределении 5 млн руб. между тремя предприятиями составляет: $c_1 = 5$, $F_1(5) = 10{,}8$. При этом первому предприятию нужно выделить $x_1^* = 1$ млн руб.

2-й шаг: к = 2. Определяем величину оставшихся денежных средств, приходящуюся на долю второго и третьего предприятий.

$$c_2 = c_1 - x_1^* = 5 - 1 = 4 \text{ млн руб.}$$

По данным табл. 5.4.4 находим, что оптимальный вариант распределения денежных средств размером 4 млн руб. между вторым и третьим предприятиями составляет: $F_2(4) = 8{,}6$ при выделении второму предприятию $x_2^* = 2$ млн руб.

3-й шаг: к = 3. Определяем величину оставшихся денежных средств, приходящуюся на долю третьего предприятия:

$$c_3 = c_2 - x_2^* = 4 - 2 = 2 \text{ млн руб.}$$

По данным табл. 5.4.5 находим:

$$F_3(2) = 5{,}4 \text{ и } x_3^* = 2 \text{ млн руб.}$$

Таким образом, оптимальный план инвестирования предприятий: $x_1^* = 1$ млн руб., $x_2^* = 2$ млн руб., $x_3^* = 2$ млн руб.

$\bar{X}^* = (1, 2, 2)$, который обеспечит максимальный доход, равный

$$F(5) = g_1(1) + g_2(2) + g_3(2) = 2{,}2 + 3{,}2 + 5{,}4 = 10{,}8 \text{ млн руб.}$$

5.5. Выбор оптимальной стратегии обновления оборудования

Важной экономической проблемой является своевременное обновление оборудования: автомобилей, станков, телевизоров, магнитол и т.п. Старение оборудования включает физический и моральный износ, в результате чего растут затраты на ремонт и обслуживание, снижаются производительность труда и ликвидная стоимость. Задача заключается в определении оптимальных сроков замены старого оборудования. Критерием оптимальности являются доход от эксплуатации оборудования (задача максимизации) либо суммарные затраты на эксплуатацию в течение планируемого периода (задача минимизации).

Предположим, что планируется эксплуатация оборудования в течение некоторого периода времени продолжительностью n лет. Оборудование имеет тенденцию с течением времени стареть и приносить все меньший доход $r(t)$ (t – возраст оборудования). При этом есть возможность в начале любого года продать устаревшее оборудование за цену $S(t)$, которая также зависит от возраста t, и купить новое оборудование за цену P. Под возрастом оборудования понимается период эксплуатации оборудования после последней замены, определенный в годах. Требуется найти оптимальный план замены оборудования на новое так, чтобы суммарный доход за все n лет был бы максимальным, учитывая, что к началу эксплуатации возраст оборудования составлял t_0 лет.

Исходными данными в задаче являются доход $r(t)$ от эксплуатации в течение одного года оборудования, возраст t лет, остаточная стоимость $S(t)$, цена нового оборудования P и начальный возраст оборудования t_0.

t	0	1	...	n
$r(t)$	$r(0)$	$r(1)$	...	$r(n)$
$S(t)$	$S(0)$	$S(1)$	...	$S(n)$

При составлении динамической модели выбора оптимальной стратегии обновления оборудования процесс замены рассматривается как многошаговый и период эксплуатации разбивается на n шагов.

Рассмотрим оптимизацию плана замены оборудования на период с k-го по n-й годы. Доход от эксплуатации оборудования за эти годы будет зависеть от возраста оборудования к началу рассматриваемого шага, т.е. k-го года.

Процесс оптимизации проводим с последнего шага ($k = n$), тогда на k-м шаге неизвестно, в какие годы с первого по $(k - 1)$-й должна осуществляться замена, и соответственно неизвестен возраст оборудования к началу k-го года. Возраст оборудования, который определяет состояние системы, обозначим t. На величину накладывается следующее ограничение:

$$1 \leq t \leq t_0 + \mathrm{k} - 1. \qquad (5.5.1)$$

Выражение (5.5.1) свидетельствует о том, что t не может превышать возраста оборудования за $(k - 1)$-й год его эксплуатации с учетом возраста к началу первого года, который составляет t_0 лет, и не может быть меньше единицы (этот возраст оборудование будет иметь к началу k-го года, если замена его произошла в начале предыдущего $(k - 1)$-го года).

Таким образом, переменная t в данной задаче является переменной состояния системы на k-м шаге.

Переменной управления на k-м шаге является логическая переменная, которая может принимать одно из двух значений: сохранить (С) или заменить (З) оборудование в начале k-го года:

$$x_k(t) = \begin{cases} \text{С, если оборудование сохраняется;} \\ \text{З, если оборудование заменяется.} \end{cases}$$

Функцию Беллмана $F_k(t)$ определяют как максимально возможный доход от эксплуатации оборудования за годы с k-го по n-й, если к началу k-го возраст оборудования составлял t лет. Применяя то или иное управление, система переходит в новое состояние. Так, например, если в начале k-го года оборудование сохраняется, то к началу $(k + 1)$-го года его возраст увеличится на единицу (состояние системы станет $t + 1$), в случае замены старого оборудования новое достигнет к началу $(k + 1)$-го года возраста $t_1 = 1$ год.

На этой основе можно записать уравнение, которое позволяет рекуррентно вычислить функцию Беллмана, опираясь на результаты предыдущего шага. Для каждого варианта управления доход определяется как сумма двух слагаемых – непосредственного результата управления и его последствий.

Если в начале каждого года сохраняется оборудование, возраст которого t лет, то доход за этот год составит $r(t)$. К началу $(k+1)$-го года возраст оборудования достигнет $(t+1)$ и максимально возможный доход за оставшиеся годы (с $(k+1)$-го по n-й) составит $F_{k+1}(t+1)$. Если в начале k-го года принято решение о замене оборудования, то продается старое оборудование возраста t лет по цене $S(t)$, приобретается новое за P единиц, а эксплуатация в течение k-го года нового оборудования принесет прибыль $r(0)$. К началу следующего года возраст оборудования составит 1 год, и за все оставшиеся годы с $(k+1)$-го по n-й максимально возможный доход будет $F_{k+1}(1)$. Из двух возможных вариантов управления выбирается тот, который приносит максимальный доход. Таким образом, функциональное уравнение Беллмана на каждом шаге управления можно записать так:

$$F_k(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_{k+1}(t+1), & (\text{С}) \\ S(t) - P + r(0) + F_{k+1}(1), & (\text{З}). \end{cases} \tag{5.5.2}$$

Функция $F_k(t)$ вычисляется на каждом шаге управления для всех $1 \le t \le t_0 + k - 1$. Управление, при котором достигается максимум дохода, является оптимальным.

Для первого шага **условной оптимизации** при $k = n$ функция представляет собой доход за последний n-й год:

$$F_n(t) = \max\begin{cases} r(t), & (\text{С}) \\ S(t) - P + r(0), & (\text{З}). \end{cases} \tag{5.5.3}$$

Значения функции $F_n(t)$, определяемые $F_{n-1}(t)$, $F_{n-2}(t)$ вплоть до $F_1(t)$, $F_0(t)$, представляют собой возможные доходы за все годы.

Максимум дохода достигается при некотором управлении, применяя которое на первом году, мы определяем возраст оборудования к началу второго года. Для этого возраста оборудования выбирается управление, при котором достигается максимум дохода за годы со второго по n-й и т. д. В результате чего на этапе **безусловной оптимизации** определяются те годы, в начале которых следует произвести замену оборудования.

Пример. Найти оптимальную стратегию эксплуатации оборудования на период продолжительностью 6 лет, если годовой доход $r(t)$ и остаточная стоимость $S(t)$ в зависимости от возраста заданы в табл. 5.5.1, стоимость нового оборудования равна $P = 13$, а возраст оборудования к началу эксплуатационного периода составлял 1 год.

Таблица 5.5.1

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	8	7	7	6	6	5	5
$S(t)$	12	10	8	8	7	6	4

Решение

I этап. Условная оптимизация (k = 6, 5, 4, 3, 2, 1).

1-й шаг: $k = 6$. Для первого шага возможные состояния системы t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, а функциональные уравнения (5.5.3) имеют вид

$$F_6(t) = \max\begin{cases} r(t), & \text{(С)} \\ S(t) - P + r(0), & \text{(З)}; \end{cases}$$

$$F_6(1) = \max\begin{cases} 7 \\ 10 - 13 + 8 \end{cases} = 7 \quad \text{(С)};$$

$$F_6(2) = \max\begin{cases} 7 \\ 8 - 13 + 8 \end{cases} = 7 \quad \text{(С)};$$

$$F_6(3) = \max\begin{cases} 6 \\ 8 - 13 + 8 \end{cases} = 6 \quad \text{(С)};$$

$$F_6(4) = \max\begin{cases} 6 \\ 7 - 13 + 8 \end{cases} = 6 \quad \text{(С)};$$

$$F_6(5) = \max\begin{cases} 5 \\ 6 - 13 + 8 \end{cases} = 5 \quad \text{(С)};$$

$$F_6(6) = \max\begin{cases} 5 \\ 4 - 13 + 8 \end{cases} = 5 \quad \text{(С)}.$$

2-й шаг: $k = 5$. Для второго шага возможные состояния системы $t = 1, 2, 3, 4, 5$, а функциональное уравнение (5.5.2) имеет вид

$$F_5(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_6(t+1), & (\text{С}) \\ S(t) - P + r(0) + F_6(1), & (\text{З}) \end{cases} \quad 1 \le t \le 5,$$

в соответствии с которым вычисляем:

$$F_5(1) = \max\begin{cases} 7+7 \\ 10-13+8+7 \end{cases} = 14 \quad (\text{С});$$

$$F_5(2) = \max\begin{cases} 7+6 \\ 8-13+8+7 \end{cases} = 13 \quad (\text{С});$$

$$F_5(3) = \max\begin{cases} 6+6 \\ 8-13+8+7 \end{cases} = 12 \quad (\text{С});$$

$$F_5(4) = \max\begin{cases} 6+5 \\ 7-13+8+7 \end{cases} = 11 \quad (\text{С});$$

$$F_5(5) = \max\begin{cases} 5+5 \\ 6-13+8+7 \end{cases} = 10 \quad (\text{С}).$$

3-й шаг: $k = 4$; $t = 1, 2, 3, 4$

$$F_4(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_5(t+1), & (\text{С}) \\ S(t) - P + r(0) + F_5(1), & (\text{З}) \end{cases} \quad 1 \le t \le 4,$$

$$F_4(1) = \max\begin{cases} 7+13 \\ 10-13+8+14 \end{cases} = 20 \quad (\text{С});$$

$$F_4(2) = \max\begin{cases} 7+12 \\ 10-13+8+14 \end{cases} = 19 \quad (\text{С});$$

$$F_4(3) = \max\begin{cases} 6+11 \\ 8-13+8+14 \end{cases} = 17 \quad (\text{С}/\text{З});$$

$$F_4(4) = \max\begin{cases} 6+10 \\ 8-13+8+14 \end{cases} = 17 \quad (З).$$

4-й шаг: $k = 3$; $t = 1, 2, 3$

$$F_3(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_4(t+1), & (С) \\ S(t) - P + r(0) + F_4(1), & (З) \end{cases} \quad 1 \le t \le 3,$$

$$F_3(1) = \max\begin{cases} 7+19 \\ 10-13+8+20 \end{cases} = 26 \quad (С);$$

$$F_3(2) = \max\begin{cases} 7+17 \\ 8-13+8+20 \end{cases} = 24 \quad (С);$$

$$F_3(3) = \max\begin{cases} 6+16 \\ 8-13+8+20 \end{cases} = 23 \quad (З).$$

5-й шаг: $k = 2$; $t = 1, 2$

$$F_2(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_3(t+1), & (С) \\ S(t) - P + r(0) + F_3(1), & (З) \end{cases} \quad 1 \le t \le 2,$$

$$F_2(1) = \max\begin{cases} 7+24 \\ 10-13+8+20 \end{cases} = 31 \quad (С/З);$$

$$F_2(2) = \max\begin{cases} 7+23 \\ 8-13+8+26 \end{cases} = 30 \quad (С).$$

6-й шаг: $k = 2$; $t = 1$

$$F_1(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_2(t+1), & (С) \\ S(t) - P + r(0) + F_2(1), & (З) \end{cases} \quad 1 \le t \le 2,$$

$$F_1(1) = \max\begin{cases} 7+30 \\ 10-13+8+31 \end{cases} = 37 \quad (С).$$

Результаты вычислений по уравнениям Беллмана $F_k(t)$ приведены в табл. 5.5.2, в которой k – год эксплуатации, а t – возраст оборудования.

Таблица 5.5.2

k \ t	1	2	3	4	5	6
1	37					
2	**31**	30				
3	26	24	$\boxed{23}$			
4	20	19	**17**	**17**		
5	14	13	12	11	10	
6	7	7	6	6	5	5

В табл. 5.5.2 выделено значение функции, соответствующее состоянию «З» – замена оборудования.

II этап. Безусловная оптимизация (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Безусловная оптимизация начинается с шага при $k = 1$. Максимально возможный доход от эксплуатации оборудования за годы с 1-го по 6-й составляет $F_1(1) = 37$. Этот оптимальный выигрыш достигается, если на первом году не производить замены оборудования. Тогда к началу второго года возраст оборудования увеличится на единицу и составит: $t_2 = t_1 + 1 = 1 + 1 = 2$. Безусловно, оптимальное управление при $k = 2$, $x_2(2) = \text{С}$, т.е. максимум дохода за годы со 2-го по 6-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу третьего года при $k = 3$ возраст оборудования станет $t_3 = t_2 + 1 = 3$. Безусловное оптимальное управление $x_3(3) = 3$, т.е. для получения максимума прибыли за оставшиеся годы необходимо в этом году провести замену оборудования.

К началу четвертого года при $k = 4$ возраст оборудования станет равен $t_4 = 1$. Безусловное оптимальное управление $x_4(1) = \text{С}$.

Далее соответственно для оставшихся шагов получим:

$$k = 5, \quad t_5 = t_4 + 1 = 2; \quad x_5(2) = \text{С}.$$
$$k = 6, \quad t_6 = t_5 + 1 = 3; \quad x_6(3) = \text{С}.$$

Таким образом, за 6 лет эксплуатации оборудования замену надо произвести один раз – в начале третьего года эксплуатации.

5.6. Выбор оптимального маршрута перевозки грузов

Математический аппарат ДП, основанный на методологии пошаговой оптимизации, может быть использован при нахождении кратчайших расстояний, например, на географической карте, представленной в виде сети. Решение задачи по определению кратчайших расстояний между пунктами отправления и пунктами получения продукции по существующей транспортной сети является исходным этапом при решении таких экономических задач, как оптимальное прикрепление потребителей к поставщикам, повышение производительности транспорта за счет сокращения непроизводительного пробега и др.

Пусть транспортная сеть состоит из 10 узлов. На рис. 5.6.1 показаны сеть дорог и стоимость перевозки единицы груза между пунктами сети. Ребра являются вариантами выбора решения. Необходимо определить маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 10, обеспечивающий наименьшие транспортные расходы.

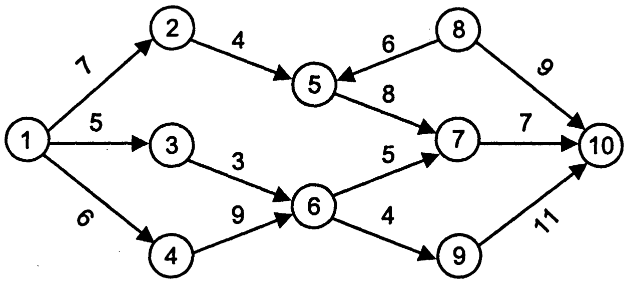


Рис. 5.6.1. Модель транспортной сети

В задаче имеется ограничение – двигаться по изображенным на схеме маршрутам можно только слева направо, т.е. попав, например, в пункт 7, мы имеем право переместиться только в пункт 10 и не можем возвратиться обратно в 5-й или 6-й. Эта особенность транспортной сети дает право отнести каждый из десяти пунктов к одному из поясов. Будем считать, что пункт принадлежит k-му поясу, если из него попасть в конечный пункт ровно за k шагов, т.е. с заездом ровно в $(k-1)$-й промежуточный пункт. Таким образом, пункты 7, 8 и 9 принадлежат к первому поясу, 5 и 6 – ко второму, 2, 3 и 4 – к третьему и 1 – к четвертому. Тогда на k-м шаге будем находить оптимальные маршруты перевозки груза из пунктов k-го пояса до конечного пункта. Оптимизацию будем производить с конца процесса, и потому, дойдя до k-го шага, неизвестно, в каком из пунктов k-го пояса окажется груз, перевозимый из первого пункта.

Введем обозначения:

k – номер шага ($k = 1, 2, 3, 4$);

i – пункт, из которого осуществляются перевозки ($i = 1, 2,..., 9$);

j – пункт, в который доставляется груз ($j = 2, 3,..., 10$);

c_{ij} – стоимость перевозки груза из пункта i в пункт j.

$F_k(i)$ – минимальные затраты на перевозку груза на k-м шаге решения задачи из пункта i до конечного пункта.

Очевидно, что минимум затрат на перевозку груза из пунктов k-го пояса до пункта 10 будет зависеть от того, в каком пункте этого пояса мы оказались. Номер i пункта, узел, принадлежащий k-му поясу, будет являться переменной **состояния системы** на k-м шаге. Поскольку оптимизация осуществляется с конца процесса, то, находясь в некотором пункте i k-го пояса, **принимается решение** о перемещении груза в один из пунктов $(k-1)$-го пояса, а направление дальнейшего движения известно из предыдущих шагов. Номер j пункта $(k-1)$-го пояса будет переменной управления на k-м шаге.

Для первого шага управления ($k = 1$) функция Беллмана представляет собой минимальные затраты на перевозку груза из пунктов 1-го пояса в конечный пункт, т.е. $F_1(i) = C_{i10}$. Для последующих шагов затраты складываются из двух слагаемых – стоимости перевозки груза C_{ij} из пункта i k-го пояса в пункт j $(k-1)$-го пояса и минимально возможных затрат на перевозку из пункта j до конечного пункта, т.е. $F_{k-1}(j)$. Таким образом, функциональное уравнение Беллмана будет иметь вид

$$F_k(i) = \min_j \{C_{ij} + F_{k-1}(j)\}. \tag{5.6.1}$$

Минимум затрат достигается на некотором значении j^*, которое является оптимальным направлением движения из пункта i в конечный пункт.

На четвертом шаге попадаем на 4-й пояс; состояние системы становится определенным $i = 1$. Функция $F_4(1)$ представляет собой минимально возможные затраты по перемещению груза из 1-го пункта в 10-й. Оптимальный маршрут определяется в результате анализа всех шагов в обратном порядке, а выбор некоторого управления j на k-*м* шаге приводит к тому, что состояние системы на $(k - 1)$-м шаге становится определенным.

Пример. Решим сформулированную выше задачу, исходные данные которой приведены на рис. 5.6.1.

I этап. Условная оптимизация.

1-й шаг: $k = 1$.

$F_1(i) = C_{i10}$.

На первом шаге в пункт 10 груз может быть доставлен из пунктов 7, 8 или 9.

Таблица 5.6.1

i \ j	10	$F_1(i)$	j^*
7	7	7	10
8	9	9	10
9	11	11	10

2-й шаг: $k = 2$.

Функциональное уравнение на втором шаге принимает вид

$$F_2(i) = \min_j \{C_{ij} + F_1(j)\}.$$

Все возможные перемещения груза на втором шаге и результаты расчета приведены в табл. 5.6.2.

Таблица 5.6.2

i \ j	7	8	9	$F_2(i)$	j^*
5	8 + 7	6 + 9	–	15	7; 8
6	5 + 7	–	4 + 11	12	7

3-й шаг: $k = 3$.

$$F_3(i) = \min_j \{C_{ij} + F_2(j)\}.$$

Таблица 5.6.3

$i \backslash j$	5	6	$F_3(i)$	j^*
2	4 + 15	–	19	5
3	–	3 + 12	15	6
4	–	9 + 12	21	6

4-й шаг: $k = 4$.

$$F_4(i) = \min_j \{C_{ij} + F_3(j)\}.$$

Таблица 5.6.4

$i \backslash j$	2	3	4	$F_3(i)$	j^*
1	7 + 19	5 + 15	6 + 21	20	3

II этап. Безусловная оптимизация

На этапе условной оптимизации получено, что минимальные затраты на перевозку груза из пункта 1 в пункт 10 составляют $F_4(1) = 20$. Данный результат достигается при движении груза из 1-го пункта в 3-й. По данным табл. 5.6.3, из пункта 3 необходимо двигаться в пункт 6, затем – в пункт 7 (см. табл. 5.6.2) и из него – в конечный пункт (см. табл .5.6.1). Таким образом, оптимальный маршрут доставки груза: $1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 10$. (На рис. 5.6.2 он показан жирными стрелками.)

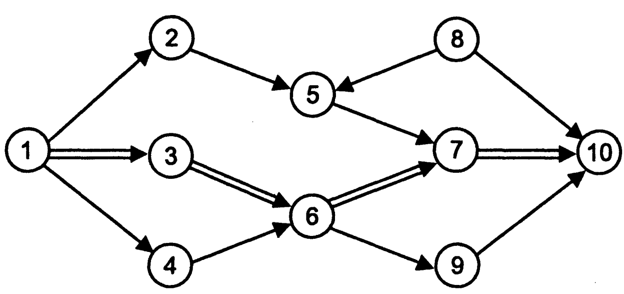


Рис. 5.6.2. Транспортная сеть с оптимальным маршрутом

5.7. Построение оптимальной последовательности операций в коммерческой деятельности

Пусть на оптовую базу прибыло n машин с товаром для разгрузки и m машин для загрузки товаров, направляемых в магазины. Материально ответственное лицо оптовой базы осуществляет оформление документов по операциям разгрузки или загрузки для одной машины, а затем переходит к обслуживанию другой машины. Издержки от операций обусловлены простоем транспорта, типом операции (прием или отправка товара) и не зависят от конкретной машины. Необходимо спланировать последовательность операций обоих видов таким образом, чтобы суммарные издержки по приему и отправке товаров для всех машин были минимальными.

Из условия следует, что состояние экономической системы характеризуется двумя параметрами: количеством принятых и оформленных машин по разгрузке товара и количеством машин отправленных с товаром в магазины. Поэтому решение будем искать на плоскости $X0Y$, ограниченной прямоугольником, который является областью допустимых состояний системы. Если по оси X отложить число n разгруженных машин, а по оси Y – число m загруженных товаром машин, то можно построить на плоскости граф состояний процесса, в котором каждая вершина характеризует состояние операции приема и отгрузки товара на оптовой базе. Ребра этого графа означают выполнение работы по приему или отправке товара на очередной машине. Каждому ребру можно сопоставить издержки, связанные с выполнением операции по разгрузке или загрузке машины.

Пример. Пусть $n = 6$, $m = 4$. Известны затраты по выполнению каждой операции, которые показаны на ребрах графа (рис. 5.7.1).

Точка S_0 определяет начало процесса, а S_1 – конечное состояние, соответствующее приему и отправке всех машин. Оптимизацию процесса будем производить с конечного состояния – S_1. Весь процесс разобьем на шаги, их количество $k = n + m = 6 + 4 = 10$. Каждый шаг представляет собой сечение графа состояний, проходящее через вершины (на рис. 5.7.1 сечения показаны косыми линиями).

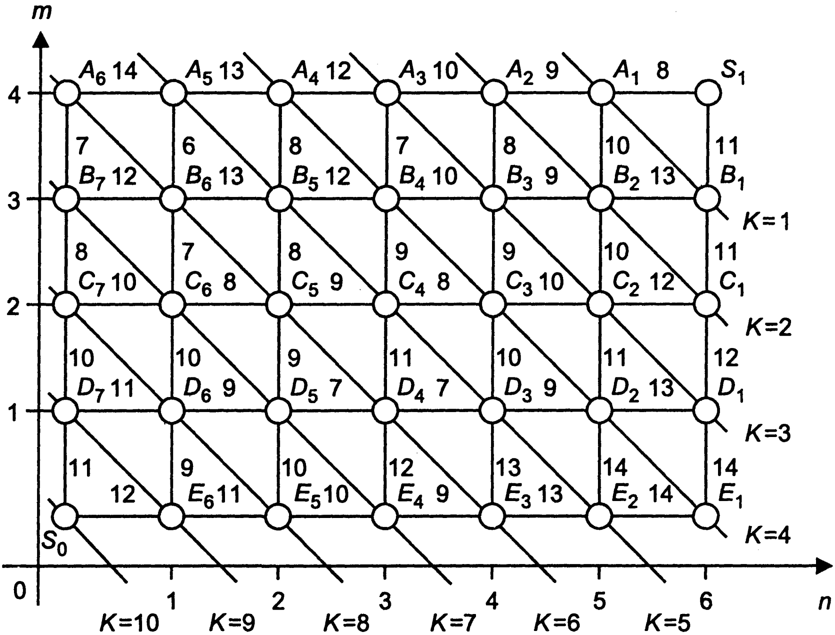


Рис. 5.7.1. Графическая схема связи операций

I этап. Условная оптимизация

1-й шаг: $k = 1$. На первом шаге с задаваемым сечением A_1, B_1 из состояний A_1 и B_1 возможен только один вариант перехода в конечное состояние S_1. Поэтому в вершинах A_1 и B_1 записываем соответственно издержки 8 и 11. Ребра A_1S_1 и B_1S_1 обозначаем стрелкой, направленной в вершину S_1, как показано на рис. 5.7.2.

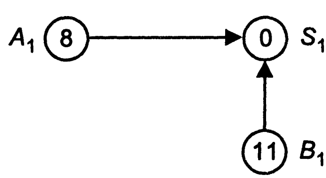


Рис. 5.7.2. Фрагмент связи операции (шаг 1)

2-й шаг: $k = 2$. Второй шаг оптимизации задается сечением по вершинам A_2, B_2, C_1. Из состояний A_2 и C_1 возможен единственный переход в вершины A_1 и B_1 соответственно, поэтому в вершинах A_2 и C_1 записываем суммарные издержки 17 и 22 на первых двух шагах перехода в конечное состояние S_1.

Из вершины B_2 возможны два варианта перехода: в вершину A_1 или вершину B_1. При переходе $B_2 \to A_1$ сумма издержек составляет $10 + 8 = 18$, на переходе $B_2 \to B_1$ сумма составляет $13 + 11 = 24$. Из двух вариантов суммарных издержек выбираем наименьшую (18) и обозначаем стрелкой условно оптимальный переход $B_2 \to A_1$, как показано на рис. 5.7.3.

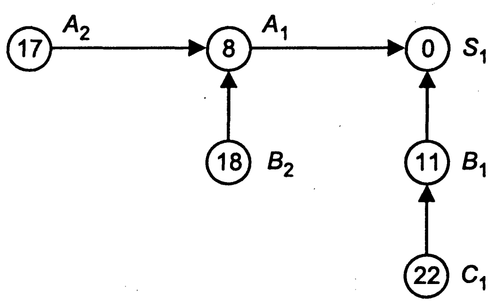


Рис. 5.7.3. Сетевая модель операции (шаг 2)

3-й шаг: $k = 3$. На третьем шаге сечение проходит через вершины A_3, B_3, C_2, D_1. Из вершин A_3 и D_1 возможен единственный переход в вершины A_2 и C_1 соответственно. Суммарные издержки для состояния D_1 равны $22 + 12 = 34$. Из вершины B_3 возможны два варианта перехода: в вершину A_2 издержки равны $17 + 8 = 25$; в вершину B_2 – $18 + 9 = 27$.

Для вершины C_2 возможен переход в вершину B_2 ($18 + 10 = 28$) и в вершину C_1 ($22 + 12 = 34$). Выбираем для вершин B_3 и C_2 наименьшие суммарные издержки и обозначаем стрелкой условно оптимальный переход, как показано на рис. 5.7.4.

Продолжая процесс аналогичным образом для оставшихся шагов, приходим в точку S_0. В результате получим граф условно оптимальных переходов, представленный на рис. 5.7.5.

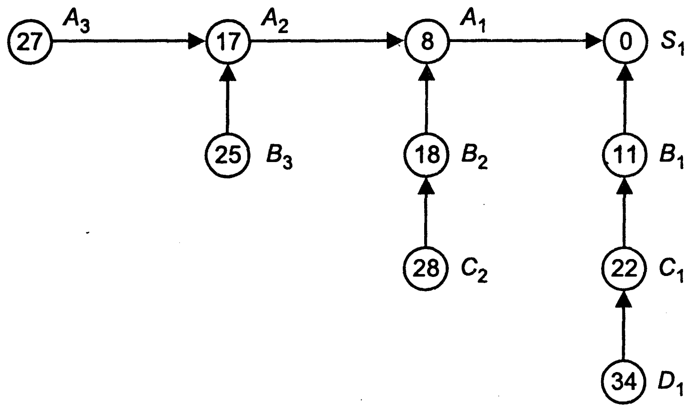


Рис. 5.7.4. Сетевая модель операции (шаг 3)

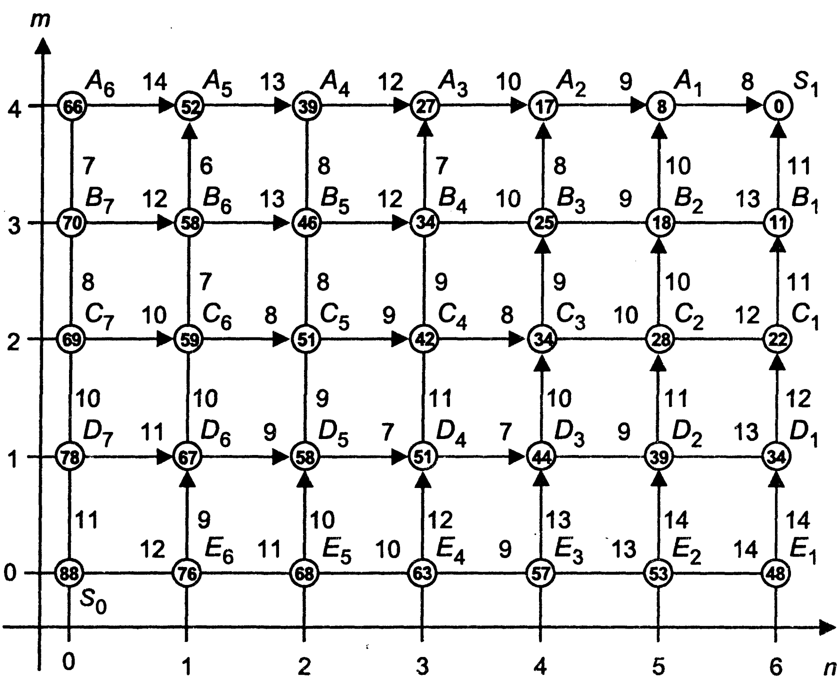


Рис. 5.7.5. Сетевая модель связи расходов операций

Минимально возможные суммарные издержки по обслуживанию всех 10 машин на оптовой базе составляют 88 усл. ед.

II этап. Безусловная оптимизация

Определяем оптимальную траекторию на исходном сетевом графе, просматривая результаты всех шагов в обратном порядке, учитывая, что выбор некоторого управления на k-м шаге приводит к тому, что состояние на $(k - 1)$-м шаге становится определенным.

В результате строим ориентированный граф перехода из состояния S_0 в состояние S_1, представленный на рис. 5.7.6; на каждом шаге безусловной оптимизации переход почти всегда единственный и совпадает с построенными условно оптимальными переходами.

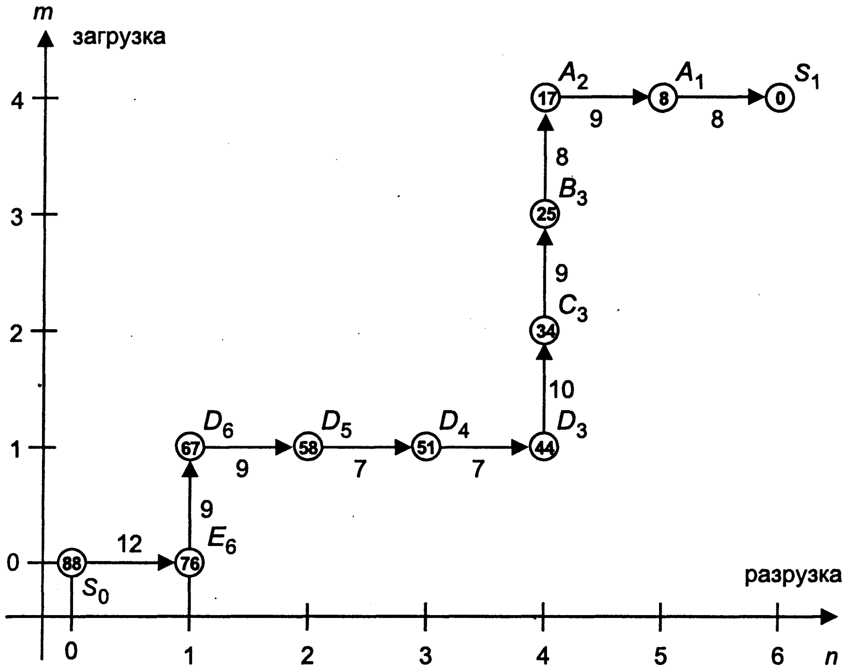


Рис. 5.7.6. Оптимальная последовательность операций

Минимальные издержки $F_{\min}$ соответствуют следующему оптимальному пути на графе:

$$(S_0 \to E_6 \to D_6 \to D_5 \to D_4 \to D_3 \to C_3 \to B_3 \to A_2 \to A_1 \to S_1)$$

и равны: $F_{\min} = 12 + 9 + 9 + 7 + 7 + 10 + 9 + 8 + 9 + 8 = 88$ усл. ед.

Таким образом, в соответствии с решением оптимальное управление процессом разгрузки и загрузки машин товаром состоит в следующем: на первом шаге следует оформить документы по разгрузке одной машины, на втором – по загрузке одной машины, далее обслуживать три машины по разгрузке товара, три машины по загрузке и на последних двух шагах оформить документы по разгрузке двух машин.

Контрольные вопросы

1. Как формулируется задача динамического программирования и в чем ее отличие от задач линейного программирования?
2. В чем заключаются особенности математической модели ДП?
3. Что лежит в основе метода ДП?
4. Сформулируйте задачу определения кратчайших расстояний по заданной сети. На сколько этапов разбивается задача? Сколько шагов содержится в каждом этапе и в чем суть этапа и шага?
5. Что является переменной управления и переменной состояния в задаче выбора оптимальной стратегии обновления оборудования?
6. Запишите функциональные уравнения Беллмана, используемые на каждом шаге управления в задаче выбора оптимальной стратегии обновления оборудования.
7. Запишите математическую модель оптимального распределения инвестиций и рекуррентное соотношение Беллмана для ее реализации.

Задачи

1. Распределите оптимальным образом денежные средства инвестора величиной X между четырьмя предприятиями. От выделенной суммы зависит прирост выпуска продукции на предприятиях, значения которых приведены в таблице.

Денежные средства, X	Прирост выпуска продукции на предприятиях			
	I	II	III	IV
20	9	11	13	12
40	17	33	29	35
60	28	45	38	40
80	38	51	49	54
100	46	68	61	73
120	68	80	81	92

2. Найти оптимальный план замены оборудования за период продолжительностью 6 лет, если годовой доход $r(t)$ и остаточная стоимость $S(t)$ в зависимости от возраста заданы в таблице, стоимость нового оборудования Р = 10, а возраст оборудования к началу эксплуатации составляет 1 год.

T	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	8	8	7	7	6	6	5
$S(t)$	10	7	6	5	4	3	2

3. Предприниматель закупил и установил за 40 млн руб. новую деревообрабатывающую линию станков для производства стройматериалов. Динамика объемов продажи стройматериалов, затраты на эксплуатацию станков и их остаточная стоимость по годам приведены в таблице.

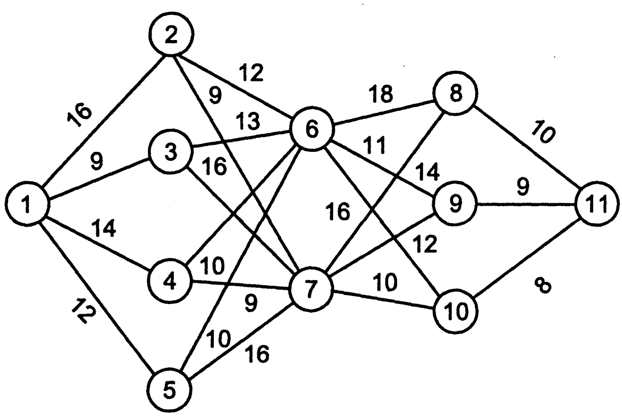
Показатели	Время эксплуатации станков, лет				
	0	1	2	3	4
Объемы продаж, млн руб.	100	80	70	65	65
Затраты, млн руб.	6	40	35	35	45
Остаточная стоимость, млн руб.	40	30	25	20	15

Определите оптимальный план замены станков, обеспечивающий максимальный объем продажи стройматериалов.

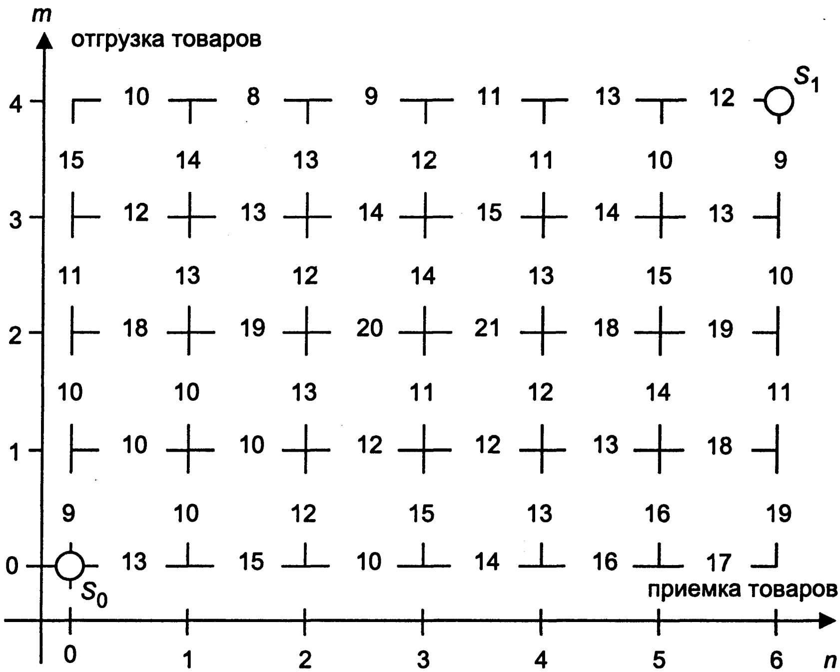
4. Определите оптимальный срок эксплуатации нового легкового автомобиля «ВАЗ 2106», его продажи и соответственно покупки нового. Динамика изменения ликвидационной стоимости и затрат на ремонт в относительных единицах к цене нового автомобиля, а также величина ежегодного пробега приведены в таблице.

Показатели	Время эксплуатации автомобиля, лет						
	0	1	2	3	4	5	6
Ликвидационная стоимость, Ц(t)/Ц$_0$	1	0,95	9,9	0,35	0,8	0,75	0,7
Затраты на ремонт, З(t)Ц$_0$	0,1	0,06	0,07	0,10	0,15	0,20	0,25
Пробег, тыс. км/год	20	20	20	20	20	20	20

5. На заданной сети дорог имеется несколько маршрутов по доставке груза из пункта 1 в пункт 11. Стоимость перевозки единицы груза между отдельными пунктами сети проставлена у ребер. Необходимо определить оптимальный маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 11, который обеспечил бы минимальные транспортные расходы.



6. Определите оптимальную последовательность операций по приемке и отпуску товаров на предприятии оптовой торговли, позволяющую минимизировать суммарные издержки при условиях, приведенных в виде матрицы вариантов связей и затрат по каждой операции.



ГЛАВА 6

СИСТЕМЫ И МОДЕЛИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В настоящее время появилось большое количество литературы, посвященной непосредственно теории массового обслуживания, развитию ее математических аспектов, а также различных сфер ее приложения – военной, медицинской, транспортной, торговле, авиации и др.

Теория массового обслуживания опирается на теорию вероятностей и математическую статистику. Первоначальное развитие теории массового обслуживания связано с именем датского ученого А. К. Эрланга (1878–1929), с его трудами в области проектирования и эксплуатации телефонных станций.

Теория массового обслуживания – область прикладной математики, занимающаяся анализом процессов в системах производства, обслуживания, управления, в которых однородные события повторяются многократно, например, на предприятиях бытового обслуживания; в системах приема, переработки и передачи информации; автоматических линиях производства и др. Большой вклад в развитие этой теории внесли российские математики А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Е. С. Вентцель и др.

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимостей между характером потока заявок, числом каналов обслуживания, производительностью отдельного канала и эффективным обслуживанием с целью нахождения наилучших путей управления этими процессами. Задачи теории массового обслуживания носят оптимизационный характер и в конечном итоге включают экономический аспект по определению такого варианта системы, при котором будет обеспечен минимум суммарных затрат от ожидания обслуживания, потерь времени и ресурсов на обслуживание и от простоев каналов обслуживания.

В коммерческой деятельности применение теории массового обслуживания пока не нашло желаемого распространения.

В основном это связано с трудностью постановки задач, необходимостью глубокого понимания содержания коммерческой деятельности, а также надежного и точного инструментария, позволяющего просчитывать в коммерческой деятельности различные варианты последствий управленческих решений.

6.1. Массовое обслуживание в коммерческой деятельности

Природа массового обслуживания, особенно в такой сфере, какой является коммерческая деятельность, весьма тонка и сложна. Коммерческая деятельность связана с выполнением множества операций на этапах движения, например товарной массы из сферы производства в сферу потребления. Такими операциями являются погрузка товаров, перевозка, разгрузка, хранение, обработка, фасовка, реализация. Кроме таких основных операций процесс движения товаров сопровождается большим количеством предварительных, подготовительных, сопутствующих, параллельных и последующих операций с платежными документами, тарой, деньгами, автомашинами, клиентами и т.п.

Для перечисленных фрагментов коммерческой деятельности характерны массовость поступления товаров, денег, посетителей в случайные моменты времени, затем их последовательное обслуживание (удовлетворение требований, запросов, заявок) путем выполнения соответствующих операций, время выполнения которых носит также случайный характер. Все это создает неравномерность в работе, порождает недогрузки, простой и перегрузки в коммерческих операциях. Много неприятностей доставляют очереди, например, посетителей в кафе, столовых, ресторанах, или водителей автомобилей на товарных базах, ожидающих разгрузки, погрузки или оформления документов. В связи с этим возникают задачи анализа существующих вариантов выполнения всей совокупности операций, например, торгового зала супермаркета, ресторана или в цехах производства собственной продукции для целей оценки их работы, выявления слабых звеньев и резервов для разработки в конечном итоге рекомендаций, направленных на увеличение эффективности коммерческой деятельности.

Кроме того, возникают другие задачи, связанные с созданием, организацией и планированием нового экономичного, рационального варианта выполнения множества операций в пределах торгового зала, кондитерского цеха, всех звеньев обслуживания ресторана, кафе, столовой, планового отдела, бухгалтерии, отдела кадров и др.

Задачи организации массового обслуживания возникают практически во всех сферах человеческой деятельности, например обслуживание продавцами покупателей в магазинах, обслуживание посетителей на предприятиях общественного питания, обслуживание клиентов на предприятиях бытового обслуживания, обеспечение телефонных разговоров на телефонной станции, оказание медицинской помощи больным в поликлинике и т.д. Во всех приведенных примерах возникает необходимость в удовлетворении запросов большого числа потребителей.

Перечисленные задачи можно успешно решать с помощью методов и моделей специально созданной для этих целей теории массового обслуживания (ТМО). В этой теории поясняется, что обслуживать необходимо кого-либо или что-либо, что определяется понятием «заявка (требование) на обслуживание», а операции обслуживания выполняются кем-либо или чем-либо, называемыми каналами (узлами) обслуживания.

Роль заявок в коммерческой деятельности выполняют товары, посетители, деньги, ревизоры, документы, а роль каналов обслуживания – продавцы, администраторы, повара, кондитеры, официанты, кассиры, товароведы, грузчики, торговое оборудование и др. Важно заметить, что в одном варианте, например, повар в процессе приготовления блюд является каналом обслуживания, а в другом – выступает в роли заявки на обслуживание, например к заведующему производством за получением товара.

Заявки в силу массовости поступления на обслуживание образуют потоки, которые до выполнения операций обслуживания называются входящими, а после возможного ожидания начала обслуживания, т.е. простоя в очереди, образуют потоки обслуживания в каналах, а затем формируется выходящий поток заявок. В целом совокупность элементов входящего потока заявок, очереди, каналов обслуживания и выходящего потока заявок образует простейшую одноканальную систему массового обслуживания – СМО, структурная модель которой представлена на рис. 6.6.1.

Под системой понимается совокупность взаимосвязанных и целенаправленно взаимодействующих частей (элементов). Примерами таких простейших СМО в коммерческой деятельности являются места приема и обработки товаров, узлы расчета с покупателями в магазинах, кафе, столовых, рабочие места экономиста, бухгалтера, коммерсанта, повара на раздаче и т.д.

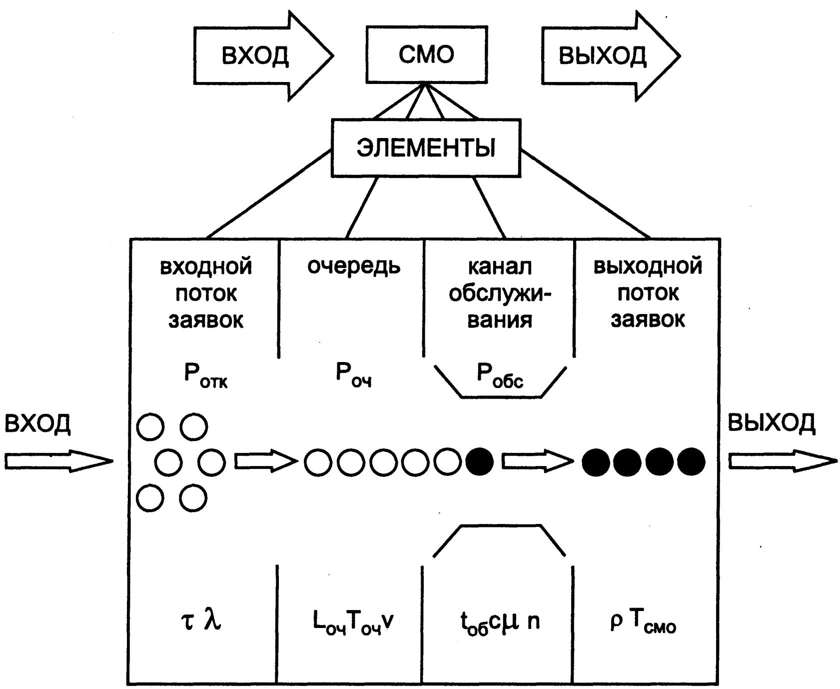


Рис. 6.6.1. Структурная модель одноканальной СМО

Процедура обслуживания считается завершенной, когда заявка на обслуживание покидает систему. Продолжительность интервала времени, требуемого для реализации процедуры обслуживания, зависит в основном от характера запроса заявки на обслуживание, состояния самой обслуживающей системы и канала обслуживания.

Действительно, продолжительность пребывания покупателя в супермаркете зависит, с одной стороны, от личностных качеств покупателя, его запросов, от ассортимента товаров, который он собирается приобрести, а с другой – от формы организации обслуживания и обслуживающего персонала, что может значительно повлиять на время пребывания покупателя в супермаркете и интенсивность обслуживания. Например, овладение кассирами-контролерами работы «слепым» методом на кассовом аппарате позволило увеличить пропускную способность узлов расчета в 1,3 раза и сэкономить время, затрачиваемое на расчеты с покупателями по каждой кассе более чем на 1,5 ч в день. Внедрение единого узла расчета в супермаркете дает ощутимые преимущества покупателю. Так, если при традиционной форме расчетов время обслуживания одного покупателя составляло в среднем 1,5 мин, то при введении единого узла расчета – 67 с. Из них 44 с уходят на оформление покупки в секции и 23 с непосредственно на расчеты за покупки. Если покупатель делает несколько покупок в разных секциях, то потери времени сокращаются при приобретении двух покупок в 1,4 раза, трех – в 1,9, пяти – в 2,9 раза.

Под обслуживанием заявок будем понимать процесс удовлетворения потребности. Обслуживание имеет различный характер по своей природе. Однако во всех примерах поступившие заявки нуждаются в обслуживании со стороны какого-либо устройства. В некоторых случаях обслуживание производится одним человеком (обслуживание покупателя одним продавцом, в некоторых – группой людей (обслуживание больного врачебной комиссией в поликлинике), а в некоторых случаях – техническими устройствами (продажа газированной воды, бутербродов автоматами). Совокупность средств, которые осуществляют обслуживание заявок, называется каналом обслуживания.

Если каналы обслуживания способны удовлетворить одинаковые заявки, то каналы обслуживания называются однородными. Совокупность однородных каналов обслуживания называется обслуживающей системой.

В систему массового обслуживания поступает большое количество заявок в случайные моменты времени, длительность обслуживания которых также является случайной величиной. Последовательное поступление заявок в систему обслуживания называется входящим потоком заявок, а последовательность заявок, покидающих систему обслуживания, – выходящим потоком.

Случайный характер распределения длительности выполнения операций обслуживания наряду со случайным характером поступления требований на обслуживание приводит к тому, что в каналах обслуживания протекает случайный процесс, который может быть назван (по аналогии с входным потоком заявок) потоком обслуживания заявок или просто потоком обслуживания.

Заметим, что заявки, поступающие в систему обслуживания, могут покинуть ее и будучи не обслуженными. Например, если покупатель не найдет в магазине нужный товар, то он покидает магазин, будучи не обслуженным. Покупатель может покинуть магазин также, если нужный товар имеется, но большая очередь, а покупатель не располагает временем.

Теория массового обслуживания занимается изучением процессов, связанных с массовым обслуживанием, разработкой методов решения типичных задач массового обслуживания.

При исследовании эффективности работы системы обслуживания важную роль играют различные способы расположения в системе каналов обслуживания.

При параллельном расположении каналов обслуживания требование может быть обслужено любым свободным каналом. Примером такой системы обслуживания является расчетный узел в магазинах самообслуживания, где число каналов обслуживания совпадает с числом кассиров-контролеров.

На практике часто обслуживание одной заявки осуществляется последовательно несколькими каналами обслуживания. При этом очередной канал обслуживания начинает работу по обслуживанию заявки после того, как предыдущий канал закончил свою работу. В таких системах процесс обслуживания носит многофазовый характер, обслуживание заявки одним каналом называется фазой обслуживания. Например, если в магазине самообслуживания имеются отделы с продавцами, то покупатели сначала обслуживаются продавцами, а потом уже кассирами-контролерами.

Организация системы обслуживания зависит от воли человека. Под качеством функционирования системы в теории массового обслуживания понимают не то, насколько хорошо выполнено обслуживание, а то, насколько полно загружена система обслуживания, не простаивают ли каналы обслуживания, не образуется ли очередь.

В коммерческой деятельности заявки, поступающие в систему массового обслуживания, выступают с высокими претензиями еще и на качество обслуживания в целом, которое включает не только перечень характеристик, исторически сложившихся и рассматриваемых непосредственно в теории массового обслуживания, но и дополнительные характерные для специфики коммерческой деятельности, в частности отдельных процедур обслуживания, требования к уровню которых к настоящему времени сильно возросли. В связи с этим необходимо учитывать еще и показатели коммерческой деятельности.

Работу системы обслуживания характеризуют такие показатели, как время ожидания начала обслуживания, длина очереди, возможность получения отказа в обслуживании, возможность простоя каналов обслуживания, стоимость обслуживания и в конечном итоге удовлетворение качеством обслуживания, которое еще включает показатели коммерческой деятельности.

Чтобы улучшить качество функционирования системы обслуживания, необходимо определить, каким образом распределить поступающие заявки между каналами обслуживания, какое количество каналов обслуживания необходимо иметь, как расположить или сгруппировать каналы обслуживания или обслуживающие аппараты для улучшения показателей коммерческой деятельности. Для решения перечисленных задач существует эффективный метод моделирования, включающий и объединяющий достижения разных наук, в том числе математики.

Контрольные вопросы

1. Что такое обслуживание?
2. Каковы виды заявок на обслуживание в коммерческой деятельности?
3. Что является каналами обслуживания в коммерческой деятельности?
4. Каковы механизмы массовости поступления заявок на обслуживание в коммерческой деятельности?
5. Какие трудности в реализации обеспечения массового обслуживания в коммерческой деятельности?
6. Перечислите показатели коммерческой деятельности.
7. Каков универсальный метод решения задач массового обслуживания?

6.2. Моделирование систем массового обслуживания

6.2.1. Потоки событий

Переходы СМО из одного состояния в другое происходят под воздействием вполне определенных событий – поступления заявок и их обслуживания. Последовательность появления событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени, формирует так называемый поток событий. Примерами таких потоков в коммерческой деятельности являются потоки различной природы – товаров, денег, документов, транспорта, клиентов, покупателей, телефонных звонков, переговоров. Поведение системы обычно определяется не одним, а сразу несколькими потоками событий. Например, обслуживание покупателей в магазине определяется потоком покупателей и потоком обслуживания; в этих потоках случайными являются моменты появления покупателей, время ожидания в очереди и время, затрачиваемое на обслуживание каждого покупателя.

При этом основной характерной чертой потоков является вероятностное распределение времени между соседними событиями. Существуют различные потоки, которые отличаются своими характеристиками.

Поток событий называется **регулярным**, если в нем события следуют одно за другим через заранее заданные и строго определенные промежутки времени. Такой поток является идеальным и очень редко встречается на практике. Чаще встречаются нерегулярные потоки, не обладающие свойством регулярности.

Поток событий называется **стационарным**, если вероятность попадания любого числа событий на промежуток времени зависит только от длины этого промежутка и не зависит от того, как далеко расположен этот промежуток от начала отсчета времени. Стационарность потока означает независимость от времени его вероятностных характеристик, в частности, интенсивность такого потока есть среднее число событий в единицу времени и остается величиной постоянной. На практике обычно потоки могут считаться стационарными только на некотором ограниченном промежутке времени. Обычно поток покупателей, например, в магазине существенно меняется в течение рабочего дня. Однако можно выделить определенные временные интервалы, внутри которых этот поток допустимо рассматривать как стационарный, имеющий постоянную интенсивность.

Поток событий называется потоком без последствия, если число событий, попадающих на один из произвольно выбранных промежутков времени, не зависит от числа событий, попавших на другой, также произвольно выбранный промежуток, при условии, что эти промежутки не пересекаются между собой. В потоке без последствия события появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга. Например, поток покупателей, входящих в магазин, можно считать потоком без последствия потому, что причины, обусловившие приход каждого из них, не связаны с аналогичными причинами для других покупателей.

Поток событий называется **ординарным**, если вероятность попадания на очень малый отрезок времени сразу двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания только одного события. В ординарном потоке события происходят поодиночке, а не по два или более сразу.

Если поток одновременно обладает свойствами **стационарности, ординарности и отсутствием последствия,** то такой поток называется **простейшим** (или **пуассоновским**) потоком событий. Математическое описание воздействия такого потока на системы оказывается наиболее простым. Поэтому, в частности, простейший поток играет среди других существующих потоков особую роль.

Рассмотрим на оси времени некоторый промежуток времени τ. Допустим, вероятность попадания случайного события на этот промежуток p, а полное число возможных событий – n. При наличии свойства ординарности потока событий вероятность p должна быть достаточно малой величиной, а n – достаточно большим числом, поскольку рассматриваются массовые явления. В этих условиях для вычисления вероятности попадания на промежуток времени τ некоторого числа событий m можно воспользоваться формулой Пуассона:

$$P_{m,n} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad (m = \overline{0,n}),$$

где величина $a = np$ – среднее число событий, попадающих на промежуток времени τ, которое можно определить через интенсивность потока событий λ следующим образом:

$$a = \lambda\tau.$$

Размерность интенсивности потока λ есть среднее число событий в единицу времени. Между n и λ, p и τ имеется следующая связь:

$$n = \lambda t; \quad p = \frac{\tau}{t},$$

где t – весь промежуток времени, на котором рассматривается действие потока событий.

Необходимо определить распределение интервала времени T между событиями в таком потоке. Поскольку это случайная величина, найдем ее функцию распределения. Как известно из теории вероятностей, интегральная функция распределения $F(t)$ есть вероятность того, что величина T будет меньше времени t.

$$F(t) = P(T < t).$$

По условию в течение времени T не должно произойти ни одного события, а на интервале времени t должно появиться хотя бы одно событие. Эта вероятность вычисляется с помощью вероятности противоположного события на промежутке времени $(0;\, t)$, куда не попало ни одного события, т.е. $m = 0$, тогда

$$F(t) = 1 - P_0 = 1 - \frac{a^0}{0!}e^{-a} = 1 - e^{-\lambda \cdot t}, \quad t \geq 0.$$

Для малых Δt можно получить приближенную формулу, получаемую заменой функции $e^{-\lambda \cdot t}$, только двумя членами разложения в ряд по степеням Δt, тогда вероятность попадания на малый промежуток времени Δt хотя бы одного события составляет

$$P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \approx 1 - \left[1 - \lambda\Delta t + \frac{1}{2}(\lambda\Delta t)^2 - \frac{1}{6}(\lambda\Delta t)^3\right] \approx \lambda\Delta t.$$

Плотность распределения промежутка времени между двумя последовательными событиями получим, продифференцировав $F(t)$ по времени,

$$f(t) = \lambda\, \mathrm{e}{-}\lambda^t,\ t \geq 0.$$

Пользуясь полученной функцией плотности распределения, можно получить числовые характеристики случайной величины T: математическое ожидание $M(T)$, дисперсию $D(T)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(T)$.

$$M(T) = \lambda\int_0^\infty t \cdot e^{-\lambda t} \cdot dt = \frac{1}{\lambda}; \quad D(T) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(T) = \frac{1}{\lambda}.$$

Отсюда можно сделать следующий вывод: средний интервал времени T между любыми двумя соседними событиями в простейшем потоке в среднем равен $1/\lambda$ и его среднее квадратическое отклонение также равно $1/\lambda$, где λ – интенсивность потока, т.е. среднее число событий, происходящих в единицу времени. Закон распределения случайной величины, обладающей такими свойствами $M(T) = T$, называется показательным (или экспоненциальным), а величина λ является параметром этого показательного закона. Таким образом, для простейшего потока математическое ожидание интервала времени между соседними событиями равно его среднеквадратическому отклонению.

В этом случае вероятность того, что число заявок, поступающих на обслуживание за промежуток времени t, равно k, определяется по закону Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t},$$

где λ – интенсивность поступления потока заявок, среднее число событий в СМО за единицу времени, например

$$\left[\frac{\text{чел.}}{\text{мин}};\ \frac{\text{руб.}}{\text{ч}};\ \frac{\text{чеков}}{\text{ч}};\ \frac{\text{докум.}}{\text{день}};\ \frac{\text{кг}}{\text{ч}};\ \frac{\text{т}}{\text{год}}\right].$$

Для такого потока заявок время между двумя соседними заявками T распределено экспоненциально с плотностью вероятности:

$$f(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Случайное время ожидания в очереди начала обслуживания $t_{оч}$ тоже можно считать распределенным экспоненциально:

$$f(t_{оч}) = V \cdot \mathrm{e}^{-\nu t_{оч}},$$

где ν – интенсивность потока прохода очереди, определяемая средним числом заявок, проходящих на обслуживание в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T_{оч}},$$

где $T_{оч}$ – среднее время ожидания обслуживания в очереди.

Выходной поток заявок связан с потоком обслуживания в канале, где длительность обслуживания $t_{обс}$ является тоже случайной величиной и подчиняется во многих случаях показательному закону распределения с плотностью вероятности:

$$f(t_{обс}) = \mu \cdot e^{-\mu t_{обс}},$$

где μ – интенсивность потока обслуживания, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени:

$$\mu = \frac{1}{t_{обс}}\left[\frac{\text{чел.}}{\text{мин}}; \frac{\text{руб.}}{\text{ч}}; \frac{\text{чеков}}{\text{ч}}; \frac{\text{докум.}}{\text{день}}; \frac{\text{кг}}{\text{ч}}; \frac{\text{т}}{\text{год}}\right],$$

где $t_{обс}$ – среднее время обслуживания заявок.

Важной характеристикой СМО, объединяющей показатели λ и μ, является интенсивность нагрузки: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, которая показывает степень согласования входного и выходного потоков заявок канала обслуживания и определяет устойчивость системы массового обслуживания.

Кроме понятия простейшего потока событий часто приходится пользоваться понятиями потоков других типов. Поток событий называется **потоком Пальма**, когда в этом потоке промежутки времени между последовательными событиями T_1, T_2, ..., T_k, ..., Tn являются независимыми, одинаково распределенными, случайными величинами, но в отличие от простейшего потока не обязательно распределенными по показательному закону. Простейший поток является частным случаем потока Пальма.

Важным частным случаем потока Пальма является так называемый *поток Эрланга*. Этот поток получается «прореживанием» простейшего потока. Такое «прореживание» производится путем отбора по определенному правилу событий из простейшего потока. Например, условившись учитывать только каждое второе событие из образующих простейший поток, мы получим поток Эрланга второго порядка. Если брать только каждое третье событие, то образуется поток Эрланга третьего порядка и т.д. Можно получить потоки Эрланга любого k-го порядка. Очевидно, простейший поток есть поток Эрланга первого порядка.

Любое исследование системы массового обслуживания начинается с изучения того, что необходимо обслуживать, следовательно, с изучения входящего потока заявок и его характеристик.

Поскольку моменты времени t_i и интервалы времени поступления заявок τ, затем продолжительность операций обслуживания $t_{обс}$ и время ожидания в очереди $t_{оч}$, а также длина очереди $l_{оч}$ – случайные величины, то, следовательно, характеристики состояния СМО носят вероятностный характер, а для их описания следует применять методы и модели теории массового обслуживания.

Перечисленные выше характеристики k, τ, λ, $L_{оч}$, $T_{оч}$, ν, $t_{обс}$, μ, ρ, P_k являются наиболее общими для СМО, которые являются обычно лишь некоторой частью целевой функции, поскольку необходимо учитывать еще и показатели коммерческой деятельности.

Анализ входного потока заявок

Пример 1. Результаты наблюдения за потоком покупателей в секции универмага в течение 10 дней работы и проведения регистрации количества покупателей в течение каждого часа работы представлены в табл. 6.2.1.

Таблица 6.2.1

Дни \ Часы	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	2	3	4	3	5	2
2	3	2	3	2	7	2	3	3
3	1	3	4	3	4	6	4	2
4	4	4	4	5	9	3	4	4
5	2	1	3	7	3	6	2	3
6	3	2	3	4	5	5	3	2
7	4	3	4	3	8	3	4	3
8	1	2	2	4	3	4	2	4
9	3	4	6	3	4	2	4	2
10	2	2	3	5	6	4	2	5

Определим интенсивность входящего потока покупателей за час работы магазина и, используя критерий Пирсона с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$, обоснуем предположение, что поток описывается пуассоновским законом распределения (приложения 1, 2).

Решение

1. Сгруппируем данные по числу покупателей k, посетивших магазин в течение часа, а результаты представим в виде таблицы:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f	3	19	23	21	6	4	2	1	1

Вычислим интенсивность потока:

$$\lambda = \bar{k} = \frac{\sum_{i=1}^{9} k_i f_i}{\sum_{i=1}^{9} f_i} = \frac{279}{80} = 3{,}49 \text{ пок /ч.}$$

Найдем теоретические частоты по формуле

$$f_i^T = N \frac{\lambda k_i}{k_i!} e^{-\lambda}, \text{ где } N = \sum_{i=1}^{9} f_i = 80.$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f^T	8,53	14,9	17,3	15,1	10,5	6,11	3,05	1,33	0,51

2. Вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона по формуле

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{9} \frac{(f_i - f_i^T)^2}{f_i^T} = 12{,}51.$$

3. По заданному уравню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = n - 2$, где n — число групп в ряду (в нашем слу-

чае $n = 9$), по таблице значений критических точек χ^2-распределения определим $\chi^2_{кр}(\alpha) : \chi^2_{кр}(0{,}05{,}7) = 14{,}1$ (приложение 2).

4. Поскольку $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то можно считать в нашем случае это условие выполняется: $12{,}51 < 14{,}1$, входящий поток покупателей описывается пуассоновским законом распределения с интенсивностью λ.

Пример 2. Результаты наблюдения за потоком покупателей в течение 7 дней работы универмага и проведения регистрации покупателей за каждый час представлены в табл. 6.2.2.

Таблица 6.2.2

Дни \ Часы	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	6	3	5	11	6	4
2	3	4	5	4	3	8	4	2
3	2	3	4	5	4	5	6	5
4	4	5	3	10	5	3	4	2
5	3	2	9	5	4	4	5	3
6	5	3	5	12	5	3	2	7
7	2	5	8	4	7	5	6	4

Определим интенсивность входящего потока покупателей в расчете на час работы и по критерию Пирсона с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$; обоснуем предположение о том, что поток описывается пуассоновским законом распределения.

Решение. Используем модели алгоритма. Получим: $\lambda = 4{,}66$ пок/ч; $\chi^2_{набл} = 15{,}32 < \chi^2_{кр}(\alpha, \nu) - 16{,}9$, что свидетельствует о правильном предположении о пуассоновском законе распределения входящего потока покупателей.

Анализ потока обслуживания заявок

Пример 3. Результаты регистрации продолжительности обслуживания покупателей в обувной секции универмага приведены в табл. 6.2.3.

Таблица 6.2.3

№ интервала	Интервал времени обслуживания Δt, мин	Частота f
1	0–5	17
2	5–10	20
3	10–15	19
4	15–20	11
5	20–25	9
6	25–30	6
7	30–35	3
8	35–40	1

Определим среднее время $\overline{t_{обс}}$ и интенсивность μ обслуживания покупателей, затем по критерию Пирсона с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$ обоснуем предположение, что время обслуживания распределяется по показательному закону.

Решение

1. Для каждого интервала Δt_1 вычислим его середину по формуле

$$t_i = \frac{\overline{t_{i-1}} + \overline{t_i}}{2}, \quad i = (1; 8).$$

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5

2. Вычислим среднее время обслуживания $\overline{t_{обс}}$ и интенсивность обслуживания μ:

$$\overline{t_{обс}} = \frac{\sum_{i=1}^{8} \bar{t}_i f_i}{\sum_{i=1}^{8} f_i} = \frac{1125}{86} = 13{,}08 \text{ мин.}$$

$$\mu = \frac{1}{t_{обс}} = \frac{1}{13{,}08} = 0{,}08 \text{ пок/мин} = 4{,}8 \text{ пок/ч.}$$

3. Найдем теоретические частоты по формуле

$$f_i^T = N(e^{\mu \cdot t_{i-1}} - e^{\mu \cdot t_i}), \text{ где } N = \sum_{i=1}^{8} f_i = 86.$$

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8
F^T	27	19	13	9	6	4	3	2

4. Вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона по формуле

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{8} \frac{(f_i - f_i^T)^2}{f_i^T} = 10{,}7.$$

5. По заданному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = n - 2$, где n – число групп в ряду (в нашем случае $n = 8$) по таблице значений критических точек χ^2-распределения определим $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, \nu)$: $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05, 6) = 12{,}59$.

6. Сравним, если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то можно считать, что время обслуживания покупателей распределено по показательному закону с интенсивностью μ, поскольку в нашем случае это условие выполняется: $10{,}7 < 12{,}59$.

Пример 4. Результаты наблюдения за работой консультантов специализированного магазина аудио- и видеотехники по времени обслуживания покупателей представлены в табл. 6.2.4.

Таблица 6.2.4

№ интервала	Интервал времени обслуживания, мин	Частота f
1	0–5	27
2	5–10	23
3	10–15	18
4	15–20	11
5	20–25	8
6	25–30	3

Определим среднее время $\overline{t_{обс}}$ и интенсивность μ обслуживания покупателей и по критерию Пирсона с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$ обоснуем предположение о том, что время обслуживания распределено по показательному закону.

$$\overline{t_{обс}} = 10{,}22 \text{ мин},\ \mu = 6 \text{ пок/ч},\ \chi^2_{набл} = 6{,}75;\ \chi^2_{кр}(\alpha, \nu) = 9{,}49.$$

Пример 5. Результаты регистрации входного потока посетителей в течение дня и значения его характеристики приведены в табл. 6.2.5.

Таблица 6.2.5

Интервалы времени, ч	Максимальное количество покупателей, чел.	Максимальная интенсивность потока $\lambda_{max}\left[\frac{1}{мин}\right]$	Минимальное количество покупателей, чел.	Минимальная интенсивность потока $\lambda_{min}\left[\frac{1}{мин}\right]$	Среднее количество покупателей, чел.
8–9	300	5,0	200	3,3	250
9–10	500	8,3	400	6,6	450
10–11	800	13,3	500	8,3	650
11–12	1000	16,6	300	5,0	650
12–13	700	11,6	300	5,0	500
13–14	0	0	0	0	0
14–15	900	15,0	200	3,3	550
15–16	800	13,3	300	5,0	550
16–17	700	11,6	100	1,6	400
17–18	800	13,3	300	5,0	550
18–19	500	8,3	100	1,6	300
19–20	400	6,6	300	5,0	350
Итого	7400	$\lambda_{max} = 10{,}2$	3000	$\lambda_{min} = 4{,}14$	5200

По приведенным данным поток посетителей в течение дня не постоянен: в разные часы работы магазина в него заходит разное количество посетителей, причем разность между максимальным и минимальным количеством посетителей, зашедших в магазин в течение часа, весьма существенна (от 100 до 1000 человек).

Однако на ограниченном промежутке времени, например в течение часа, поток посетителей может считаться простейшим. Если к тому же длительности интервалов между двумя соседними событиями распределены по закону Пуассона, следовательно, можно вычислить интенсивность потока посетителей для каждого часа работы магазина, а также их среднее значение.

Интенсивность потока покупателей в течение дня, как и количество посетителей магазина, является величиной непостоянной и изменяется в пределах от $\lambda_{min} = 1{,}6$ пок/мин до $\lambda_{max} = 16{,}6$ пок/мин, однако эти значения можно усреднить, и тогда получаются следующие значения $\overline{\lambda}_{min} = 4{,}14$ пок/мин и $\overline{\lambda}_{max} = 10{,}21$ пок/мин. Среднее значение интенсивности потока посетителей в течение дня $\lambda_{cp} = 7{,}2\ 1$ пок/мин.

Рассмотрим распределение потока посетителей того же магазина, но уже в течение недели. Динамика потока посетителей представлена в табл. 6.2.6, в которой значения интенсивности являются усредненными характеристиками потока для каждого дня недели.

Таблица 6.2.6

Интервал времени, дн.	Количество посетителей, чел.	Интенсивность потока λ	
		пок/ч	пок/мин
Понедельник	4000	333,3	5,5
Вторник	3600	300,0	5,0
Среда	6000	500,0	8,3
Четверг	3000	250,0	4,2
Пятница	6800	566,0	9,4
Суббота	7200	600,0	10,0
Итого	30600	$\lambda = 364{,}3$	$\lambda = 6{,}1$

Следует отметить, что максимальные (минимальные) значения интенсивности потока, которые приведены в табл. 6.2.6 ($\lambda_{max} = 10{,}2$, $\lambda_{min} = 4{,}2$), примерно совпадают со средними значениями интенсивности, приведенными в табл. 6.2.5 ($\lambda_{max} = 10{,}2$ в 1/мин, $\lambda_{min} = 4{,}14$ в 1/мин).

Изучение потока посетителей магазина помогает рационально организовать работу СМО, а также работу продавцов и кассиров в течение рабочего дня, добиться более равномерной загрузки торговых работников, повысить эффективность их труда.

Рассмотрим характеристики потока обслуживания на примере работы секции по продаже радио- и телеаппаратуры. Результаты хронометража времени обслуживания покупателей разным числом продавцов в магазине представлены в табл. 6.2.7.

Таблица 6.2.7

Количество обслуживаемых покупателей, чел.	Время обслуживания $\overline{t_{обс}}$, мин		
	2 продавца	4 продавца	6 продавцов
10	30	18	10
18	42	26	15
28	53	32	22
36	67	38	24
46		45	28
54		53	32

По приведенным данным можно рассчитать интенсивность обслуживания покупателей при различной организации торгового процесса: все продавцы работают как одна бригада и тогда они образуют один канал обслуживания, каждый продавец работает самостоятельно и тогда число каналов обслуживания будет определяться количеством продавцов.

Для случая бригадной организации торгового процесса получили следующую интенсивность обслуживания (табл. 6.2.8).

По данным табл. 6.2.8 с увеличением количества продавцов, образующих канал обслуживания, увеличивается интенсивность обслуживания μ.

Таблица 6.2.8

Количество обслуживаемых покупателей, чел.	Интенсивность обслуживания пок/мин, μ		
	2 продавца	4 продавца	6 продавцов
10	0,33	0,55	1,00
18	0,43	0,69	1,20
28	0,53	0,87	1,27
36	0,54	0,95	1,50
46		1,02	1,64
54		1,02	1,69

Для случая, когда каждый продавец работает самостоятельно, получили значения интенсивности обслуживания, которые приведены в табл. 6.2.9.

Таблица 6.2.9

Количество обслуживаемых покупателей, чел.	Интенсивность обслуживания пок/мин, μ		
	2 продавца = = 2 канала	4 продавца = = 4 канала	6 продавцов = = 6 каналов
10	0,16	0,14	0,16
18	0,22	0,17	0,2
28	0,26	0,22	0,21
36	0,27	0,24	0,25
46		0,26	0,27
54		0,26	0,28

По данным табл. 6.2.9 видно, что независимо от количества продавцов интенсивности обслуживания для каждого канала примерно одинаковы, что свидетельствует, в свою очередь, о равномерной загрузке продавцов.

Таким образом, изучая входные потоки обслуживания, можно оценить производительность каналов обслуживания, степень их загрузки и разработать рекомендации по рациональной организации работы систем массового обслуживания.

6.2.2. Графы состояний СМО

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно пользоваться вариантом схематичного изображения возможных состояний СМО (рис. 6.2.1) в виде графа с разметкой его возможных фиксированных состояний. Состояния СМО изображаются обычно либо прямоугольниками, либо кружками, а возможные направления переходов из одного состояния в другое ориентированы стрелками, соединяющими эти состояния. Например, размеченный граф состояний одноканальной системы случайного процесса обслуживания в газетном киоске приведен на рис. 6.2.1.

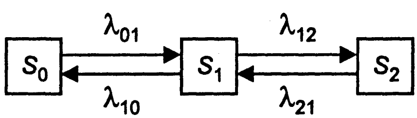


Рис. 6.2.1. Размеченный граф состояний СМО

Система может находиться в одном из трех состояний: S_0 – канал свободен, простаивает, S_1 – канал занят обслуживанием, S_2 – канал занят обслуживанием и одна заявка в очереди. Переход системы из состояния S_0 в S_1 происходит под воздействием простейшего потока заявок интенсивностью λ_{01}, а из состояния S_1 в состояние S_0 систему переводит поток обслуживания с интенсивностью λ_{10}. Граф состояний системы обслуживания с проставленными интенсивностями потоков у стрелок называется размеченным. Поскольку пребывание системы в том или ином состоянии носит вероятностный характер, то вероятность $p_i(t)$ того, что система будет находиться в состоянии S_i в момент времени t, называется вероятностью i-го состояния СМО и определяется числом поступивших заявок k на обслуживание.

Случайный процесс, происходящий в системе, заключается в том, что в случайные моменты времени t_0, t_1, t_2, ..., t_k, ..., t_n система оказывается в том или другом заранее известном дискретном состоянии последовательно. Такая случайная последовательность событий называется **марковской цепью**, если для каждого шага вероятность перехода из одного состояния S_i в любое другое S_j не зависит от того, когда и как система перешла в состояние S_i. Описывается марковская цепь с помощью вероятности состояний, причем они образуют полную группу событий, поэтому их сумма равна единице. Если вероятность перехода не зависит от номера k, то марковская цепь называется однородной. Зная начальное состояние системы обслуживания, можно найти вероятности состояний для любого значения k-числа заявок, поступивших на обслуживание.

6.2.3. Случайные процессы

Переход СМО из одного состояния в другое происходит случайным образом и представляет собой случайный процесс. Работа СМО – случайный процесс с дискретными состояниями, поскольку его возможные состояния во времени можно заранее перечислить. Причем переход из одного состояния в другое происходит скачкообразно, в случайные моменты времени, поэтому он называется процессом с непрерывным временем. Таким образом, работа СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Например, в процессе обслуживания оптовых покупателей на фирме «Кристалл» в Москве можно фиксировать заранее все возможные состояния простейших СМО, которые входят в весь цикл коммерческого обслуживания от момента заключения договора на поставку ликеро-водочной продукции, ее оплаты, оформления документов, отпуска и получения продукции, погрузки и вывоза со склада готовой продукции.

Из множества разновидностей случайных процессов наибольшее распространение в коммерческой деятельности получили такие процессы, для которых в любой момент времени характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в настоящий момент и не зависят от предыстории — от прошлого. Например, возможность получения с завода «Кристалл» ликероводочной продукции зависит от наличия ее на складе готовой продукции, т.е. его состояния в данный момент, и не зависит от того, когда и как получали и увозили в прошлом эту продукцию другие покупатели.

Такие случайные процессы называются процессами без последствия, или марковскими, в которых при фиксированном настоящем будущее состояние СМО не зависит от прошлого. Случайный процесс, протекающий в системе, называется марковским случайным процессом, или «процессом без последствия», если он обладает следующим свойством: для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния $t > t_0$ системы S_i в будущем ($t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние, т.е. от того, как развивался процесс в прошлом.

Марковские случайные процессы делятся на два класса: процессы с дискретными и непрерывными состояниями. Процесс с дискретными состояниями возникает в системах, обладающих только некоторыми фиксированными состояниями, между которыми возможны скачкообразные переходы в некоторые, заранее не известные моменты времени. Рассмотрим пример процесса с дискретными состояниями. В офисе фирмы имеются два телефона. Возможны следующие состояния у этой системы обслуживания: S_0 – телефоны свободны; S_1 – один из телефонов занят; S_2 – оба телефона заняты.

Процесс, протекающий в этой системе, состоит в том, что система случайным образом переходит скачком из одного дискретного состояния в другое.

Процессы с непрерывными состояниями отличаются непрерывным плавным переходом из одного состояния в другое. Эти процессы более характерны для технических устройств, нежели для экономических объектов, где обычно лишь приближенно можно говорить о непрерывности процесса (например, непрерывном расходовании запаса товара), тогда как фактически всегда процесс имеет дискретный характер. Поэтому далее мы будем рассматривать только процессы с дискретными состояниями.

Марковские случайные процессы с дискретными состояниями в свою очередь подразделяются на процессы с дискретным временем и процессы с непрерывным временем. В первом случае переходы из одного состояния в другое происходят только в определенные, заранее фиксированные моменты времени, тогда как в промежутки между этими моментами система сохраняет свое состояние. Во втором случае переход системы из состояния в состояние может происходить в любой случайный момент времени.

На практике процессы с непрерывным временем встречаются значительно чаще, поскольку переходы системы из одного состояния в другое обычно происходят не в какие-то фиксированные моменты времени, а в любые случайные моменты времени.

Для описания процессов с непрерывным временем используется модель в виде так называемой марковской цепи с дискретными состояниями системы, или непрерывной марковской цепью.

6.2.4. Уравнения Колмогорова

Рассмотрим математическое описание марковского случайного процесса с дискретными состояниями системы S_0, S_1, S_2 (см. рис. 6.2.1) и непрерывным временем. Полагаем, что все переходы системы массового обслуживания из состояния S_i в состояние S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λ_{ij}, а обратный переход – под воздействием другого потока λ_{ij}. Введем обозначение p_i как вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_i. Для любого момента времени t справедливо записать нормировочное условие – сумма вероятностей всех состояний равна 1:

$$\sum_{i=0}^{2} p_i(t) = p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1.$$

Проведем анализ системы в момент времени t, задав малое приращение времени Δt, и найдем вероятность $p_1\ (t + \Delta t)$ того, что система в момент времени $(t + \Delta t)$ будет находиться в состоянии S_1, которое достигается разными вариантами:

а) система в момент t с вероятностью $p_i(t)$ находилась в состоянии S_1 и за малое приращение времени Δt так и не перешла в другое соседнее состояние – ни в S_0, ни в S_2. Вывести систему из состояния S_1 можно суммарным простейшим потоком с интенсивностью $(\lambda_{10} + \lambda_{12})$, поскольку суперпозиция простейших потоков также является простейшим потоком. На этом основании вероятность выхода из состояния S_1 за малый промежуток времени Δt приближенно равна $(\lambda_{10} + \lambda_{12}) \cdot \Delta t$. Тогда вероятность невыхода из этого состояния равна $[1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12}) \cdot \Delta t]$. В соответствии с этим вероятность того, что система останется в состоянии S_1 на основании теоремы умножения вероятностей, равна:

$$p_1(t)[1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12}) \cdot \Delta t];$$

б) система находилась в соседнем состоянии S_0 и за малое время Δt перешла в состояние S_1. Переход системы происходит под воздействием потока λ_{01} с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{01}\ \Delta t$.

Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_1, в этом варианте равна $p_0(t)\ \lambda_{01}\ \Delta t$;

в) система находилась в состоянии S_2 и за время Δt перешла в состояние S_1 под воздействием потока интенсивностью λ_{21} с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{21}\Delta t$. Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_1, равна $p_2(t)\ \lambda_{21}\Delta t$.

Применяя теорему сложения вероятностей для этих вариантов, получим выражение:

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t)\ [1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})\ \Delta t] + p_0(t)\ \lambda_{01}\Delta t + p_2(t)\lambda_{21}\Delta t,$$

которое можно записать иначе:

$$\frac{p_1(t+\Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = p_0(t)\lambda_{01} + p_2(t)\lambda_{21} - p_1(t)(\lambda_{10} + \lambda_{12}).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, приближенные равенства перейдут в точные, и тогда получим производную первого порядка

$$\frac{dp_1}{dt} = p_0\lambda_{01} + p_2\lambda_{21} - p_1(\lambda_{10} + \lambda_{12}),$$

что является дифференциальным уравнением.

Проводя рассуждения аналогичным образом для всех других состояний системы, получим систему дифференциальных уравнений, которые называются уравнениями А.Н. Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = p_1\lambda_{10} - \lambda_{01}p_0, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = p_0\lambda_{01} + p_2\lambda_{21} - p_1(\lambda_{10} + \lambda_{12}), \\ \dfrac{dp_2}{dt} = p_1\lambda_{12} - \lambda_{21}p_2. \end{cases}$$

Для составления уравнений Колмогорова существуют общие правила.

Уравнения Колмогорова позволяют вычислить все вероятности состояний СМО S_i в функции времени $p_i(t)$. В теории случайных процессов показано, что если число состояний системы конечно, а из каждого из них можно перейти в любое другое состояние, то существуют предельные (финальные) вероятности состояний, которые показывают на среднюю относительную величину времени пребывания системы в этом состоянии. Если предельная вероятность состояния S_0 равна $p_0 = 0{,}2$, то, следовательно, в среднем 20% времени, или 1/5 рабочего времени, система находится в состоянии S_0. Например, при отсутствии заявок на обслуживание $k = 0$, $p_0 = 0{,}2$, следовательно, в среднем 2 ч в день система находится в состоянии S_0 и простаивает, если продолжительность рабочего дня составляет 10 ч.

Поскольку предельные вероятности системы постоянны, то, заменив в уравнениях Колмогорова соответствующие производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим СМО. Такую систему уравнений составляют по размеченному графу состояний СМО по следующим правилам: слева от знака равенства в уравнении стоит предельная вероятность p_i рассматриваемого состояния S_1 умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, выводящих (выходящие стрелки) из данного состояния S_i систему, а справа от знака равенства – сумма произведений интенсивности всех потоков, входящих (входящие стрелки) в состояние S_i систему, на вероятность тех состояний, из которых эти потоки исходят. Для решения подобной системы необходимо добавить еще одно уравнение, определяющее нормировочное условие, поскольку сумма вероятностей всех состояний СМО равна 1:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1.$$

Например, для СМО, имеющей размеченный граф из трех состояний S_0, S_1, S_2 рис. 6.2.1, система уравнений Колмогорова, составленная на основе изложенного правила, имеет следующий вид:

	Выходящие		Входящие
Для состояния $S_0 \to$	$p_0 \cdot \lambda_{01}$	$=$	$p_1 \cdot \lambda_{10}$
Для состояния $S_1 \to$	$(\lambda_{10} + \lambda_{12})$	$=$	$p_0\lambda_{01} + p_{21}\lambda_{21}$
Для состояния $S_2 \to$	$p_2\lambda_{21}$	$=$	$p_1\lambda_{12}$
	$p_0 + p_1 + p_2$	$=$	1

Пример 1. Составим систему уравнений Колмогорова в общем виде для случая, когда граф состояний имеет вид (рис. 6.2.2):

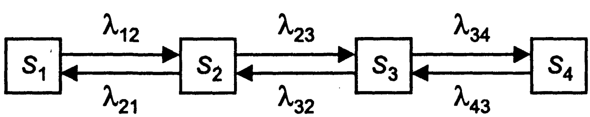


Рис. 6.2.2. Размеченный граф состояний СМО

Плотность вероятностей этих переходов указана рядом с соответствующими стрелками. Пользуясь приведенными выше правилами, получаем систему уравнений:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{21}p_2(t) - \lambda_{12}p_1(t),$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{32}p_3(t) - (\lambda_{21} + \lambda_{23})p_2(t),$$

$$\frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{23}p_2(t) + \lambda_{43}p_4(t) - (\lambda_{32} + \lambda_{34})p_3(t),$$

$$\frac{dp_4(t)}{dt}=\lambda_{34}p_3(t)-\lambda_{43}p_4(t),$$

$$p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)+p_4(t)=1.$$

К этим уравнениям надо добавить еще начальные условия. Например, если при $t=0$ система S находится в состоянии S_1, то начальные условия можно записать так:

$$p_1(0)=1,\ p_2(0)=p_3(0)=p_4(0)=0.$$

Переходы между состояниями СМО происходят под воздействием поступления заявок и их обслуживания. Вероятность перехода в случае, если поток событий простейший, определяется вероятностью появления события в течение времени Δt, т.е. величиной элемента вероятности перехода $\lambda_{ij}\,\Delta t$, где λ_{ij} – интенсивность потока событий, переводящих систему из состояния i в состояние j (по соответствующей стрелке на графе состояний).

Если все потоки событий, переводящие систему из одного состояния в другое, простейшие, то процесс, протекающий в системе, будет марковским случайным процессом, т.е. процессом без последствия. В этом случае поведение системы достаточно просто определяется, если известны интенсивность всех этих простейших потоков событий. Например, если в системе протекает марковский случайный процесс с непрерывным временем, то, записав систему уравнений Колмогорова для вероятностей состояний и проинтегрировав эту систему при заданных начальных условиях, получим все вероятности состояний как функции времени:

$$p_i(t),\ p_2(t),\ \ldots,\ p_n(t).$$

Во многих случаях на практике оказывается, что вероятности состояний как функции времени ведут себя таким образом, что существует

$$\lim_{t\to\infty}p_i(t)=p_i\quad(i=1,2,\ldots,n)$$

независимо от вида начальных условий. В этом случае говорят, что существуют предельные вероятности состояний системы при $t \to \infty$ и в системе устанавливается некоторый предельный стационарный режим. При этом система случайным образом меняет свои состояния, но каждое из этих состояний осуществляется с некоторой постоянной вероятностью, определяемой средним временем пребывания системы в каждом из состояний.

Вычислить предельные вероятности состояния p_i можно, если в системе положить все производные равными 0, поскольку в уравнениях Колмогорова при $t \to \infty$ зависимость от времени пропадает. Тогда система дифференциальных уравнений превращается в систему обычных линейных алгебраических уравнений, которая совместно с нормировочным условием позволяет вычислить все предельные вероятности состояний.

Пример 2. Запишем систему алгебраических уравнений для вычисления предельных вероятностей состояний системы, изображенной на рис. 6.2.2.

Для этого допустим, что

$$\frac{dp_i}{dt} = 0 \quad (i = 1;\ 2;\ 3;\ 4),$$

тогда из записанной ранее в примере 1 системы уравнений Колмогорова получаем:

$$\begin{cases} \lambda_{21} p_{23} - \lambda_{12} p_1 = 0, \\ \lambda_{12} p_1 + \lambda_{23} p_3 - (\lambda_{21} + \lambda_{23}) p_2 = 0, \\ \lambda_{23} p_2 + \lambda_{43} p_4 - (\lambda_{32} + \lambda_{34}) p_3 = 0, \\ \lambda_{34} p_3 - \lambda_{43} p_4 = 0. \end{cases}$$

и, кроме того, мы должны учесть нормировочное условие:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

Любое из уравнений записанной системы можно исключить, использовав вместо него нормировочное условие.

6.2.5. Процессы «рождения–гибели»

Среди однородных марковских процессов существует класс случайных процессов, имеющих широкое применение при построении математических моделей в областях демографии, биологии, медицины (эпидемиологии), экономики, коммерческой деятельности. Это так называемые процессы «рождения–гибели», марковские процессы со стохастическими графами состояний следующего вида:

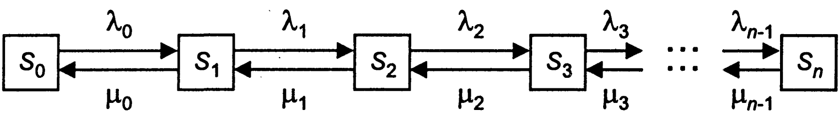


Рис. 6.2.3. Размеченный граф процесса «рождения–гибели»

Этот граф воспроизводит известную биологическую интерпретацию: величина λ_k отображает интенсивность рождения нового представителя некоторой популяции, например кроликов, причем текущий объем популяции равен k; величина μ является интенсивностью гибели (продажи) одного представителя этой популяции, если текущий объем популяции равен k. В частности, популяция может быть неограниченной (число n состояний марковского процесса является бесконечным, но счетным), интенсивность λ может быть равна нулю (популяция без возможности возрождения), например, при прекращении воспроизводства кроликов.

Для марковского процесса «рождения–гибели», описанного стохастическим графом, приведенным на рис. 6.2.3, найдем финальное распределение. Пользуясь правилами составления уравнений для конечного числа n предельных вероятностей состояния системы S_1, S_2, S_3, ..., S_k, ..., S_n, составим соответствующие уравнения для каждого состояния:

для состояния S_0 – $\lambda_0 p_0 = \mu_0 p_1$;

для состояния S_1 – $(\lambda_1 + \mu_0)p_1 = \lambda_0 p_0 + \mu_1 p_2$, которое с учетом предыдущего уравнения для состояния S_0 можно преобразовать к виду $\lambda_1 p_1 = \mu_1 p_2$.

Аналогично можно составить уравнения для остальных состояний системы S_2, S_3, ..., S_k ..., S_n. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 = \mu_0 p_1 \\ \lambda_1 p_1 = \mu_1 p_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{k-1} p_{k-1} = \mu_{k,k+1} p_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{n-1} p_{n-1} = \mu_n p_n \\ p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots + p_n = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, можно получить выражения, определяющие финальные состояния системы массового обслуживания:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_0} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_0\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_0\mu_1\mu_2} + \ldots + \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_n}{\mu_0\mu_1 \ldots \mu_n}\right)^{-1};$$

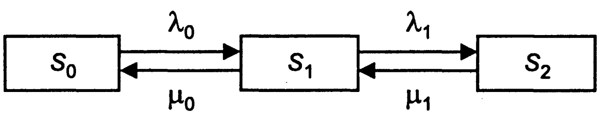
$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_0} p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_0\mu_1} p_0, \quad p_3 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_0\mu_1\mu_2} p_0, \quad p_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n}{\mu_0\mu_2\mu_2 \ldots \mu_n}.$$

Следует заметить, что в формулы определения финальных вероятностей состояний p_1, p_2, p_3, ..., p_n входят слагаемые, являющиеся составной частью суммы выражения, определяющей p_0. В числителях этих слагаемых находятся произведения всех интенсивностей, стоящих у стрелок графа состояний, ведущих слева направо до рассматриваемого состояния S_k, а знаменатели представляют собой произведения всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево до рассматриваемого состояния S_k, т.е. μ_0, μ_1, μ_2, μ_3, ..., μ_k. В связи с этим запишем эти модели в более компактном виде:

$$p_0 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \lambda_j}{\prod_{m=1}^{k} \mu_m} \right)^{-1}, \quad p_k = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \lambda_j}{\prod_{m=1}^{k} \mu_m}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим применение полученных моделей для анализа системы массового обслуживания.

Пример 1. Узел расчета мини-маркета состоит из двух кассовых аппаратов, размеченный граф состояний которого имеет вид, изображенный на рис. 6.2.4.



S_0 – состояние, когда обе кассы свободны;
S_1 – одна касса занята (любая из двух);
S_2 – обе кассы заняты.

Рис. 6.2.4. Размеченный граф состояний СМО

Найдем предельные вероятности p_0, p_1, p_2 при следующих исходных данных:

$$\lambda_0 = 1 \text{пок/мин}; \ \lambda_1 = 0{,}8 \text{ пок/мин}; \ \mu_1 = \mu_0 = 0{,}6 \text{ пок/мин}.$$

Составим систему алгебраических уравнений для вероятностей переходов:

$$\begin{cases} p_0 = 0{,}6 p_1, \\ 0{,}8 p_1 = 0{,}6 p_2, \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

В результате решения этой системы получаем значения предельных вероятностей: $p_0 = 0{,}204$; $p_1 = 0{,}341$; $p_2 = 0{,}455$. Следовательно, доля времени простоя узла расчета, когда нет заявок $k = 0$, составляет 20,4% от всего рабочего времени, 34,1 и 45,5% – от всего времени работы в системе обслуживания находятся соответственно одна и две заявки. Рассмотренный граф является частным случаем непрерывной марковской цепи – так называемой цепи размножения–гибели. Этот граф представляет собой одну цепочку, в которой каждое из состояний связано прямой и обратной связью с соседними состояниями. Во многих случаях задачи массового обслуживания могут быть решены путем построения и анализа соответствующей цепи «рождения–гибели».

Контрольные вопросы

1. Какой поток событий называется простейшим?
2. Каковы свойства простейшего потока событий?
3. Какие случайные процессы называются марковскими?
4. Какие вероятностные характеристики полностью определяют любое распределение марковского процесса?
5. Поясните природу интенсивностей переходов марковского процесса.
6. Какой марковский процесс называется однородным?
7. Запишите систему дифференциальных уравнений Колмогорова.
8. Что такое финальное распределение однородного марковского процесса?
9. Запишите систему алгебраических уравнений для определения финального распределения.
10. Что такое стохастический граф марковского случайного процесса?
11. Какие процессы называют процессами «рождения–гибели?
12. Как найти финальное распределение процесса «рождения–гибели»?

6.3. Системы массового обслуживания в коммерческой деятельности

Системы массового обслуживания в коммерческой деятельности являются базовой основой самой природы коммерции, поскольку каждый шаг в этой сфере неизменно связан с обслуживанием. Для облегчения процесса моделирования следует пользоваться классификацией СМО по различным признакам, для которых пригодны определенные группы методов и моделей теории массового обслуживания, упрощающие подбор адекватных математических моделей к решению задач обслуживания в коммерческой деятельности.

Существующие варианты заявок, особенности их обслуживания и образования очередей, расположение, количество и организация каналов обслуживания послужили причиной появления большого разнообразия СМО. Наиболее распространенные в коммерческой деятельности виды СМО представлены в виде классификационной структуры на рис. 6.3.1. В целом структура включает следующие десять основных классификационных признаков: организация потока заявок, количество каналов обслуживания, характер образования очереди, ограничения на очередь, дисциплина очереди, характеристика каналов, расположение каналов, вид ограничений на очередь, правило отбора заявок, наличие и характеристика приоритета. Перечисленные признаки являются ключевыми в проведении исследования и позволяют подобрать перечень необходимых и достаточных характеристик СМО в самом начале решения. Например, при проведении анализа системы массового обслуживания посуды в кафе полагают, что система является замкнутой, многофазной, с ожиданием обслуживания, например, какого-либо вида посуды: стаканов, тарелок, ложек, вилок, затем продуктов для приготовления пищи, затем посетителей и др. Это позволяет выявить прежде всего наиболее существенные свойства СМО.

По числу каналов обслуживания СМО разделяются на одноканальные $n = 1$ и многоканальные, для которых $n \geq 2$. К одноканальным СМО в коммерческой деятельности можно отнести практически любой вариант локального обслуживания, например выполняемые на рабочем месте операции одним бухгалтером, менеджером, коммерсантом, товароведом, экономистом, торговым аппаратом. В зависимости от взаимного расположения каналов системы подразделяются на СМО с параллельными и с последовательными каналами. В СМО с параллельными каналами входной поток заявок на обслуживание является общим, и поэтому за-

Рис. 6.3.1. Классификация систем массового обслуживания

явки в очереди могут обслуживаться любым свободным каналом, например официантами в ресторане. В таких СМО очередь на обслуживание можно рассматривать как общую. В СМО с последовательным расположением каналов каждый канал может рассматриваться как отдельная одноканальная СМО или фаза обслуживания. Очевидно, выходной поток обслуженных заявок одной СМО является входным потоком для последующей СМО.

Практически любые заявки в коммерческой деятельности: товары, посетители, торговое оборудование, деньги, документы, проходят множество фаз обслуживания, следовательно, коммерческие системы являются многофазными.

В зависимости от характеристик каналов обслуживания многоканальные СМО подразделяются на СМО с однородными и неоднородными каналами. Отличие состоит в том, что в СМО с однородными каналами заявка потока может обслуживаться любым свободным каналом, а в СМО с неоднородными каналами отдельные заявки обслуживаются только специально для этой цели предназначенными каналами. В кафе, например, посетитель проходит несколько разных по своему содержанию операций обслуживания, каждая из которых может быть представлена в виде простейшей одноканальной СМО, называемой фазой обслуживания, а в целом весь процесс обслуживания только посетителей может быть представлен в виде структурной модели многофазной СМО, представленной на рис. 6.3.2.

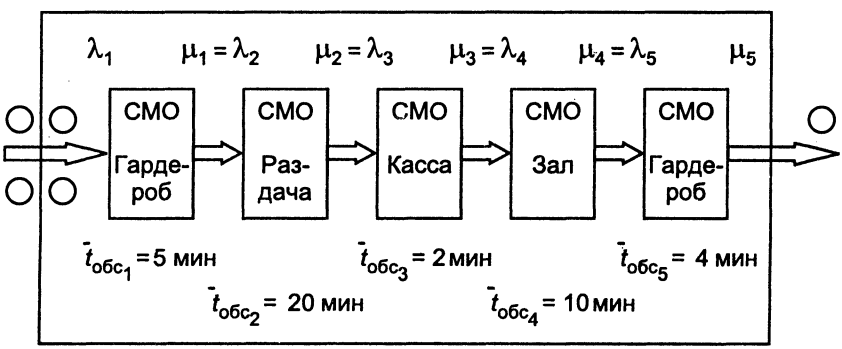


Рис. 6.3.2. Модель многофазной СМО обслуживания посетителей в кафе

Процесс движения товаров на коммерческом предприятии тоже можно представить в виде подобной многофазной СМО. Аналогичный подход можно использовать и по моделированию операций с другими видами заявок: деньгами, тарой, документами и др. В целом модель кафе можно представить в виде множества многофазных, одно- и многоканальных СМО, объединенных совокупностью взаимосвязанных операций по обслуживанию заявок разного типа в виде сложной сети. В обобщенном виде подобного рода модель, только уже для супермаркета, приведена на рис. 6.3.3 с указанием заявок нескольких типов только на входе и выходе.

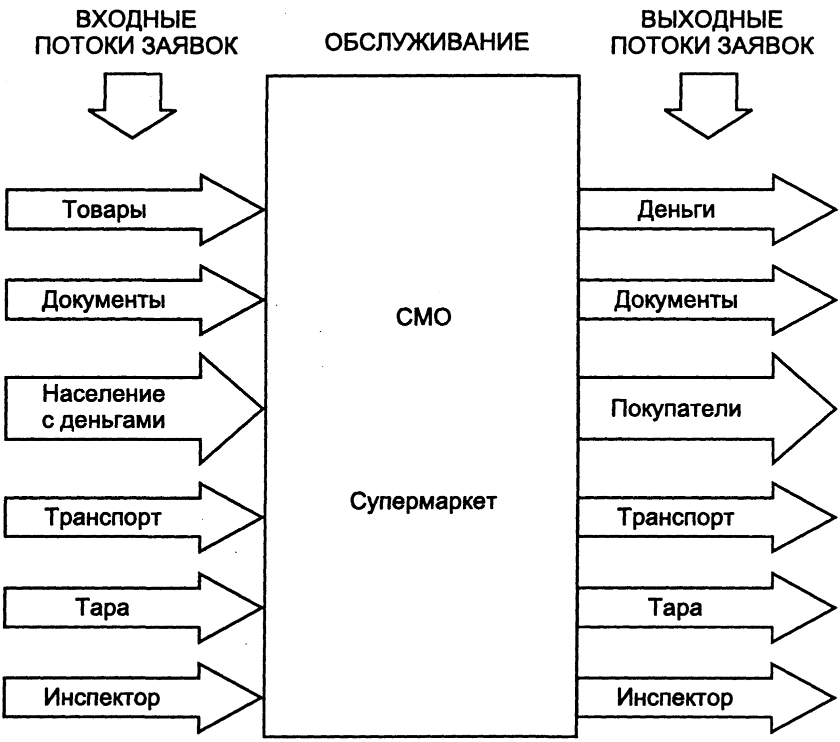


Рис. 6.3.3. Модель сложной СМО

К другим сложным СМО коммерческой деятельности относятся посреднические фирмы, мини-маркеты, магазины, торговые павильоны, столовые, кафе, склады, базы, сети коммерческой деятельности районов города.

Модельное описание необходимо для целей анализа, который может учитывать не только характеристики входящих потоков и процессов обслуживания, но и внутреннюю структуру взаимосвязей, взаимопомощи, дисциплину и приоритеты обслуживания. Такой подход позволит более объективно прогнозировать перспективу работоспособности и разрабатывать действенные рекомендации по эффективному перестроению совокупностей существующих СМО, а также разработать рекомендации для вновь проектируемых сложных систем обслуживания.

Каждая простейшая или сложная СМО в зависимости от числа каналов обслуживания и их производительности, от характера потока заявок имеет пропускную способность, позволяющую ей более или менее успешно справляться с потоком заявок. Поэтому предметом исследования СМО в коммерческой деятельности является установление зависимости между характером потока заявок, числом каналов, их расположением, производительностью, правилами и эффективностью обслуживания для успешного достижения поставленной цели при малых затратах на создание и функционирование системы в целом.

СМО в зависимости от возможности образования очереди подразделяются на два основных типа: СМО с отказами обслуживания и СМО с ожиданием (очередью) обслуживания. В СМО с отказами возможен отказ в обслуживании, если все каналы уже заняты обслуживанием, а образовывать очередь и ожидать обслуживание нельзя. Примером таких СМО является множество коммерческих фирм, связь с которыми устанавливается по телефону, номера которых указаны в рекламной газете «Экстра-М». В СМО с ожиданиями пришедшая заявка, находящая все каналы обслуживания занятыми, становится в очередь и ожидает, пока не освободится хотя бы один из каналов. Такие системы в коммерческой сфере имеют большое распространение, поскольку все поступающие заявки в коммерческие предприятия вынуждены ожидать начала обслуживания.

В то же время СМО с ожиданием подразделяются на СМО с неограниченным ожиданием, или с неограниченной очередью $L_{оч}$, или временем ожидания $T_{оч}$, и СМО с ограниченными ожиданиями или очередью, в которых накладываются ограничения на максимально возможную длину очереди $\max L_{оч} = m$ или на максимально возможное время пребывания заявки в очереди $\max T_{оч} = t_{огр}$, или на время работы системы.

Примерами СМО с ограничением на длину очереди являются СМО, предназначенные для приема, например, поступающих товаров в подсобные помещения, склады, хранилища, холодильные камеры, емкости, вместимость которых, естественно, не беспредельна, а время хранения и сроки реализации весьма ограничены. Отказы получают заявки, поступившие и нашедшие полностью заполненными такие накопители, как, например, торговые залы ресторана, кафе.

Примером СМО с ограничением на время ожидания является обслуживание скоропортящихся товаров, готовых блюд в производстве ресторана, кафе, плодоовощной продукции и продовольственных товаров, время хранения которых и обслуживания на всех операциях от начала до конца, конечно, ограничено по причине большой скорости потери их свойств (качества, количества, товарного вида и стоимости). В подобного типа СМО получают отказ в обслуживании и не участвуют в дальнейшем процессе наиболее «старые» заявки, т.е. испорченные товары, дольше всех находившиеся на хранении, у которых $T_{оч} > t_{огр} = \max t_{оч}$, и, следовательно, подлежащего списанию.

В зависимости от организации потока заявок СМО подразделяются на разомкнутые и замкнутые. В разомкнутых СМО выходной поток обслуженных заявок не связан с входным потоком заявок на обслуживание и имеет неограниченный источник заявок.

В замкнутых СМО (рис. 6.3.4) обслуженные заявки в общем случае после некоторой временной задержки $t_{зад}$ снова поступают на вход СМО и μ_2 заявок ограничен и входит в состав СМО. Примером такой системы в коммерческой деятельности является система обслуживания механиками торгового оборудования, которое через некоторое время после ремонта все же опять прихо-

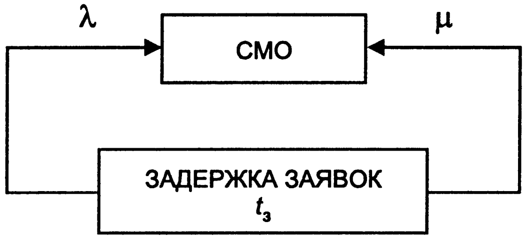


Рис. 6.3.4. Модель замкнутой СМО

дит в неисправное состояние и поступает с заявкой на обслуживание. В замкнутой СМО циркулирует одно и то же конечное число потенциальных заявок, например объем посуды (ложки, вилки, ножи, тарелки, стаканы) в кафе, столовой через торговый зал, мойку и раздачу, хотя следует заметить, что их количество по разным причинам постоянно изменяется (рис. 6.3.5). Пока потенциальные заявки циркулируют и не преобразовались на входе СМО в заявку на обслуживание, считается, что они находятся в линии задержки.

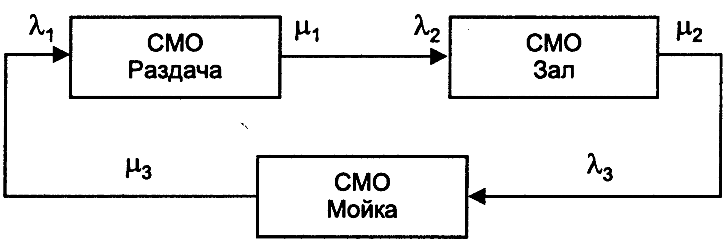


Рис. 6.3.5. Модель обслуживания посуды в кафе

Фазы обслуживания разнородных заявок могут осуществляться параллельно или последовательно, одновременно или не одновременно, иметь пересечения в местах схождения потоков заявок, например посетителей, блюд готовой продукции и денег у контролера-кассира (рис. 6.3.6).

Типовые варианты СМО определяются также установленной дисциплиной очереди, которая зависит от правил преимущества

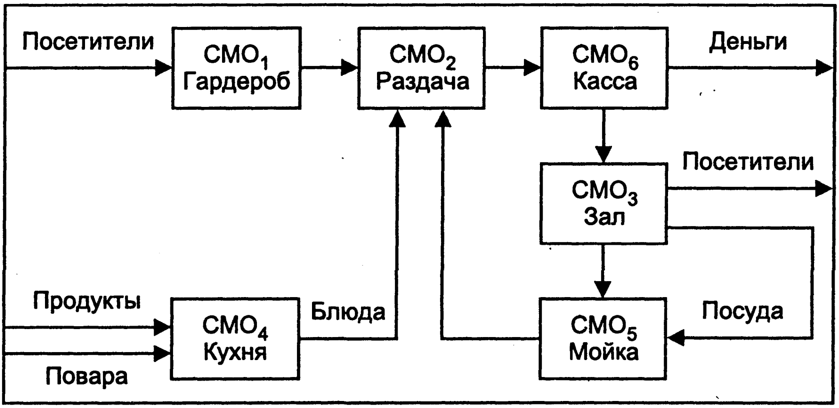


Рис. 6.3.6. Модель СМО кафе

в обслуживании, т.е. приоритета. Приоритет отбора заявок на обслуживание может быть следующий: первый пришел – первый обслужен; последний пришел – первый обслужен; случайный отбор. Для СМО с ожиданием и обслуживанием по приоритету возможны следующие виды: абсолютный приоритет, например, для сотрудников контрольно-ревизионного управления, министра; относительный приоритет, например, для директора в подведомственных ему предприятиях; специальные правила приоритета, когда обслуживание заявок, например, специальными служащими банков денег в магазинах, что оговорено в соответствующих документах. Существуют и другие виды СМО: с поступлением групповых заявок, с каналами разной производительности, с надежными каналами обслуживания, с групповым обслуживанием, со смешанным потоком заявок.

Перечисленные варианты СМО имеют место и распространены в коммерческой деятельности. В своих совокупностях разные типы СМО, последовательно и параллельно объединенные, образуют более сложные многофазные структуры СМО: супермаркет, торговое предприятие, столовая, кафе, ресторан, предприятие и организация общественного питания района, города и т.д. Моделирование СМО позволяет выявить существенные связи в коммерческой деятельности, а для их описания применить методы и модели теории массового обслуживания и разработать рекомендации по реорганизации, направленные на совершенствование систем массового обслуживания, базируясь на количественном обосновании управленческих решений. Важнейшим началом в этой работе являются замысел и экономико-математическая постановка задач массового обслуживания, что и будет рассмотрено в следующем разделе.

Контрольные вопросы

1. Каково определение термина «система»?
2. Что такое система массового обслуживания?
3. Зачем нужна теория массового обслуживания?
4. Каковы классификационные признаки СМО?
5. Что такое СМО с отказами?
6. Что такое СМО с ожиданием?
7. Что такое многофазная СМО?
8. Что такое замкнутая СМО?
9. Приведите примеры замкнутых СМО.
10. Представьте коммерческое предприятие в виде совокупности простейших СМО.

6.4. Экономико-математическая постановка задач массового обслуживания

Правильная или наиболее удачная экономико-математическая постановка задачи в значительной степени определяет полезность рекомендаций по совершенствованию систем массового обслуживания в коммерческой деятельности.

В связи с этим необходимо тщательно проводить наблюдение за процессом обслуживания в системе, поиска и выявления существенных связей, формирования проблемы, выделения цели, определения показателей и выделения экономических критериев оценки работы СМО. В этом случае в качестве наиболее общего, интегрального показателя могут выступать затраты, с одной стороны, СМО коммерческой деятельности как обслуживающей системы, а с другой – затраты заявок, которые могут иметь разную по своему физическому содержанию природу.

Повышение эффективности в любой сфере деятельности К. Маркс в конечном счете рассматривал как экономию времени и усматривал в этом один из важнейших экономических законов. Он писал, что экономия времени, равно как и планомерное распределение рабочего времени по различным отраслям производства, остается первым экономическим законом на основе коллективного производства. Этот закон проявляется во всех сферах общественной деятельности.

Для товаров, в том числе и денежных средств, поступающих в коммерческую сферу, критерий эффективности связан со временем и скоростью обращения товаров и определяет интенсивность поступления денежных средств в банк. Время и скорость обращения, являясь экономическими показателями коммерческой деятельности, характеризуют эффективность использования средств, вложенных в товарные запасы. Товарооборачиваемость отражает среднюю скорость реализации среднего товарного запаса. Показатели товарооборачиваемости и уровня запасов тесно связаны известными моделями. Таким образом, можно проследить и установить взаимосвязь этих и других показателей коммерческой деятельности с временными характеристиками.

Следовательно, эффективность работы коммерческого предприятия или организации складывается из совокупности времени выполнения отдельных операций обслуживания, в то же время для населения затраты времени включают время на дорогу, посещение магазина, столовой, кафе, ресторана, ожидание начала обслуживания, ознакомление с меню, выбор продукции, расчет и т.д. Проведенные исследования структуры затрат времени населения свидетельствуют о том, что значительная его часть расходуется нерационально. Заметим, что коммерческая деятельность в конечном счете направлена на удовлетворение потребности человека. Поэтому усилия моделирования СМО должны включать анализ затрат времени по каждой элементарной операции обслуживания. С помощью соответствующих методов следует создавать модели связи показателей СМО. Это обусловливает необходимость наиболее общие и известные экономические показатели, такие как товарооборот, прибыль, издержки обращения, рентабельность и другие, увязывать в экономико-математических моделях с дополнительно возникающей группой показателей, определяемых спецификой обслуживающих систем и вносимых собственно спецификой теории массового обслуживания

Например, особенностями показателей СМО с отказами являются: время ожидания заявок в очереди $T_{оч} = 0$, поскольку по своей природе в таких системах существование очереди невозможно, то $L_{оч} = 0$ и, следовательно, вероятность ее образования $P_{оч} = 0$. По числу заявок k определяется режим работы системы, ее состояние: при $k = 0$ – простой каналов, при $1 < k < n$ – обслуживание заявок, при $k > n$ – обслуживание и отказ. Показателями таких СМО являются вероятность отказа в обслуживании $P_{отк}$, вероятность обслуживания $P_{обс}$, среднее время простоя канала $t_{пр}$, среднее число занятых $n_з$ и свободных каналов $n_{св}$, среднее время обслуживания $t_{обс}$, абсолютная пропускная способность А.

Для **СМО с неограниченным ожиданием** характерно, что вероятность обслуживания заявки $P_{обс} = 1$, поскольку длина очереди и время ожидания начала обслуживания не ограничены, т.е. формально $L_{оч} \to \infty$ и $T_{оч} \to \infty$. В таких системах возможны следующие режимы работы: при $k = 0$ наблюдается простой каналов обслуживания, при $1 < k \leq n$ – обслуживание и при $k > n$ – обслуживание и очередь. Показателями эффективности таких СМО являются среднее число заявок в очереди $L_{оч}$, среднее число заявок в системе k, среднее время пребывания заявки в системе $T_{смо}$, абсолютная пропускная способность А.

В СМО с ожиданием с ограничением на длину очереди, если число заявок в системе $k = 0$, то наблюдается простой каналов, при $1 < k \leq n$ – обслуживание, при $n < k < n + m$ – обслуживание и очередь и при $k > n + m$ – обслуживание, очередь и отказ в ожидании обслуживания. Показателями эффективности таких СМО являются вероятность отказа в обслуживании $P_{отк}$ – вероятность обслуживания $P_{обс}$, среднее число заявок в очереди $L_{оч}$, среднее число заявок в системе $L_{смо}$ среднее время пребывания заявки в системе $T_{смо}$, абсолютная пропускная способность А.

Таким образом, перечень характеристик систем массового обслуживания можно представить следующим образом: среднее время обслуживания – $t_{обс}$; среднее время ожидания в очереди – $T_{оч}$; среднее время пребывания в СМО – $T_{смо}$; средняя длина очереди – $L_{оч}$; среднее число заявок в СМО – $L_{смо}$; количество каналов обслуживания – n; интенсивность входного потока заявок – λ; интенсивность обслуживания – μ; интенсивность нагрузки – ρ; коэффициент нагрузки – α; относительная пропускная способность – Q; абсолютная пропускная способность – A; доля времени простоя СМО – P_o; доля обслуженных заявок – $P_{обс}$, доля потерянных заявок – $P_{отк}$; среднее число занятых каналов – $n_з$; среднее число свободных каналов – $n_{св}$; коэффициент загрузки каналов – $K_з$; среднее время простоя каналов – $t_{пр}$.

Следует заметить, что иногда достаточно использовать до десяти основных показателей, чтобы выявить слабые места и разработать рекомендации по совершенствованию СМО.

Это часто связано с решением вопросов согласованной работы цепочки или совокупностей СМО.

Например, в коммерческой деятельности необходимо учитывать еще и экономические показатели СМО: общие затраты – С; издержки обращения – $С_{ио}$; издержки потребления – $С_{ип}$; затраты на обслуживание одной заявки – $С_1$; убытки, связанные с уходом заявки, – $С_{у1}$; затраты на эксплуатацию канала – $С_к$; затраты простоя канала – $С_{пр}$; капитальные вложения – $С_{кап}$; приведенные годовые затраты – $С_{пр}$; текущие затраты – $С_{тек}$; доход СМО в единицу времени – $Д_1$.

В процессе постановки задач необходимо раскрыть взаимосвязи показателей СМО, которые по своей базовой принадлежности можно разделить на две группы: первая связана с издержками обращения $С_{ио}$, которые определяются числом занятых обслуживанием каналов, затратами на содержание СМО, интенсивностью обслуживания, степенью загрузки каналов, эффективностью их использования, пропускной способностью СМО и др.; вторая группа показателей определяется издержками собственно заявок $С_{ип}$, поступающих на обслуживание, которые образуют входящий поток, ощущают эффективность обслуживания и связаны с такими показателями, как длина очереди, время ожидания обслуживания, вероятность отказа в обслуживании, время пребывания заявки в СМО и др.

Эти группы показателей противоречивы в том смысле, что улучшение показателей одной группы, например сокращение длины очереди или времени ожидания в очереди путем увеличения числа каналов обслуживания (официантов, поваров, грузчиков, кассиров), связано с ухудшением показателей другой группы, поскольку это может привести к увеличению времени простоев каналов обслуживания, затрат на их содержание и т.д. В связи с этим при формализации задач обслуживания вполне естественно стремление построить СМО таким образом, чтобы установить разумный компромисс между показателями собственно заявок и полнотой использования возможностей системы. С этой целью необходимо выбрать обобщенный, интегральный показатель эффективности СМО, включающий одновременно претензии и возможности обеих групп. В качестве такого показателя может быть выбран критерий экономической эффективности, включающий как издержки обращения $C_{ио}$, так и издержки заявок $C_{ип}$, которые будут иметь оптимальное значение при минимуме общих затрат С. На этом основании целевую функцию задачи можно записать так:

$$C = (C_{ио} + C_{ип}) \to \min.$$

Поскольку издержки обращения включают затраты, связанные с эксплуатацией СМО – $C_{экс}$ и простоем каналов обслуживания – $C_{пр}$, а издержки заявок включают потери, связанные с уходом необслуженных заявок – $C_{нз}$ и с пребыванием в очереди – $C_{оч}$, тогда целевую функцию можно переписать с учетом этих показателей таким образом:

$$C = \{(C_{пр}\bar{n}_{св} + C_{экз}\bar{n}_{з}) + C_{оч}P_{обс}\lambda(T_{оч} + \bar{t}_{обс}) + C_{нз}P_{отк}\lambda\} \to \min .$$

В зависимости от поставленной задачи в качестве варьируемых, т.е. управляемых, показателей могут быть: количество каналов обслуживания, организация каналов обслуживания (параллельно, последовательно, смешанным образом), дисциплина очереди, приоритетность обслуживания заявок, взаимопомощь между каналами и др. Часть показателей в задаче фигурирует в качестве неуправляемых, которые обычно являются исходными данными. В качестве критерия эффективности в целевой функции могут быть также товарооборот, доход, прибыль или, например, рентабельность, тогда оптимальные значения управляемых показателей СМО находятся, очевидно, уже при максимизации указанных показателей, а не при минимизации, как в предыдущем варианте.

В некоторых случаях следует пользоваться другим вариантом записи целевой функции:

$$\mathrm{C} = \{\mathrm{C}_{\text{экз}} \cdot \overline{n}_3 + \mathrm{C}_{\text{пр}}\,(n - \overline{n}_3) + \mathrm{C}_{\text{отк}} \cdot \mathrm{P}_{\text{отк}} \cdot \lambda + \mathrm{C}_{\text{сист}} \cdot \overline{n}_3\} \to \min,$$

где $\mathrm{C}_{\text{отк}}$ и $\mathrm{C}_{\text{сист}}$ – соответственно издержки заявок, связанные с уходом необслуженных заявок и с пребыванием в системе.

В качестве общего критерия может быть выбран, например, уровень культуры обслуживания покупателей на предприятиях, тогда целевая функция может быть представлена следующей моделью:

$$\mathrm{K}_{\text{об}} = [(\mathrm{З}_{\text{пу}} \cdot \mathrm{K}_{\text{у}}) + (\mathrm{З}_{\text{пв}} \cdot \mathrm{K}_{\text{в}}) + (\mathrm{З}_{\text{пд}} \cdot \mathrm{K}_{\text{д}}) + (\mathrm{З}_{\text{пз}} \cdot \mathrm{K}_{\text{з}}) + \\ + (\mathrm{З}_{\text{по}} \cdot \mathrm{K}_{\text{о}}) + (\mathrm{З}_{\text{кт}} \cdot \mathrm{K}_{\text{кт}})] \cdot \mathrm{K}_{\text{мп}},$$

где $\mathrm{З}_{\text{пу}}$ – значимость показателя устойчивости ассортимента товаров;
$\mathrm{K}_{\text{у}}$ – коэффициент устойчивости ассортимента товаров;
$\mathrm{З}_{\text{пв}}$ – значимость показателя внедрения прогрессивных методов продажи товаров;
$\mathrm{K}_{\text{в}}$ – коэффициент внедрения прогрессивных методов продажи товаров;
$\mathrm{З}_{\text{пд}}$ – значимость показателя дополнительного обслуживания;
$\mathrm{K}_{\text{д}}$ – коэффициент дополнительного обслуживания;
$\mathrm{З}_{\text{пз}}$ – значимость показателя завершенности покупки;
$\mathrm{K}_{\text{з}}$ – коэффициент завершенности покупки;
$\mathrm{З}_{\text{по}}$ – значимость показателя затрат времени на ожидание в обслуживании;
$\mathrm{K}_{\text{о}}$ – показатель затрат времени на ожидание обслуживания;
$\mathrm{З}_{\text{кт}}$ – значимость показателя качества труда коллектива;
$\mathrm{K}_{\text{кт}}$ – коэффициент качества труда коллектива;
$\mathrm{K}_{\text{мп}}$ – показатель культуры обслуживания по мнению покупателей.

Для анализа СМО можно выбирать и другие критерии оценки эффективности работы СМО. Например, в качестве такого критерия для систем с отказами можно выбрать вероятность отказа $P_{отк}$, значение которого не превышало бы заранее заданной величины. Например, требование $P_{отк} < 0{,}1$ означает, что не менее чем в 90% случаев система должна справляться с обслуживанием потока заявок при заданной интенсивности λ. Можно ограничить среднее время пребывания заявки в очереди или в системе. В качестве показателей, подлежащих определению, могут выступать: либо число каналов n при заданной интенсивности обслуживания μ, либо интенсивность μ при заданном числе каналов.

После построения целевой функции необходимо определить условия решения задачи, найти ограничения, установить исходные значения показателей, выделить неуправляемые показатели, построить или подобрать совокупность моделей взаимосвязи всех показателей для анализируемого типа СМО, чтобы в конечном итоге найти оптимальные значения управляемых показателей, например количество поваров, официантов, кассиров, грузчиков, объемы складских помещений и др.

Рассмотрим применение методов и моделей теории массового обслуживания в алгоритме моделирования типичных для коммерческой деятельности систем массового обслуживания.

6.5. Модели систем массового обслуживания в коммерческой деятельности

6.5.1. Одноканальная СМО с отказами в обслуживании

Проведем анализ простой одноканальной СМО с отказами в обслуживании, на которую поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ, а обслуживание происходит под действием пуассоновского потока с интенсивностью μ. Работу одноканальной СМО $n = 1$ можно представить в виде размеченного графа состояний (рис. 6.5.1).

Переходы СМО из одного состояния S_0 в другое S_1 происходят под действием входного потока заявок с интенсивностью λ, а обратный переход – под действием потока обслуживания с интенсивностью μ.

$$S_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_1$$

S_0 – канал обслуживания свободен; S_1 – канал занят обслуживанием.

Рис. 6.5.1. Размеченный граф состояний одноканальной СМО

Запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояния по изложенным выше правилам:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t), \\ p_0(t) + p_0(t) = 1. \end{cases}$$

Откуда получим дифференциальное уравнение для определения вероятности $p_0(t)$ состояния S_0:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)p_0(t) + \mu.$$

Это уравнение можно решить при начальных условиях в предположении, что система в момент $t = 0$ находилась в состоянии S_0, тогда $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = 0$. В этом случае решение дифференциального уравнения позволяет определить вероятность того, что канал свободен и не занят обслуживанием:

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Тогда нетрудно получить выражение для определения вероятности занятости канала:

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Вероятность $p_0(t)$ уменьшается с течением времени и в пределе при $t \to \infty$ стремится к величине

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

а вероятность $p_1(t)$ в то же время увеличивается от 0, стремясь в пределе при $t \to \infty$ к величине

$$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Эти пределы вероятностей могут быть получены непосредственно из уравнений Колмогорова при условии

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \frac{dp_1(t)}{dt} = 0.$$

Функции $p_0(t)$ и $p_1(t)$ определяют переходный процесс в одноканальной СМО и описывают процесс экспоненциального приближения СМО к своему предельному состоянию с постоянной времени $\tau = \frac{l}{\lambda + \mu}$, характерной для рассматриваемой системы. С достаточной для практики точностью можно считать, что переходный процесс в СМО заканчивается в течение времени, равного 3τ.

Вероятность $p_0(t)$ определяет относительную пропускную способность СМО, которая определяет долю обслуживаемых заявок по отношению к полному числу поступающих заявок, в единицу времени. Действительно, $p_0(\mathrm{t})$ есть вероятность того, что заявка, пришедшая в момент t, будет принята к обслуживанию. Всего в единицу времени приходит в среднем λ заявок и из них обслуживается λp_0 заявок. Тогда доля обслуживаемых заявок по отношению ко всему потоку заявок определяется величиной

$$Q = \frac{\lambda p_0(t)}{\lambda} = p_0(t).$$

В пределе при $t \to \infty$ практически уже при $t > 3\tau$ значение относительной пропускной способности будет равно $Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Абсолютная пропускная способность, определяющая число заявок, обслуживаемых в единицу времени в пределе при $t \to \infty$, равна:

$$A = \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu} = \lambda Q.$$

Соответственно доля заявок, получивших отказ, составляет в этих же предельных условиях

$$P_{\text{отк}} = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

а общее число необслуженных заявок равно $\frac{\lambda^2}{\lambda + \mu}$.

Примерами одноканальных СМО с отказами в обслуживании являются: стол заказов в магазине, диспетчерская автотранспортного предприятия, контора склада, офис управления коммерческой фирмы, с которыми устанавливается связь по телефону.

Пример 1. Статистическими исследованиями в результате наблюдения установлено, что интенсивность потока телефонных звонков коммерческому директору $\lambda = 1{,}2$ вызова в минуту, средняя продолжительность разговора (обслуживания заявки) $\overline{t}_{\text{обс}} = 2{,}5$ мин и все потоки событий (вызовов и обслуживания) имеют характер простейших пуассоновских потоков.

Определим предельную (относительную и абсолютную) пропускную способность СМО, вероятность отказа, а также полное число обслуженных и необслуженных (получивших отказ) заявок в течение 1 ч работы СМО. Сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, т.е. с пропускной, способностью, которой обладала бы система в том случае, если бы каждая заявка обслуживалась ровно 2,5 мин и все заявки следовали бы одна за другой без перерыва.

Решение

Размеченный граф состояний этой СМО приведен на рис. 6.5.1. Целевая функция может быть записана в общем виде следующим образом:

$$\frac{Q}{Q_{\text{н}}} = f\{\tau, \lambda, \bar{t}_{\text{обс}}, \mu, \rho, P_{\text{обс}}, P_{\text{отк}}, A\} \to \max.$$

Определяем:

интенсивность потока обслуживания (заявок в минуту) –

$$\mu = \frac{1}{2,5} = 0,4 \text{ заявки/мин.}$$

Следует заметить, что постоянная времени $\tau = \dfrac{1}{\lambda + \mu} \approx 0,63$ мин, тогда переходный процесс в СМО завершается через $3\tau \approx 1,9$ мин;

относительную пропускную способность или вероятность того, что канал свободен –

$$p_0 = Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = 0,25;$$

абсолютную пропускную способность –
$A = \lambda Q = 0,3$ (заявки в минуту);
вероятность занятости канала –

$$p_1 = 1 - p_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = 0,75.$$

Число заявок, обслуженных в течение часа, составляет: 60 A = = 18 заявок, а получивших отказ – 60 $\lambda\, p_1$ = 54 заявки.

В этих же условиях номинальная производительность равна $Q_{\text{н}} = \dfrac{60}{2,5} = 24$ заявкам в час, т.е. фактическая производительность, учитывающая случайный характер процесса, происходящего в СМО, составляет только 75% =18 : 24 · 100% от номинальной. Таким образом, СМО может обслуживать только 25% всех поступивших заявок. Очевидно, что работу такой СМО вряд ли можно считать удовлетворительной. Что же нужно сделать, чтобы повысить относительную пропускную способность одноканальной СМО? Этого можно добиться либо снижением интенсивности потока заявок λ, что по условию невозможно, либо увеличением интенсивности обслуживания μ, либо увеличением каналов обслуживания. При этом уменьшится отношение фактической производительности СМО к номинальной $Q_{\text{н}}$, что можно записать так:

$$\frac{A}{Q_{\text{н}}}=\frac{A}{\mu}=\frac{\lambda Q}{\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=p_1,$$

что свидетельствует о том, что это есть величина p_1.

Из приведенных выражений видно, что с ростом производительности канала обслуживания относительная пропускная способность СМО довольно медленно приближается к 100%. При этом величина p_i уменьшается, стремясь к 0. Это значит, что влияние случайного процесса в СМО увеличивается с ростом отношения μ/λ. Действительно, из интуитивных соображений, казалось бы, превышение интенсивности обслуживания над интенсивностью поступления заявок, например в три раза, должно приводить к полному обслуживанию всех поступающих заявок. Практически необслуженными все еще будут оставаться в среднем 25% из числа поступивших заявок. Соответственно фактическая производительность СМО составляет только 25% от номинальной. Все это есть прямое следствие вероятностного характера протекающего в СМО процесса.

Пример 2. В Одессе на Дерибасовской, угол Ришельевской, сидит сапожник и выполняет заказы по ремонту обуви. В среднем он выполняет заказ в течение 30 мин. Рядом с сапожником расположено одно кресло, в котором заказчик ожидает выполнения заказа. Сапожник не имеет постоянных заказчиков, и клиенты приходят к нему независимо друг от друга в среднем каждые 40 мин. Клиенты – народ нетерпеливый, поэтому в случае занятости сапожника они уходят к другому.

Определим долю потери клиентов, долю времени простоя и отношение – «заработанные деньги / потерянные деньги», если средняя стоимость ремонта составляет 55 руб.

Решение

Одноканальная СМО (см. рис. 6.5.1) может находиться в одном из двух возможных состояний: S_0 – свободен, S_1 – занят, вероятности состояний которых обозначим соответственно $p_0(t)$ и $p_1(t)$. Очевидно, для любого момента времени справедливо записать:

$$p_0(t) + p_1(t) = 1.$$

Из состояния S_0 в S_1 систему переводит поток заявок с интенсивностью $\lambda = 1{,}5\,{}^1/_\text{ч}$, обратно из состояния S_1 в S_0 – поток обслуживания с интенсивностью $\mu = 2\,{}^1/_\text{ч}$.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), & p_0(0) = 1; \\ \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t), & p_1(0) = 0. \end{cases}$$

Составим систему уравнений для финальных вероятностей:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ \lambda p_0 - \mu p_1 = 0 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1{,}5p_0 + 2p_1 = 0 \\ 1{,}5p_0 - 2p_1 = 0 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим среднюю долю обслуживаемых заявок $p_\text{обс} = {}^4/_7 \approx 0{,}57$, следовательно, 57% клиентов из числа поступивших будут обслужены.

Средняя доля необслуженных клиентов составляет $p_1 = {}^3/_7 =$ $= 0{,}43$, следовательно, 43% клиентов из числа поступивших получат отказ.

Средний доход, получаемый сапожником от обслуживания клиентов, определяется умножением среднего количества обслуженных клиентов ($p_0 \cdot N$) от общего числа поступивших N на величину средней стоимости ремонта 55 руб., а средняя величина потерянного дохода определяется умножением среднего числа необслуженных клиентов ($p_1 \cdot N$) на величину средней стоимости ремонта. На этом основании отношение «заработанные деньги / потерянные деньги» для сапожника равно:

$$R = \frac{p_0 \cdot N \cdot 55}{p_1 \cdot N \cdot 55} = \frac{p_0}{p_1},$$

следовательно, это выражение не зависит от величины средней стоимости ремонта и равно:

$$R = \frac{p_0}{p_1} = \frac{0{,}57}{0{,}43} = 1{,}33.$$

Обратная величина, определяющая отношение «потерянные деньги/ заработанные деньги», равна:

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{0{,}43}{0{,}57} = 0{,}754,$$

что свидетельствует о том, что потери составляют ощутимую долю.

6.5.2. Многоканальная СМО с отказами в обслуживании

В коммерческой деятельности примерами многоканальных систем массового обслуживания являются офисы коммерческих предприятий с несколькими телефонными каналами, бесплатная справочная служба по наличию в автомагазинах самых дешевых автомобилей в Москве имеет 7 телефонных номеров, а дозвониться и получить справку, как известно, очень трудно. Следовательно, автомагазины теряют клиентов, возможность увеличить количество проданных автомобилей и выручку от продаж, товарооборот, прибыль. Туристские фирмы по продаже путевок имеют два, три, четыре и более каналов, как, например, фирма Express-Line.

Рассмотрим многоканальную СМО с отказами в обслуживании на рис. 6.5.2, на вход которой поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ.

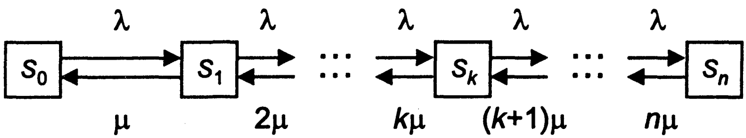


Рис. 6.5.2. Размеченный граф состояний многоканальной СМО с отказами

Поток обслуживания в каждом канале имеет интенсивность μ. По числу заявок СМО определяются ее состояния S_k, представленные в виде размеченного графа:

S_0 – все каналы свободны, $k = 0$,
S_1 – занят только один канал, $k = 1$,
S_2 – заняты только два канала, $k = 2$,
....
S_k – заняты k каналов,
....
S_n – заняты все n каналов, $k = n$.

Состояния многоканальной СМО меняются скачкообразно в случайные моменты времени. Переход из одного состояния, например S_0 в S_1, происходит под воздействием входного потока заявок с интенсивностью λ, а обратно – под воздействием потока обслуживания заявок с интенсивностью μ. Для перехода системы из состояния S_k в S_{k-1} безразлично, какой именно из каналов освободится, поэтому поток событий, переводящий СМО, имеет интенсивность $k\mu$, следовательно, поток событий, переводящий систему из S_n в S_{n-1}, имеет интенсивность $n\mu$. Так формулируется классическая задача Эрланга, названная по имени датского инженера-математика – основателя теории массового обслуживания.

Случайный процесс, протекающий в СМО, представляет собой частный случай процесса «рождения–гибели» и описывается системой дифференциальных уравнений Эрланга, которые позволяют получить выражения для предельных вероятностей состояния рассматриваемой системы, называемые формулами Эрланга:

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right]^{-1}; \quad P_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_0; \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Вычислив все вероятности состояний n – канальной СМО с отказами $p_0, p_1, p_2, ..., p_k, ..., p_n$, можно найти характеристики системы обслуживания.

Вероятность отказа в обслуживании определяется вероятностью того, что поступившая заявка на обслуживание найдет все n каналов занятыми, система будет находиться в состоянии S_n:

$$p_{\text{отк}} = p_n = p_0 \frac{\rho^n}{n!}; \quad k = n.$$

В системах с отказами события отказа и обслуживания составляют полную группу событий, поэтому

$$p_{\text{отк}} + p_{\text{обс}} = 1.$$

На этом основании относительная пропускная способность определяется по формуле

$$Q = p_{\text{обс}} = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - p_n.$$

Абсолютную пропускную способность СМО можно определить по формуле

$$A = \lambda \cdot p_{\text{обс}}.$$

Вероятность обслуживания, или доля обслуженных заявок, определяет относительную пропускную способность СМО, которая может быть определена и по другой формуле:

$$Q = p_{\text{обс}} = \frac{n_з}{\rho}.$$

Из этого выражения можно определить среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, или, что то же самое, среднее число занятых обслуживанием каналов

$$\overline{n_з} = \rho \cdot p_{\text{обс}} = \frac{A}{\mu}.$$

Коэффициент занятости каналов обслуживанием определяется отношением среднего числа занятых каналов к их общему числу

$$K_3 = \frac{\overline{n_3}}{n} = \frac{\rho}{n} \cdot p_{обс}.$$

Вероятность занятости каналов обслуживанием, которая учитывает среднее время занятости $\overline{t}_{зан}$ и простоя $\overline{t}_{пр}$ каналов, определяется следующим образом:

$$p_{зан} = \frac{\overline{t_3}}{\overline{t_3} + \overline{t}_{пр}}.$$

Из этого выражения можно определить среднее время простоя каналов

$$t_{пр} = \bar{t}_{обс} \frac{1 - p_{зан}}{p_{зан}}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе в установившемся режиме определяется формулой Литтла $T_{смо} = \overline{n}_3/\lambda$.

Пример 1. Определим оптимальное число телефонных номеров, необходимых для установки на коммерческом предприятии, при условии, что заявки на переговоры поступают с интенсивностью $\lambda = 90$ заявок в час, а средняя продолжительность разговора по телефону составляет $\overline{t}_{обс} = 2$ мин.

Целевая функция в общем виде может быть записана следующим образом:

$$n_0 = f\{\lambda, \overline{t}_{обс}, \mu, \rho, P_0, P_{отк}, P_{обс}, A, n, \overline{n}_3, K_3\}.$$

Решение

Исчисляем показатели обслуживания для $n = 1$ одноканальной СМО:

интенсивность обслуживания –

$$\mu = 1/\overline{t}_{обс} = 30 \text{ заявок/час};$$

интенсивность нагрузки –

$$\rho = \lambda/\mu = 3;$$

доля времени простоя каналов –

$$p_0 = \left[\sum_0^1 \frac{3^k}{k!}\right]^{-1} = \left[\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!}\right]^{-1} = 0{,}25.$$

Следовательно, 25% в течение часа телефон будет не занят, $\overline{t}_{\text{пр}} = 15$ мин.

Доля заявок, получивших отказ на переговорах, равна:

$$p_{\text{отк}} = 3^1/1! \cdot 0{,}25 = 0{,}75.$$

Значит, 75% из числа поступивших заявок не принимаются к обслуживанию.

Вероятность обслуживания поступающих заявок составит:

$$p_{\text{обс}} = 1 - p_{\text{отк}} = 0{,}25,$$

следовательно, 25% из числа поступивших заявок будут обслужены.

Среднее число каналов, занятых обслуживанием, равно:

$$\overline{n}_3 = \rho \cdot p_{\text{обс}} = 3 \cdot 0{,}25 = 0{,}75.$$

Коэффициент занятости каналов обслуживанием

$$K_3 = n_3/n = 0{,}75/1 = 0{,}75.$$

Следовательно, телефон на 75% занят обслуживанием. Абсолютная пропускная способность системы

$$A = p_{\text{обс}} \cdot \lambda = 0{,}25 \cdot 90 = 22{,}5 \text{ заявки/час.}$$

Очевидно, такая СМО с одним каналом будет плохо справляться с обслуживанием заявок, поскольку потеря поступающих на переговоры заявок составляет 75% – очень велика, а вероятность обслуживания – всего 25%, кроме того, мала пропускная способность системы: только 22 заявки в час из 90 поступивших. Следовательно, необходимо увеличить число каналов. Для определения оптимальной величины проведем аналогичные вычисления для n = 2, 3, 4, 5, 6, а полученные результаты запишем в табл. 6.5.1.

Таблица 6.5.1

n	1	2	3	4	5	6
P_0	0,25	0,12	0,077	0,06	0,05	0,05
$P_{отк}$	0,75	0,54	0,35	0,21	0,1	0,5
$P_{обс}$	0,25	0,46	0,65	0,79	0,9	0,95
$n_з$	0,75	1,38	1,95	2,37	2,7	2,85
$K_з$	0,75	0,69	0,65	0,59	0,54	0,47
А	22,5	41,4	58,5	71,1	81	85,5

На основе полученных результатов можно установить, что оптимальное число телефонных номеров составляет 5 телефонных аппаратов, поскольку в этом случае доля обслуженных заявок составит 90% и только 10% заявок получат отказ, а абсолютная пропускная способность СМО составит 81 заявку в час. При изменении критерия эффективности и введении дополнительных ограничений, например, по затратам на приобретение, установку и содержание телефонов, а также затрат на обеспечение сотрудников служебными переговорами и их необходимого количества установленная величина телефонных номеров может измениться. Таким образом, изменение условий меняет ответ, и, следовательно, задача носит многокритериальный характер, поскольку здесь необходимо в целевую функцию и алгоритм решения задачи еще ввести показатели коммерческой деятельности.

Пример 2. Коммерческая фирма занимается посреднической деятельностью по продаже автомобилей и осуществляет часть переговоров по трем телефонным линиям. В среднем поступает 75 звонков в час. Среднее время предварительных переговоров справочного характера составляет 2 мин. Определим характеристики СМО, дадим оценку работы СМО.

Решение

$$n = 3;\ \lambda = 75\ \text{ед./ч};\ \overline{t}_{обс} = 2\ \text{мин}.$$

Определяем интенсивность загрузки:

$$\rho = \lambda / \mu = \lambda \cdot \bar{t}_{обс} = 75 \cdot 2/60 = 2{,}5.$$

Находим вероятность того, что обслуживанием не занят ни один канал –

$$p_0 = [1 + \rho + \rho^2 / 2! + \rho^3 / 3!]^{-1} =$$
$$= [1 + 2{,}5 + (2{,}5)^2/2! + (2{,}5)^3/3!] = 0{,}11;$$

занят один канал –

$$p_1 = \rho/1! \cdot p_0 = 2{,}5/1! \cdot 0{,}11 = 0{,}271;$$

заняты два канала –

$$p_2 = \rho^2/2! \cdot p_0 = (2{,}5)^2/2! \cdot 0{,}11 = 0{,}338;$$

заняты три канала, доля потерянных заявок (необслуженных) –

$$p_{отк} = p_3 = \rho^3/3! \cdot p_0 = (2{,}5)^3/3! \cdot 0{,}11 = 0{,}282;$$

относительная пропускная способность –

$$p_{обс} = 1 - p_{отк} = 1 - 0{,}282 = 0{,}718;$$

абсолютная пропускная способность –

$$A = \lambda \cdot p_{обс} = 75 \cdot 0{,}718 = 54 \text{ ед./ч};$$

среднее число занятых каналов –

$$\bar{n}_з = \rho \cdot p_{обс} = 2{,}5 \cdot 0{,}718 = 1{,}8 \text{ кан.};$$

коэффициент занятости каналов –

$$K_з = \bar{n}_з/n = 1{,}8/3 = 0{,}6.$$

Доля потерянных заявок составляет около 28%, это очень много, а обслуженных — всего 72%. Абсолютная пропускная способность СМО – 54 заявки в час; каждый из каналов занят обслуживанием всего 60% рабочего времени. Повышение эффективности работы СМО можно осуществить путем увеличения количества телефонных линий n и уменьшением среднего времени обслуживания.

Пример 3. Туристская фирма обслуживает клиентов по телефону, имеющему разветвление на четыре линии. Проведенные исследования показали, что в среднем за один час работы поступает 100 запросов. Среднее время переговоров референтов фирмы с клиентом по телефону составляет 2,5 мин. Необходимо дать оценку работы такой СМО, размеченный граф состояний которой представлен на рис. 6.5.3.

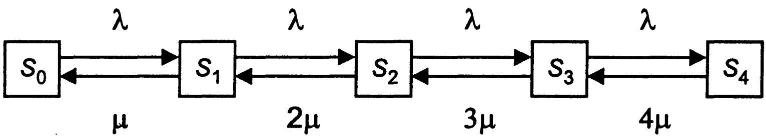


Рис. 6.5.3. Размеченный граф состояний

Решение

Определяем:

интенсивность обслуживания –

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обс}}} = \frac{1}{0{,}042} = 23{,}81 \text{ заявки/ч};$$

интенсивность нагрузки –

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{\text{обс}} = 100 \cdot 0{,}042 = 4{,}2;$$

долю времени простоя референтов фирмы –

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!}\right)^{-1} = 0{,}025;$$

вероятность занятости обслуживанием всех четырех линий –

$$p_4 = p_{\text{отк}} = \frac{\rho^4}{4!} \cdot p_0 = 12{,}97 \cdot 0{,}025 = 0{,}324,$$

что определяет долю необслуженных заявок, которые получили отказ в получении возможности провести переговоры с референтом;

относительную пропускную способность –

$$Q = p_{\text{обс}} = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - 0{,}324 = 0{,}676;$$

абсолютную пропускную способность фирмы –

$$\text{A} = \lambda \cdot Q = 100 \cdot 0{,}676 = 67{,}6 \text{ клиента/ч};$$

среднее число занятых каналов –

$$\bar{n}_3 = \rho \cdot Q = 4{,}2 \cdot 0{,}676 = 2{,}8;$$

коэффициент занятости каналов –

$$K_3 = \frac{\bar{n}_3}{n} = \frac{2{,}8}{4} = 0{,}7;$$

возможное отношение «потерянные деньги/заработанные деньги» при средней стоимости путевки 300 у.е.:

$$R = \frac{p_{\text{отк}}}{p_{\text{обс}}} = \frac{0{,}324}{0{,}676} = 0{,}48.$$

Доля необслуженных клиентов составляет 32%, почти треть, а обслуженных клиентов – 68%, абсолютная пропускная способность равна 68 клиентам в час, а отношение потерянных денег к заработанным – в среднем 48%, следовательно, система работает с большими потерями.

Можно увеличить количество линий разветвления телефона до 8 каналов соответственно введением еще 4 референтов и снижением времени обслуживания до 2 мин, пропускная способность возрастает до 98,7%, следовательно, потери переговоров будут незначительны, а доход турфирмы от продажи путевок может увеличиться.

В реальной жизни задача выглядит значительно сложнее, поэтому необходимо детализировать постановку задачи, учитывая запросы, требования как со стороны клиентов, так и турфирмы.

Для увеличения эффективности работы турфирмы необходимо смоделировать в целом поведение потенциального клиента от начала операции до ее завершения. Структура взаимосвязи основных систем массового обслуживания фактически состоит из СМО разного вида (рис. 6.5.4).

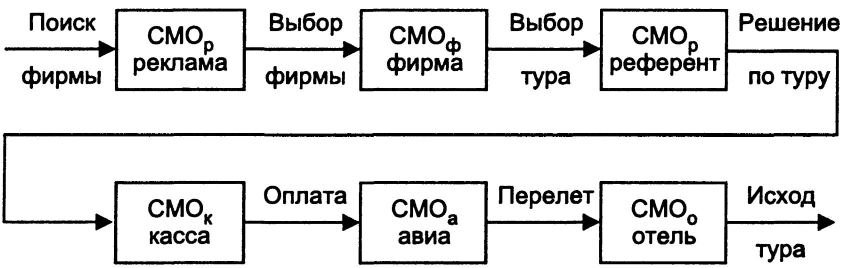


Рис. 6.5.4. Модель многофазной системы обслуживания туристов

Проблема с позиции массового обслуживания туристов, уезжающих на отдых, заключается в определении точного места отдыха (тура), адекватного требованиям претендента, соответствующего его здоровью и финансовым возможностям и представлениям об отдыхе в целом. В этом ему могут способствовать турфирмы, поиск которых осуществляется обычно из рекламных сообщений СМО$_р$, затем после выбора фирмы происходит получение консультаций по телефону СМО$_т$, после удовлетворительного разговора приезд в турфирму и получение более детальных консультаций лично с референтом, затем оплата путевки и получение обслуживания от авиакомпании по перелету СМО$_а$ и в конечном счете обслуживания в отеле СМО$_о$. Дальнейшее развитие рекомендаций по улучшению работы СМО фирмы связано с изменением профессионального содержания переговоров с клиентами по телефону. Для этого необходимо углубить анализ, связанный с детализацией диалога референта с клиентами, поскольку далеко не каждый переговор по телефону приводит к заключению договора на приобретение путевки. Проведение формализации задачи обслуживания указало на необходимость формирования полного (необходимого и достаточного) перечня характеристик и их точных значений предмета коммерческой сделки. Затем проводятся ранжирование этих характеристик, например методом парных сравнений, и расположения в диалоге по степени их значимости, например: время года (зима), месяц (январь), климат (сухой), температура воздуха (+25°С), влажность (40%), географическое место (ближе к экватору), время авиаперелета (до 5 часов), трансферт, страна (Египет), город (Хургада), море (Красное), температура воды в море (+23°С), ранг отеля (4 звезды, работающий кондиционер, гарантия наличия шампуня в номере), удаленность от моря (до 300 м), удаленность от магазинов (рядом), удаленность от дискотек и других источников шума (подальше, тишина в течение сна в отеле), питание (шведский стол – завтрак, ужин, частота изменения меню за неделю), отели (Princes, Marlin-In, Hour-Palace), экскурсии (Каир, Луксор, коралловые острова, подводное плавание), увеселительные шоу, спортивные игры, цена путевки, форма оплаты, содержание страховки, что брать с собой, что купить на месте, гарантии, штрафные санкции.

Есть еще один очень существенный показатель, выгодный для клиента, установить который предлагается самостоятельно въедливому читателю. Затем можно, используя метод попарного сравнения перечисленных характеристик x_i, сформировать матрицу $n \times n$ сравнения, элементы которой заполняются последовательно по строкам по следующему правилу:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если характеристика менее значима,} \\ 1, \text{ если характеристика равнозначима,} \\ 2, \text{ если характеристика доминирует.} \end{cases}$$

После этого определяются значения сумм оценок по каждому показателю строки $S_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$, вес каждой характеристики $M_i = \frac{S_i}{n^2}$ и соответственно интегральный критерий, на основе которого можно провести выбор турфирмы, тура или отеля, по формуле

$$F = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot x_i \to \max.$$

С целью исключения возможных ошибок в этой процедуре вводят, например, 5-балльную шкалу оценок с градацией характеристик $Б_i(x_i)$ по принципу хуже ($Б_i = 1$ балл) – лучше ($Б_i = 5$ баллов). Например, чем дороже тур, тем хуже, чем он дешевле, тем лучше. На этом основании целевая функция будет иметь другой вид:

$$F_b = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot Б_i \cdot x_i \to \max.$$

Таким образом, можно на основе применения математических методов и моделей, используя преимущества формализации, точнее и более объективно сформулировать постановку задач и значительно улучшить показатели СМО в коммерческой деятельности для достижения поставленных целей.

6.5.3. Одноканальная СМО с ограниченной длиной очереди

В коммерческой деятельности чаще встречаются СМО с ожиданием (очередью).

Рассмотрим простую одноканальную СМО с ограниченной очередью, в которой число мест в очереди m – фиксированная величина. Следовательно, заявка, поступившая в тот момент, когда все места в очереди заняты, не принимается к обслуживанию, не встает в очередь и покидает систему.

Граф этой СМО представлен на рис. 6.5.4 и совпадает с графом рис. 6.2.3, описывающим процесс «рождения–гибели», с тем

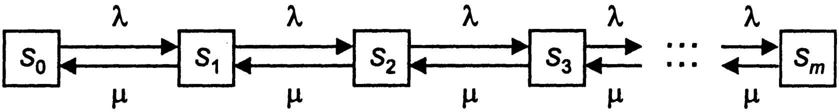


Рис. 6.5.5. Размеченный граф процесса «рождения – гибели»

отличием, что при наличии только одного канала обслуживания все интенсивности потоков обслуживания равны.

Состояния СМО можно представить следующим образом:

S_0 – канал обслуживания свободен,

S_1 – канал обслуживания занят, но очереди нет,

S_2 – канал обслуживания занят, в очереди стоит одна заявка,

S_3 – канал обслуживания занят, в очереди стоят две заявки,

....

S_{m+1} – канал обслуживания занят, в очереди все m мест заняты, любая следующая заявка получает отказ.

Для описания случайного процесса СМО можно воспользоваться изложенными ранее правилами и формулами. Напишем выражения, определяющие предельные вероятности состояний:

$$\begin{cases} p_1 = \rho \cdot p_0 \\ p_2 = \rho^2 \cdot p_0 \\ p_k = \rho^k \cdot p_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_{m+1} = \rho^{m+1} \cdot p_0 \\ p_0 = [1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^{m+1}]^{-1} \end{cases}$$

Выражение для p_0 можно в данном случае записать проще, пользуясь тем, что в знаменателе стоит геометрическая прогрессия относительно ρ, тогда после соответствующих преобразований получаем:

$$p_0 = \frac{(1-\rho)}{(1-\rho^{m+2})}.$$

Эта формула справедлива для всех ρ, отличных от 1, если же $\rho = 1$, то $p_0 = 1/(m+2)$, а все остальные вероятности также равны $1/(m+2)$. Если предположить $m = 0$, то мы переходим от рассмотрения одноканальной СМО с ожиданием к уже рассмотренной одноканальной СМО с отказами в обслуживании. Действительно, выражение для предельной вероятности p_0 в случае $m = 0$ имеет вид:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \text{ и в случае } \lambda = \mu \text{ имеет величину } p_0 = 1/2.$$

Определим основные характеристики одноканальной СМО с ожиданием: относительную и абсолютную пропускную способность, вероятность отказа, а также среднюю длину очереди и среднее время ожидания заявки в очереди.

Заявка получает отказ, если она поступает в момент времени, когда СМО уже находится в состоянии S_{m+1} и, следовательно, все места в очереди m заняты и один канал обслуживает. Поэтому вероятность отказа определяется вероятностью появления состояния S_{m+1}:

$$p_{\text{отк}} = p_{m+1} = \rho^{m+1} \cdot p_0.$$

Относительная пропускная способность, или доля обслуживаемых заявок, поступающих в единицу времени, определяется выражением

$$Q = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - \rho^{m+1} \cdot p_0;$$

абсолютная пропускная способность равна:

$$A = Q \cdot \lambda.$$

Среднее число заявок $L_{\text{оч}}$, стоящих в очереди на обслуживание, определяется математическим ожиданием случайной величины k – числа заявок, стоящих в очереди:

$$L_{\text{оч}} = M(k).$$

Случайная величина k принимает следующие только целочисленные значения:

1 – в очереди стоит одна заявка,
2 – в очереди две заявки,
....
m – в очереди все места заняты.

Вероятности этих значений определяются соответствующими вероятностями состояний, начиная с состояния S_2. Закон распределения дискретной случайной величины k изображается следующим образом:

k	1	2	...	m
p_i	p_2	p_3	...	p_{m+1}

Математическое ожидание этой случайной величины равно:

$$L_{оч} = 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + ... + m \cdot p_{m+1}.$$

В общем случае при $\rho \neq 1$ эту сумму можно преобразовать, пользуясь моделями геометрической прогрессии, к более удобному виду:

$$L_{оч} = \rho^2 \cdot \frac{1-\rho^m \cdot (m - m \cdot \rho + 1)}{(1-\rho)^2} \cdot p_0.$$

В частном случае при $\rho = 1$, когда все вероятности p_k оказываются равными, можно воспользоваться выражением для суммы членов числового ряда

$$1+2+3+...+m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Тогда получим формулу

$$L'_{оч} = \frac{m(m+1)}{2} \cdot p_0 = \frac{m(m+1)}{2(m+2)} (\rho = 1).$$

Применяя аналогичные рассуждения и преобразования, можно показать, что среднее время ожидания обслуживания заявки в очереди определяется формулами Литтла

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{A} \ (\text{при } \rho \neq 1) \text{ и } T^1_{оч} = \frac{L'_{оч}}{A} \ (\text{при } \rho = 1).$$

Такой результат, когда оказывается, что $T_{оч} \sim 1/\lambda$, может показаться странным: с увеличением интенсивности потока заявок как будто бы должна возрастать длина очереди и уменьшается среднее время ожидания. Однако следует иметь в виду, что, во-первых, величина $L_{оч}$ является функцией от λ и μ и, во-вторых, рассматриваемая СМО имеет ограниченную длину очереди не более m заявок.

Заявка, поступившая в СМО в момент времени, когда все каналы заняты, получает отказ, и, следовательно, время ее «ожидания» в СМО равно нулю. Это приводит в общем случае (при $\rho \neq 1$) к уменьшению $T_{оч}$ ростом λ, поскольку доля таких заявок с ростом λ увеличивается.

Если отказаться от ограничения на длину очереди, т.е. устремить $m \to \infty$, то случаи $\rho < 1$ и $\rho \geq 1$ начинают существенно различаться. Записанные выше формулы для вероятностей состояний преобразуются в случае р < 1 к виду

$$\begin{cases} p_0 = 1 - \rho \\ p_1 = \rho \cdot (1 - \rho) \\ p_2 = \rho^2 \cdot (1 - \rho) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_k = \rho^k \cdot (1 - \rho) \end{cases}$$

При достаточно большом k вероятность p_k стремится к нулю. Поэтому относительная пропускная способность будет $Q = 1$, а абсолютная пропускная способность станет равной $A = \lambda\, Q = \lambda$, следовательно, обслуживаются все поступившие заявки, причем средняя длина очереди окажется равной:

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho},$$

а среднее время ожидания по формуле Литтла

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{A}.$$

В пределе р << 1 получаем $T_{\text{оч}} = \rho/\mu$, т.е. среднее время ожидания быстро уменьшается с увеличением интенсивности потока обслуживания. В противном случае при $\rho \geq 1$ оказывается, что в СМО отсутствует установившийся режим. Обслуживание не успевает за потоком заявок, и очередь неограниченно растет со временем (при $t \to \infty$). Предельные вероятности состояний поэтому не могут быть определены: при $Q = 1$ они равны нулю. Фактически СМО не выполняет своих функций, поскольку она не в состоянии обслужить все поступающие заявки. Нетрудно определить, что доля обслуживаемых заявок и абсолютная пропускная способность соответственно составляют в среднем ρ и μ, однако неограниченное увеличение очереди, а следовательно, и времени ожидания в ней приводит к тому, что через некоторое время заявки начинают накапливаться в очереди на неограниченно долгое время.

В качестве одной из характеристик СМО используют среднее время $T_{\text{смо}}$ пребывания заявки в СМО, включающее среднее время пребывания в очереди и среднее время обслуживания. Эта величина вычисляется по формулам Литтла:

если длина очереди ограничена –

среднее число заявок, находящихся в очереди, равно:

$$L_{\text{смо}} = \frac{m+1}{2};$$

$$T_{\text{смо}} = \frac{L_{\text{смо}}}{A} \text{ при } \rho \neq 1,$$

тогда среднее время пребывания заявки в системе массового обслуживания (как в очереди, так и под обслуживанием) равно:

$$T_{\text{смо}} = \frac{m+1}{2\mu} \text{ при } \rho = 1.$$

Пример 1. В магазине самообслуживания установлено, что поток покупателей является простейшим с интенсивностью $\lambda = 2$ покупателя в минуту. В этом магазине установлен один кассовый аппарат, позволяющий добиться такой производительности труда, при которой интенсивность потока обслуживания составляет величину $\mu = 2$ покупателя в минуту. Определим характеристики СМО при условии, что очередь ограничена контролером при входе в зал самообслуживания: $m = 5$ покупателям.

Решение

В данном случае $\rho = \lambda/\mu = 1$, поэтому получаем, что все вероятности состояний СМО оказываются одинаковыми и равными:

$$p_0 = \frac{1}{m+2} = \frac{1}{7}; \quad p_1 = p_2 = \ldots = p_6 = \frac{1}{7}.$$

Вероятность отказа в обслуживании составляет:

$$P_{\text{отк}} = P_6 = \frac{1}{7} \approx 0{,}1.$$

Относительная и абсолютная пропускные способности соответственно равны:

$$Q = 1 - p_6 = 0{,}857; A = \lambda\, q \approx 1{,}7 \text{ покупателя/мин.}$$

Средняя длина очереди:

$$L'_{\text{оч}} = \frac{m(m+1)}{2(m+2)} \approx 2{,}1 \text{ покупателя.}$$

Среднее время ожидания в очереди:

$$T'_{\text{оч}} = \frac{L'_{\text{оч}}}{A} \approx 2{,}3 \text{ мин.}$$

Среднее время пребывания покупателя в системе:

$$T_{\text{смо}} = T'_{\text{оч}} + \mu = 2{,}8 \text{ мин.}$$

Таким образом, несмотря на то, что интенсивность потока обслуживания равна интенсивности потока покупателей, по причине случайного характера этих процессов эффективность работы СМО оказывается существенно ниже, чем можно было ожидать, если исходить, например, из предположения, что заявки и обслуживание следуют синхронно во времени. Даже при наличии допустимой очереди из пяти покупателей вероятность отказа в обслуживании остается ощутимой, поскольку каждому седьмому покупателю отказывается в обслуживании. Среднее время пребывания покупателя у кассы втрое превышает значение 0,5 мин, которое было бы при равномерном следовании заявок и равномерном обслуживании.

Улучшение характеристик СМО происходит очень быстро, если уменьшить отношение $\lambda/\mu = \rho$. Уже при $\rho \leq 0{,}8$ можно отказаться от ограничения на длину очереди. Если в условиях нашего примера увеличить интенсивность потока обслуживания только на 25%, т.е. установить $\mu = 2{,}5$ (покупателя в минуту) и соответственно $\rho = 0{,}8$ и принять $m = \infty$, то получим СМО со следующими характеристиками: вероятность отказа $p_{\text{отк}} = 0$; относительная пропускная способность $Q = 1$; абсолютная пропускная способность $A = \lambda\, Q = 2$ (покупателя в минуту); средняя длина очереди $\bar{L}_{\text{оч}} = 3{,}2$ (покупателя); среднее время пребывания у кассы $\bar{t}_{\text{обс}} = 2$ мин; среднее время пребывания в очереди $T_{\text{оч}} = 1{,}6$ мин.

Такой режим работы СМО может явиться более предпочтительным по сравнению с режимом работы при $\rho = 1$ потому, что ни одному из покупателей не отказывается в обслуживании, хотя длина очереди и время обслуживания в среднем несколько возрастают.

Пример 2. На автомойку в среднем за час приезжают три автомобиля, если в очереди уже находятся два автомобиля, то вновь подъезжающие автомобили не желают терять времени в ожидании обслуживания и покидают мойку, поскольку среднее время мойки одного автомобиля составляет 20 мин, а мест для мойки всего одно. Необходимо провести анализ работы системы обслуживания с 9^{00} до 21^{00} часов, если средняя стоимость мойки одного автомобиля составляет 70 руб.

Решение

$\gamma = 3$ авт/ч; $t_{обс} = 20$ мин; $m = 2$, $c_1 = 70$ руб.; $T_{раб} = 12$ ч, $n = 1$.

Целевая функция в общем виде связи выручки от мойки автомобилей с покупателями системы имеет следующий вид:

$$B = f\{\lambda, \overline{t}_{обс}, \mu, \rho, n, m, p_0, p_{отк}, Q, A, L_{оч}, L_{смо}, T_{раб}, T_{оч}, T_{смо}\} \to \max.$$

Находим интенсивность обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{обс}} = \frac{1}{20} = 3 \text{ авт/ч}.$$

Определяем интенсивность нагрузки:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{3} = 1.$$

Предельные вероятности состояний равны:

$$p_0 = p_1 = p_2 = p_{n+m} = p_3 = \frac{1}{m+2} = \frac{1}{2+2} = 0{,}25.$$

Вероятность отказа в обслуживании:

$$p_{отк} = p_3 = 0{,}25.$$

Относительная пропускная способность:

$$Q = 1 - p_3 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \cdot Q = 3 \cdot 0{,}75 = 2{,}25 \text{ авт/ч}.$$

Средняя длина очереди:

$$L_{оч} = \frac{m(m+1)}{2(m+2)} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4} = 0{,}75 \text{ авт}.$$

Среднее время простоя в очереди:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{A} = \frac{0{,}75}{3 \cdot 0{,}75} = 0{,}333 \text{ ч} = 20 \text{ мин.}$$

Среднее число заявок, находящихся на обслуживании:

$$L_{\text{обс}} = g \cdot Q \cdot 1 \cdot 0{,}75 \text{ авт.}$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{\text{смо}} = L_{\text{обс}} + L_{\text{оч}} = 1{,}5 \text{ авт.}$$

Среднее время пребывания автомобиля в системе обслуживания мойки:

$$T_{\text{смо}} = \frac{L_{\text{смо}}}{A} = \frac{1{,}5}{2{,}25} = 40 \text{ мин.}$$

Таким образом, средняя доля потерянных заявок равна 25% из числа поступивших, что при круглосуточном режиме работы составит 3 · 24 · 0,25 =18 авт., что приведет к потере выручки от обслуживания в сумме 1260 руб.

Пример 3. Провести анализ работы в СМО при изменении одного условия в примере 2 – интенсивности приезда автомобилей на мойку до 6 автомобилей в час.

Решение

$$\lambda = 6 \text{ авт/ч}; \ \bar{t}_{\text{обс}} = 20 \text{ мин}; \ m = 2; \ \mu = 3 \text{ авт/ч}, \ c_1 = 70 \text{ руб},$$
$$T_{\text{раб}} = 12 \text{ ч}, \ n = 1.$$

Определяем интенсивность нагрузки:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{3} = 2.$$

Определяем долю времени простоя мойки:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \frac{1-2}{1-2^4} = 0{,}067.$$

Определяем вероятность отказа:

$$p_{\text{отк}} = \frac{(1-\rho)\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}} = \frac{(1-2)2^3}{1-2^4} = 0{,}5.$$

Относительная пропускная способность равна:

$$Q = 1 - p_{\text{отк}} = 0{,}5.$$

Абсолютная пропускная способность равна:

$$A = \lambda \cdot Q = 6 \cdot 0{,}5 = 3 \text{ авт/ч}.$$

Среднее число автомобилей в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \rho^2 \frac{1-\rho^m(m - m \cdot \rho + 1)}{(1-\rho)^2} p_0 = 4\frac{1-4(2-2\cdot 2+1)}{(1-2)^2} 0{,}067 = 1{,}33.$$

Среднее число автомобилей в мойке:

$$L_{\text{обс}} = \rho \cdot Q = 2 \cdot 0{,}5 = 1 \text{ авт.}$$

Среднее число автомобилей в системе:

$$L_{\text{смо}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{обс}} = 1{,}33 + 1 = 2{,}33 \text{ авт.}$$

Среднее время ожидания автомобиля в очереди:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{A} = \frac{1{,}33}{3} = 26 \text{ мин.}$$

Среднее время пребывания автомобиля в системе:

$$T_{\text{смо}} = \frac{L_{\text{смо}}}{A} = \frac{2{,}33}{3} = 46 \text{ мин.}$$

Таким образом, велика доля заявок, получивших отказ в обслуживании, $p_{\text{отк}} = 0{,}5$, следовательно, 50% из числа поступивших автомобилей получают отказ в мойке автомобилей. Если учитывать время работы с 9 до 21 – всего 12 часов, то за это время количество потерянных заявок составит: $\lambda \cdot 12 \cdot 0{,}5 = 6 \cdot 12 \cdot 0{,}5 = 36$ авт., а потеря выручки – $36 \cdot 70$ – 2520 руб.

Пример 4. Преподаватель на экзамене дисциплины «Прикладная математика» представляет собой одноканальную систему с ограниченной длиной очереди без отказа в обслуживании учебной группы студентов. В качестве критерия целевой функции может быть время, затраченное на прием экзаменов:

$$T = \sum_{i=1}^{m} t_i,$$

где m – количество студентов;

t_i – время, затраченное на прием экзамена у i-го студента.

Допустим, по существующим нормам на прием экзамена у одного студента отведено $t^{\text{н}}_{\text{обс}} = 20$ мин. Следовательно, если группа состоит из $m = 18$ студентов, то преподаватель фиксирует выполнение учебной нагрузки в объеме 6 ч. Фактически эта процедура в целом занимает больше времени. Это связано прежде всего с необходимостью затрат времени на подготовку первого студента до 1 ч. Затем в первых рядах обычно идут сдавать экзамены «отличники» и «хорошисты». Замыкают поток заявок на обслуживание «троечники» и «двоечники», на которых, как правило, идут колоссальные затраты и времени, причем $t_i >> t^{\text{н}}_{\text{обс}}$, и энергии преподавателя, значительно превышающие нормативы. Поэтому общие затраты только времени фактически в лучшем случае в полтора раза больше нормы, причем за время проведения экзамена преподаватель не имеет права покинуть аудиторию.

Решение

Принимать экзамены письменно сразу у всех студентов, затем проверить все работы и в завершение в случае необходимости дать пояснения студентам по итогам экзамена.

6.5.4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью

В коммерческой деятельности в качестве одноканальной СМО с неограниченным ожиданием является, например, коммерческий директор, поскольку он, как правило, вынужден выполнять обслуживание заявок различной природы: документы, переговоры по телефону, встречи и беседы с подчиненными, представителями налоговой инспекции, милиции, товароведами, маркетологами, поставщиками продукции и решать задачи в товарно-финансовой сфере с высокой степенью финансовой ответственности, что связано с обязательным выполнением запросов, которые ожидают иногда нетерпеливо выполнения своих требований, а ошибки неправильного обслуживания, как правило, экономически весьма ощутимы.

В то же время товары, завезенные для продажи (обслуживания), находясь на складе, образуют очередь на обслуживание (продажу). Длину очереди составляет количество товаров, предназначенных для продажи. В этой ситуации продавцы выступают в роли каналов, обслуживающих товары. Если количество товаров, предназначенных для продажи, велико, то в этом случае мы имеем дело с типичным случаем СМО с ожиданием. Рассмотрим простейшую одноканальную СМО с ожиданием обслуживания, на которую поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ и интенсивностью обслуживания μ. Причем заявка, поступившая в момент, когда канал занят обслуживанием, ставится в очередь и ожидает обслуживания. Размеченный граф состояний такой системы приведен на рис. 6.5.6.

Количество возможных состояний ее бесконечно:

S_0 – канал свободен, очереди нет, $k = 0$;

S_1 – канал занят обслуживанием, очереди нет, $k = 1$;

S_2 – канал занят, одна заявка в очереди, $k = 2$;

....

S_k – канал занят $(k - 1)$, заявка в очереди.

Модели оценки вероятности состояний СМО с неограниченной очередью можно получить из формул, выведенных для СМО с ограниченной очередью, путем перехода к пределу при $m \to \infty$:

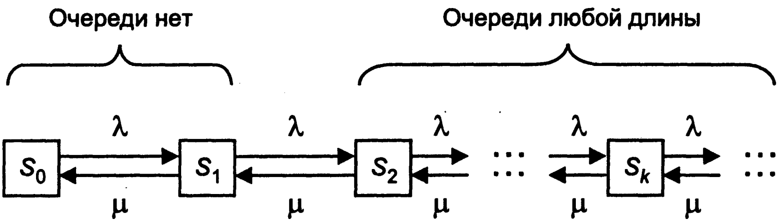


Рис. 6.5.6. Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \\ p_1 = \rho \cdot p_0 \\ p_2 = \rho^2 \cdot p_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_k = \rho^k \cdot p_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 1-\rho \\ p_1 = \rho(1-\rho) \\ p_2 = \rho^2(1-\rho) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_k = \rho^k(1-\rho) \end{cases}$$

Следует заметить, что для СМО с ограниченной длиной очереди в формуле

$$p_0 = [1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^k + \dots + \rho^{m+1}]^{-1}$$

имеет место геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем ρ. Такая последовательность представляет собой сумму бесконечного числа членов при $m \to \infty$. Эта сумма сходится, если прогрессия, бесконечно убывающая при $\rho < 1$, что определяет установившийся режим работы СМО, а при $\rho > 1$ очередь при $t \to \infty$ с течением времени может расти до бесконечности.

Поскольку в рассматриваемой СМО ограничение на длину очереди отсутствует, то любая заявка может быть обслужена, поэтому $p_{обс} = 1$, следовательно, относительная пропускная способность $Q = p_{обс} = 1$, соответственно $p_{отк} = 0$, а абсолютная пропускная способность $A = \lambda \cdot Q = \lambda$, $L_{об} = \rho$.

Вероятность пребывания в очереди k заявок равна:

$$p_k = \rho^k (1 - \rho);$$

среднее число заявок в очереди —

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho};$$

среднее число заявок в системе —

$$L_{\text{смо}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho = \frac{\rho}{1-\rho};$$

среднее время ожидания обслуживания в очереди —

$$T_{\text{оч}} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)};$$

среднее время пребывания заявки в системе —

$$T_{\text{смо}} = T_{\text{оч}} + \bar{t}_{\text{обс}} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Если в одноканальной СМО с ожиданием интенсивность поступления заявок больше интенсивности обслуживания $\lambda > \mu$, то очередь будет постоянно увеличиваться. В связи с этим наибольший интерес представляет анализ устойчивых СМО, работающих в стационарном режиме при $\lambda < \mu$, $\rho < 1$.

Пример 1. Булочная «Горячий хлеб» имеет одного контролера-кассира. В течение часа приходят в среднем 54 покупателя. Средняя стоимость одной покупки составляет 7 руб. Среднее время обслуживания контролером-кассиром одного покупателя составляет 1 мин. Определим выручку от продажи, характеристики СМО и проведем анализ ее работы.

Решение

По условиям задачи $n = 1$, $\lambda = 54$ ед./ч, $\mu = 60$ ед./ч, и поскольку $\rho = \lambda / \mu = 0{,}9$, то очередь не будет расти бесконечно, следовательно, предельные вероятности существуют:

вероятность того, что контролер-кассир свободен –

$$p_0 = 1 - \rho = 0{,}1;$$

вероятность того, что контролер-кассир занят работой –

$$p_{зан} = 1 - p_0 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9;$$

среднее число покупателей в очереди –

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0{,}9^2}{1-0{,}9} = 8{,}1 \text{ чел.};$$

среднее время ожидания в очереди –

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{8{,}1 \cdot 60}{54} = 9 \text{ мин};$$

среднее время пребывания покупателя в булочной –

$$T_{смо} = T_{оч} + \bar{t}_{обс} = 9 + 1 = 10 \text{ мин};$$

среднее число покупателей в булочной –

$$L_{смо} = L_{оч} + \rho = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}9}{1-0{,}9} = 9 \text{ чел.};$$

вероятность того, что в булочной находятся один, два, три, четыре человека, а следовательно, ожидают расчета в очереди у контролера-кассира 1, 2, 3 человека соответственно –

$$p_1 = \rho\,(1 - \rho) = 0{,}9\,(1 - 0{,}9) = 0{,}09;$$
$$p_2 = \rho^2\,(1 - \rho) = 0{,}9^2\,(1 - 0{,}9) = 0{,}081;$$
$$p_3 = \rho^3\,(1 - \rho) = 0{,}9^3\,(1 - 0{,}9) = 0{,}073;$$

вероятность того, что ожидают расчета у контролера-кассира не более трех человек, равна –

$$P = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}09 + 0{,}081 + 0{,}073 = 0{,}244.$$

Доля времени простоя контролера-кассира составляет всего 10% от продолжительности рабочего дня, однако время ожидания обслуживания в очереди ощутимо – 9 мин, поэтому следует уменьшать время обслуживания $\bar{t}_{обс}$, введя дополнительный кассовый аппарат и соответственно контролера-кассира, иначе покупатели будут уходить в другое торговое предприятие, что приведет к ухудшению экономических показателей хозяйственной деятельности, в частности к уменьшению выручки от продажи хлеба и образованию остатков хлеба на следующий день и к потере его качества.

Пример 2. Интенсивность потока автомобилей на АЗС к колонке за бензином АИ-92 составляет 30 автомобилей в 1 ч, а среднее время заправки равно 5 мин. Проведем анализ работы системы массового обслуживания АЗС. Определите отношение зарплаты контролера-кассира АЗС, например, к вашей, уважаемый читатель.

Решение

$$\lambda = 30 \text{ ед. /ч}, \ \bar{t}_{обс} = 5 \text{ мин} = 1/12 \text{ ч}.$$

Определим характеристики СМО:
интенсивность нагрузки

$$\rho = \lambda / \mu = \lambda \cdot \bar{t}_{обс} = 30 \cdot 1/12 = 10/4 = 2{,}5.$$

Поскольку $\rho > 1$, то АЭС не будет работать в стационарном режиме и очередь будет постоянно увеличиваться, поэтому необходимо ввести еще одну колонку с бензином АИ-92 или уменьшить_время обслуживания до величины $\approx$ 1,9 мин, тогда $\rho = \lambda \cdot \bar{t}_{обс} = 30 \cdot 1{,}9/60 = 0{,}95$, следовательно, $\rho < 1$ и возможен стационарный режим работы на бензозаправочной станции.

Пример 3. В парикмахерской работает только один мужской мастер. Среднее время стрижки одного клиента составляет 20 мин. Клиенты в среднем приходят каждые 25 мин. Средняя стоимость стрижки составляет 60 руб. Как в первую смену с 9 до 15 часов, так и во вторую – с 15 до 21 часа работает один мастер. Провести анализ работы системы обслуживания. Определите отношение зарплаты за месяц парикмахера к вашей, уважаемый читатель.

Решение

$$n = 1;\ \lambda = 2{,}4\ \text{клиента/ч};\ \bar{t}_{\text{обс}} = 20\ \text{мин} = 1/3\ \text{ч}.$$

Находим интенсивность нагрузки:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{\text{ост}} = 2{,}4 \cdot \frac{20}{60} = 0{,}8;$$

долю времени простоя мастера:

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$$

вероятность того, что мастер занят работой:

$$p_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8;$$

среднее число клиентов в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0{,}8^2}{0{,}2} = 3{,}2\ \text{клиента};$$

среднее время ожидания в очереди:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{3{,}2}{2{,}4} = 1{,}34\ \text{мин};$$

среднее время пребывания клиентов в парикмахерской:

$$T_{\text{смо}} = T_{\text{оч}} + \bar{t}_{\text{обс}} = 1{,}34 + 20 = 21{,}34\ \text{мин}.$$

Система работает вполне удовлетворительно. Поскольку $\rho < 1$, то режим работы системы устойчивый, 20% рабочего времени мастер не занят, а остальные 80% времени занят работой, длина очереди 3,2 клиента небольшая, а среднее время пребывания клиента в парикмахерской всего 21,34 мин. Если интенсивность появления клиентов увеличится, например, до $\lambda = 4$ клиентов/ч, то интенсивность нагрузки составит $\rho > 1$ и очередь будет постоянно увеличиваться, что приведет к неустойчивому режиму работы СМО.

6.5.5. Многоканальная СМО с ограниченной длиной очереди

Рассмотрим многоканальную СМО ($n > 1$), на вход которой поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ, а интенсивность обслуживания каждого канала составляет μ, максимально возможное число мест в очереди ограничено величиной m. Дискретные состояния СМО определяются количеством заявок, поступивших в систему, которые можно записать.

S_0 – все каналы свободны, $k = 0$;

S_1 – занят только один канал (любой), $k = 1$;

S_2 – заняты только два канала (любых), $k = 2$;

....

S_n – заняты все n каналов, $k = n$.

Пока СМО находится в любом из этих состояний, очереди нет. После того как заняты все каналы обслуживания, последующие заявки образуют очередь, тем самым определяя дальнейшее состояние системы:

S_{n+1} – заняты все n каналов и одна заявка стоит в очереди, $k = n+1$;

S_{n+2} – заняты все n каналов и две заявки стоят в очереди, $k = n + 2$;

....

S_{n+m} – заняты все n каналов и все m мест в очереди, $k = n + m$.

Граф состояний n-канальной СМО с очередью, ограниченной m местами, представлен на рис. 6.5.7.

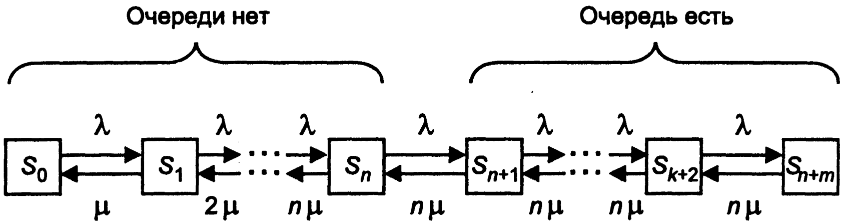


Рис. 6.5.7. Граф состояний n-канальной СМО с ограничением на длину очереди m

Переход СМО в состояние с большими номерами определяется потоком поступающих заявок с интенсивностью λ, тогда как по условию в обслуживании этих заявок принимают участие n одинаковых каналов с интенсивностью потока обслуживания равного μ для каждого канала. При этом полная интенсивность потока обслуживания возрастает с подключением новых каналов вплоть до такого состояния S_n, когда все n каналов окажутся занятыми. С появлением очереди интенсивность обслуживания более не увеличивается, так как она уже достигла максимального значения, равного $n\,\mu$.

Запишем выражения для предельных вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\rho}{1!} \cdot p_0; \\ p_2 = \dfrac{\rho^2}{2!} \cdot p_0 \quad \ldots\ldots\ldots; \\ p_k = \dfrac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \quad 0 \le k \le n; \\ p_n = \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot p_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0; \\ p_{n+2} = \dfrac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} \cdot p_0 \quad \ldots\ldots; \\ p_{n+r} = \dfrac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0 \quad n \le r \le m; \\ p_{n+m} = \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot p_0 = p_{\text{отк}}; \end{cases}$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \ldots + \frac{\rho^m}{n^m \cdot n!} + \right]^{-1}.$$

Выражение для p_0 можно преобразовать, используя формулу геометрической прогрессии для суммы членов со знаменателем ρ/n:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n \cdot \rho/n - (\rho/n)^{m+1}}{n!(1-\rho/n)}\right]^{-1} \quad k = 0;$$

$$p_0 \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho/n - (\rho/n)^{m+1}}{1-\rho/n}\right]^{-1} =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \cdot (1 - (\rho/n)^m\right]^{-1}.$$

Образование очереди возможно, когда вновь поступившая заявка застанет в системе не менее n требований, т.е. когда в системе будет находиться n, $n+1$, $n+2$,..., $(n + m - 1)$ требований. Эти события независимы, поэтому вероятность того, что все каналы заняты, равна сумме соответствующих вероятностей p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, ..., p_{n+m-1}. Поэтому вероятность образования очереди равна:

$$p_{\text{оч}} = \sum_{k=n}^{n+m-1} p_k = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{1-(\rho/n)^m}{1-\rho/n} \cdot p_o.$$

Вероятность отказа в обслуживании наступает тогда, когда все n каналов и все m мест в очереди заняты:

$$p_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot p_0; \quad k = n+m.$$

Относительная пропускная способность будет равна:

$$Q = p_{\text{обс}} = 1 - p_{\text{отк}};$$

абсолютная пропускная способность –

$$A = \lambda \cdot Q;$$

среднее число занятых каналов –

$$\bar{n}_3 = A / \mu = \rho \cdot Q;$$

среднее число простаивающих каналов —

$$\bar{n}_{\text{пр}} = n - \bar{n}_3;$$

коэффициент занятости (использования) каналов –

$$K_3 = \bar{n}_3/n;$$

коэффициент простоя каналов –

$$K_{\text{пр}} = 1 - K_3;$$

среднее число заявок, находящихся в очередях, –

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1-(\rho/n)^m \cdot (m+1-m \cdot \rho/n)}{(1-\rho/n)^2} p_0;$$

в случае если $\rho/n = 1$, эта формула принимает другой вид –

$$L_{оч}^{1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{m \cdot (m+1)}{2} \cdot p_0;$$

среднее время ожидания в очереди определяется формулами Литтла –

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{A}(\rho / n \neq 1);$$

$$T_{оч}^{1} = \frac{L_{оч}^{1}}{A}(\rho / n = 1).$$

Среднее время пребывания заявки в СМО, как и для одноканальной СМО, больше среднего времени ожидания в очереди на среднее время обслуживания, равное $1/\mu$, поскольку заявка всегда обслуживается только одним каналом:

$$T_{смо} = T_{оч} + \frac{1}{\mu}(\rho / n \neq 1).$$

Пример 1. В мини-маркет поступает поток покупателей с интенсивностью 6 покупателей в 1 мин, которых обслуживают три контролера-кассира с интенсивностью 2 покупателя в 1 мин. Длина очереди ограничена 5 покупателями. Необходимо определить характеристики СМО и дать оценку ее работы.

Решение

$$n = 3;\ m = 5;\ \lambda = 6;\ \mu = 2;\ \rho = \lambda/\mu = 3;\ \rho / n = 1;$$

находим предельные вероятности состояний СМО:
доля времени простоя контролеров-кассиров –

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{5\rho^4}{3 \cdot 3!} + \right]^{-1} \approx 0{,}0282,$$

вероятность того, что занят обслуживанием только один канал –

$$p_1 = 3 \cdot p_0 = 0{,}0846;$$

вероятность того, что заняты обслуживанием два канала –

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot p_0 = 4{,}5 p_0 = 0{,}127;$$

вероятность того, что заняты все три канала –

$$p_3 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot p_0 = 4{,}5 p_0 = 0{,}127;$$

вероятность того, что заняты все три канала и пять мест в очереди –

$$p_8 = 0{,}127.$$

Вероятность отказа наступает при $k = m + n = 5 + 3 = 8$ и составляет $p_8 = p_{\text{отк}} = 0{,}127$.

Относительная и абсолютная пропускные способности СМО соответственно равны $Q = 1 - p_{\text{отк}} = 0{,}873$ и $A = 0{,}873 \cdot \lambda = 5{,}24$ (покупателя в 1 мин).

Среднее число занятых каналов и средняя длина очереди равны:

$$\bar{n}_3 = \rho \cdot Q = 2{,}62; \; L^1_{\text{оч}} = 1{,}9 \text{ пок.}$$

Среднее время ожидания в очереди и пребывания в СМО соответственно равно: $T^1_{\text{оч}} = \dfrac{L^1_{\text{оч}}}{\text{A}} \approx 0{,}36$ мин, $T^1_{\text{смо}} = T_{\text{оч}} + \dfrac{1}{\mu} \approx 0{,}86$ мин.

Система обслуживания мини-маркета заслуживает высокой оценки, поскольку средняя длина очереди, среднее время пребывания покупателя в очереди составляют малые величины.

Пример 2. На плодоовощную базу в среднем через 30 мин прибывают автомашины с плодоовощной продукцией. Среднее время разгрузки одной машины составляет 1,5 ч. Разгрузку производят две бригады грузчиков. На территории базы у дебаркадера могут находиться в очереди в ожидании разгрузки не более 4 автомашин. Определим показатели и дадим оценку работы СМО.

Решение

СМО двухканальная, $n = 2$ с ограниченным числом мест в очереди $m = 4$, интенсивность входящего потока $\lambda = 2$ авт/ч, интенсивность обслуживания $\mu = 2/3$ авт/ч, интенсивность нагрузки $\rho = \lambda / \mu = 3$, $\rho / n = 3/2 = 1,5$.

Определяем характеристики СМО:

вероятность того, что все бригады не загружены, когда нет автомашин –

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n=2} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \cdot (1-(\rho/n)^m)\right]^{-1} =$$

$$= \left[\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{2!(2-3)} \cdot (1-1,5^4)\right]^{-1} = 0,0158;$$

вероятность отказа, когда под разгрузкой два автомобиля, а в очереди четыре автомобиля –

$$p_{\text{отк}} = p_{n+m} = p_6 = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot p_0 = \frac{3^6}{2!2^4} \cdot 0,0158 = 0,36;$$

относительная пропускная способность или вероятность обслуживания –

$$Q = p_{\text{обс}} = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - 0,36 = 0,64;$$

абсолютная пропускная способность –

$$A = \gamma \cdot Q = 2 \cdot 0,64 = 1,28 \text{ авт/ч};$$

среднее число занятых бригад –

$$\overline{n_3} = A / \mu = \frac{1,28}{2/3} = 1,92;$$

коэффициент занятости работой бригад грузчиков –

$$K_3 = \overline{n_3} / n = \frac{1{,}92}{2} = 0{,}96;$$

среднее число автомашин в очереди –

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (\rho / n)^m \cdot (m + 1 - m\rho / n)}{(1 - \rho / n)^2} \cdot p_0 =$$

$$= \frac{3^3}{2!2} \cdot \frac{1 - 1{,}5^4 \cdot (1 + 4 - 4 \cdot 1{,}5)}{(1 - 1{,}5)^2} \cdot 0{,}0158 \approx 2{,}6 \text{ авт.}$$

Доля времени простоя грузчиков очень мала и составляет всего 1,58% рабочего времени, а вероятность отказа велика: 36% заявок из числа поступивших получают отказ в разгрузке, обе бригады практически заняты полностью, коэффициент занятости близок к единице и равен 0,96, относительная пропускная способность мала – всего 64% из числа поступивших заявок будут обслужены, средняя длина очереди – 2,6 автомашины, следовательно, СМО не справляется с выполнением заявок на обслуживание и необходимо увеличить число бригад грузчиков и шире использовать возможности дебаркадера.

Пример 3. Коммерческая фирма получает по кольцевому завозу ранние овощи из теплиц пригородного совхоза в случайные моменты времени с интенсивностью 6 ед. в день. Подсобные помещения, оборудование и трудовые ресурсы позволяют обработать и хранить продукцию в объеме 2 ед. В фирме работают 4 человека, каждый из которых в среднем может обработать продукцию одного завоза в течение 4 ч. Продолжительность рабочего дня при сменной работе составляет 12 ч. Какова должна быть емкость складского помещения, чтобы полная обработка продукции была бы не менее 97% из числа осуществляемых поставок?

Решение

Решим задачу путем последовательного определения показателей СМО для различных значений емкости складского помещения $m = 2, 3, 4, 5$ и т.д. и сравнения на каждом этапе расчетов вероятности обслуживания с заданной величиной $p^*_{обс} = 0{,}97$.

Определяем интенсивность нагрузки:

$$\rho = \lambda / \mu = \frac{6}{3} = 2.$$

Находим вероятность или долю времени простоя для $m = 2$

$$p_0 = 1 + \left[\sum_{k=0}^{n=3} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \cdot (1 - (\rho / n)^m) \right]^{-1} =$$

$$= 1 + \left[\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^{3+1}}{3!(3-2)} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right) \right]^{-1} = 0{,}128.$$

Вероятность отказа в обслуживании, или доля потерянных заявок, –

$$p_{отк} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot p_0 = \frac{2^5}{3!3^2} \cdot 0{,}128 = 0{,}075.$$

Вероятность обслуживания, или доля обслуженных заявок из числа поступивших, составляет:

$$p_{обс} = 1 - p_{отк} = 1 - 0{,}075 = 0{,}925.$$

Поскольку полученная величина меньше заданной величины 0,97, то продолжаем вычисления для $m = 3$. Для этой величины показатели состояний СМО имеют значения:

$$p_0 = 1 : \left[\sum_{0}^{n=3} \frac{2^k}{k!} + \frac{2^4}{3} \cdot (1 - (2/3)^3) \right]^{-1} = 0{,}122;$$

$$p_{отк} = \frac{2^6}{3!3^3} \cdot 0{,}122 = 0{,}048;$$

$$p_{обс} = 1 - 0{,}048 = 0{,}952.$$

Вероятность обслуживания и в этом случае меньше заданной величины, поэтому продолжаем вычисления для следующего $m = 4$, для которого показатели состояния имеют такие значения: $p_0 = 0{,}12$; $p_{\text{отк}} = 0{,}028$; $p_{\text{обс}} = 0{,}972$. Теперь полученная величина вероятности обслуживания удовлетворяет условию задачи, поскольку 0,972 > 0,97, следовательно, емкость складского помещения необходимо увеличить до объема 4 ед.

Для достижения заданной вероятности обслуживания можно подобрать таким же образом оптимальное количество человек на обработке овощей, проводя последовательно вычисления показателей СМО для $n = 3, 4, 5$ и т.д. Компромиссный вариант решения можно найти путем сравнения и сопоставления для разных вариантов организаций СМО затрат, связанных как с увеличением числа работающих, так и с созданием специального технологического оборудования по обработке овощей на коммерческом предприятии.

Таким образом, модели массового обслуживания в сочетании с экономическими методами постановки задач позволяют проводить анализ существующих СМО, разрабатывать рекомендации по их реорганизации для повышения эффективности работы, а также определять оптимальные показатели вновь создаваемых СМО.

Пример 4. На автомойку в среднем за час приезжают 9 автомобилей, но если в очереди уже находятся 4 автомобиля, вновь подъезжающие клиенты, как правило, не встают в очередь, а проезжают мимо. Среднее время мойки автомобиля составляет 20 мин, а мест для мойки всего два. Средняя стоимость мойки автомобиля составляет 70 руб. Определите среднюю величину потери выручки автомойки в течение дня.

Решение

$$\lambda = 9 \text{ авт/ч}; \ \bar{t}_{\text{обс}} = 20 \text{ мин}; \ n = 2; \ m = 4.$$

Находим интенсивность нагрузки:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{\text{обс}} = 9 \cdot \frac{20}{60} = 3.$$

Определяем долю времени простоя автомойки:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{2} \frac{3^k}{k!} + \frac{3^3(1-(3/2)^4)}{2!(2-3)} \right]^{-1} = 0{,}015;$$

вероятность отказа –

$$p_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 = \frac{3^6}{2^4 \cdot 2} \cdot 0{,}015 = 0{,}34.$$

Относительная пропускная способность равна:

$$Q = 1 - p_{\text{отк}} = 0{,}66.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \cdot Q = 9 \cdot 0{,}66 = 5{,}94 \text{ авт/ч}.$$

Среднее число автомобилей в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \frac{3^3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1-(3/2)^4 \cdot (4+1-4 \cdot 3/2)}{(1-3/2)^2} \cdot 0{,}015 = 2{,}58 \text{ авт}.$$

Среднее число заявок, находящихся в обслуживании:

$$L_{\text{обс}} = \rho \cdot Q = 3 \cdot 0{,}66 = 1{,}98 \text{ авт}.$$

Среднее время ожидания в очереди:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{A} = \frac{2{,}58}{5{,}94} = 0{,}43 \text{ ч} = 26 \text{ мин}.$$

Среднее время пребывания автомашины на мойке:

$$T_{\text{смо}} = T_{\text{оч}} + \bar{t}_{\text{обс}} = \frac{L_{\text{смо}}}{A} = \frac{2{,}58+1{,}98}{5{,}94} = 0{,}76 \text{ ч} = 46 \text{ мин}.$$

Таким образом, 34% заявок не будут обслужены, потеря за 12 ч работы одного дня составит в среднем 2570 руб. ($12 \cdot 9 \cdot 0{,}34 \cdot 70$), т.е. 52% от всей выручки, поскольку $p_{отк} = 0{,}52\, p_{обс}$.

6.5.6. Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Рассмотрим многоканальную СМО с ожиданием и неограниченной длиной очереди, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ и которая имеет интенсивность обслуживания каждого канала μ. Размеченный граф состояний представлен на рис. 6.5.8. Он имеет бесконечное число состояний:

S_0 – все каналы свободны, $k = 0$;
S_1 — занят один канал, остальные свободны, $k = 1$;
S_2 — заняты два канала, остальные свободны, $k = 2$;
....
S_n – заняты все n каналов, $k = n$, очереди нет;
....
S_{n+1} – заняты все n каналов, одна заявка в очереди, $k = n + 1$;
S_{n+r} – заняты все n каналов, r заявок в очереди, $k = n + r$.
....

Вероятности состояний получим из формул для многоканальной СМО с ограниченной очередью при переходе к пределу при $m \to \infty$. Следует заметить, что сумма геометрической прогрессии в выражении для p_0 расходится при уровне загрузки $p/n > 1$, очередь будет бесконечно возрастать, а при $\rho/n < 1$ ряд сходится, что определяет установившийся стационарный режим работы СМО,

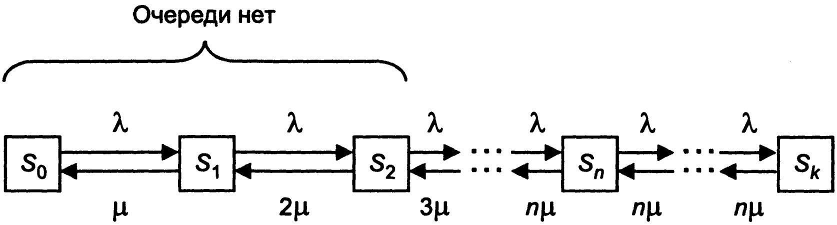


Рис. 6.5.8. Размеченный граф состояний многоканальной СМО с неограниченной очередью

для которого и определим выражения для предельных вероятностей состояний:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} \cdot p_0; \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot p_0; \ \ldots; \ p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0;$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0; \quad p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} \cdot p_0; \ \ldots; \ p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0.$$

Поскольку отказа в обслуживании в таких системах не может быть, то характеристики пропускной способности равны:

$$p_{\text{отк}} = 0; Q = 1; A = \lambda \cdot Q = \lambda;$$

среднее число заявок в очереди —

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} \cdot p_0;$$

среднее время ожидания в очереди —

$$T_{\text{оч}} = \frac{\rho^n}{n \cdot \mu \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} \cdot p_0 = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda};$$

среднее число заявок в СМО —

$$L_{\text{смо}} = L_{\text{оч}} + \rho; \quad T_{\text{смо}} = \frac{L_{\text{смо}}}{\lambda}.$$

Вероятность того, что СМО находится в состоянии S_0, когда нет заявок и не занято ни одного канала, определяется выражением

$$p_0 = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right]^{-1}, \quad k = 0.$$

Эта вероятность определяет среднюю долю времени простоя канала обслуживания.

Вероятность занятости обслуживанием k заявок –

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \quad 1 \le k \le n.$$

На этом основании можно определить вероятность, или долю времени занятости всех каналов обслуживанием

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0, \quad k = n.$$

Если же все каналы уже заняты обслуживанием, то вероятность состояния определяется выражением

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n! \cdot n^r} \cdot p_0 = p_n \cdot \left(\frac{\rho}{n} \right)^r, \quad k > n.$$

Вероятность оказаться в очереди равна вероятности застать все каналы уже занятыми обслуживанием.

$$p_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \cdot p_0, \quad k \ge n.$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди и ожидающих обслуживания, равно:

$$L_{\text{оч}} = \frac{n}{n-\rho} \cdot p_{\text{оч}};$$

среднее время ожидания заявки в очереди по формуле Литтла: $T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{A}$ и в системе $T_{\text{смо}} = \frac{L_{\text{смо}}}{A}$;

среднее число занятых каналов обслуживанием:

$$\bar{n}_з = \lambda/\mu = \rho;$$

среднее число свободных каналов:

$$\bar{n}_{св} = n - \rho;$$

коэффициент занятости каналов обслуживанием:

$$K_з = \bar{n}_з/n = \rho/n;$$

Важно заметить, что параметр ρ характеризует степень согласования входного потока, например покупателей в магазине с интенсивностью потока обслуживания. Процесс обслуживания будет стабилен при $\rho < n$. Если же $\rho \geq n$, в системе будут возрастать средняя длина очереди и среднее время ожидания покупателями начала обслуживания и, следовательно, СМО будет работать неустойчиво.

Рассмотрим применение моделей для анализа работы СМО с ожиданием на нескольких примерах.

Пример 1. В столовой к узлу расчета поступает пуассоновский поток посетителей с интенсивностью $\lambda = 120$ человек в час. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного посетителя составляет $T_{обс} = 1{,}0$ мин. Определим оптимальное число контролеров-кассиров n_0, при котором общие издержки C, определяемые затратами, с одной стороны, на содержание контролеров-кассиров $C_{ио}$, а с другой – пребыванием посетителей в очереди $C_{ип}$, были бы минимальны.

На этом основании целевую функцию можно записать так:

$$C = (C_{ио} + C_{ип}) \to \min.$$

Издержки $C_{ио}$ определяются числом каналов обслуживания n, величиной затрат, связанных с содержанием в системе одной обслуживающей единицы в течение одной единицы времени C_k (руб./ч) и интенсивностью входного потока λ.

Издержки потребления $C_{ип}$ определяются величиной удельных потерь $C_{оч}$, связанных с пребыванием в очереди одного покупателя в течение единицы времени и средним временем ожидания в очереди $T_{оч}$. Тогда целевую функцию затрат, связанную с пребыванием покупателей в системе в течение единицы времени, можно записать так:

$$C = (C_K \cdot n \cdot 1/\lambda + C_{оч} t_{оч}) \to \min.$$

Для удобства проведения вычислений предположим, что $C_{оч}/C_K = 3/1$, что позволит определить соотношение стоимостей обслуживания для разных вариантов организации системы. Для наглядности решения задачи построим график целевой функции $C = f(n)$, по которому найдем минимум затрат, величина которого укажет на оптимальную численность контролеров-кассиров.

Следует заметить, что длина очереди – один из основных показателей эффективности СМО. Причем если длина очереди в системе может бесконечно возрастать, то рациональной организации системы нельзя получить. Только при условии $\rho < n$ очередь может быть конечна, т.е. число заявок, поступающих в СМО за промежуток времени, равный средней длительности обслуживания $T_{обс}$, меньше числа обслуживающих каналов. Это обусловлено вероятностным характером как потока заявок, так и временем их обслуживания. Поэтому о рациональности варианта организации СМО можно рассуждать лишь в том случае, если $n > \rho$. Поскольку из условия задачи следует, что интенсивность нагрузки $\rho = \lambda/\mu = 2$, то вычисления показателей системы следует начать с $n = 3$.

Сначала определяем долю времени простоя контролеров-кассиров в течение рабочего дня, т.е. при условии отсутствия покупателей.

$$p_0 = 1 \div \left[\sum_0^3 \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-p)} \right] = 1 \div \left[\sum_0^3 \frac{2^k}{k!} + \frac{2^{3+1}}{3!(3-2)} \right] = 0{,}11.$$

Следовательно, три контролера-кассира будут простаивать 11% времени от всей продолжительности рабочего дня. Результаты вычислений запишем в табл. 6.5.2.

Таблица 6.5.2

n			3	4	5	6	7
P_0			0,11	0,13	0,134	0,136	0,161
P_n			0,148	0,087	0,0362	0,0121	0,0041
$p_{оч}$			0,445	0,175	0,06	0,018	0,006
$L_{оч}$			1,235	0,350	0,1	0,027	0,008
$T_{оч}$			0,617	0,175	0,05	0,135	0,004
$\frac{C}{C_K}$	При $\frac{C_{оч}}{C_K}$	3	3,351	2,525	2,65	3,04	3,512
		4	3,968	2,701	2,70	3,054	3,516
		5	4,58	2,875	2,75	3,067	3,52

Вероятность застать всех контролеров-кассиров занятыми определяется по формуле Эрланга.

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 = \frac{2^3}{3!} \cdot 0{,}11 = \frac{8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}11 = 0{,}148.$$

Вероятность оказаться в очереди –

$$p_{оч} = p_n \cdot \frac{n}{(n-p)} = 0{,}148 \cdot \frac{3}{3-2} = 0{,}455;$$

среднее число покупателей, находящихся в очереди, –

$$L_{оч} = p_{оч} \cdot \frac{n}{(n-p)} = 0{,}445 \cdot \frac{3}{3-2} = 1{,}235 \text{ чел.};$$

среднее время ожидания покупателями в очереди начала обслуживания –

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{1{,}235}{2} = 0{,}617;$$

относительная величина затрат для $n = 3$ и $C_{оч} = 3C_k$ составляет:

$$\frac{C}{C_K} = n \cdot \frac{1}{\lambda} + 3 \cdot T_{оч} = 1{,}5 + 3 \cdot 0{,}617 = 3{,}351;$$

среднее время пребывания посетителя в узле расчета –

$$T_{узр} = T_{оч} + T_{обс} = 0{,}617 + 1 = 1{,}617 \text{ мин};$$

среднее число занятых обслуживанием контролеров-кассиров –

$$\bar{n}_3 = \rho = 2;$$

среднее число свободных контролеров-кассиров –

$$\bar{n}_{св} = n - \rho = 3 - 2 = 1.$$

Коэффициент занятости контролеров-кассиров обслуживанием, т.е. нагрузка на одного контролера-кассира, или доля занятых обслуживанием каналов, составляет

$$K_3 = \frac{\rho}{n} = \frac{2}{3} = 0{,}666.$$

Среднее число покупателей в узле расчета –

$$L_{смо} = L_{оч} + \bar{n}_3 = 1{,}235 + 2 = 3{,}235 \text{ чел.};$$

абсолютная пропускная способность узла расчета в столовой –

$$A = \lambda = 120 \text{ пок/ч}.$$

Затем проводим аналогичные вычисления по определению перечисленных показателей для других значений n = 4, 5, 6, 7 и результаты запишем в табл. 6.5.2 и представим в виде рис. 6.5.9.

По данным таблицы следует, что оптимальное число контролеров-кассиров в узле расчета $n^0 = 4$ для соотношения $C_{оч} : C_k =$ $= 3 : 1$, при этом общие затраты будут минимальными.

Для целей расширения анализа проведены вычисления для разных вариантов соотношения $C_{оч} : C_k = 4, 5$, которое, по дан-

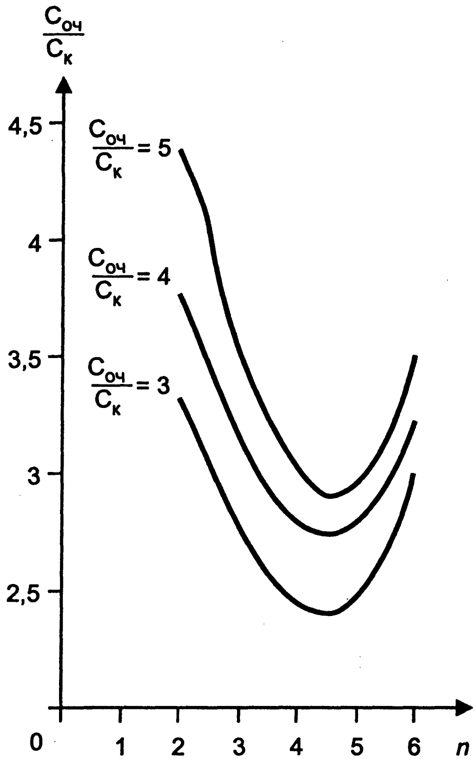


Рис. 6.5.9. Графическая модель связи относительно затрат СМО и числа кассиров

ным таблицы, влияет на оптимальную численность контролеров-кассиров.

Пример 2. В расчетном узле магазина самообслуживания работают 3 кассы. Интенсивность входного потока составляет 5 покупателей в минуту. Интенсивность обслуживания каждого контролера-кассира составляет 2 покупателя в минуту. Определим характеристики СМО и дадим оценку ее работы.

Решение

Определяем характеристики системы массового обслуживания:

интенсивность нагрузки –

$$\rho = \lambda / \mu = 5/2 = 2{,}5,$$

поскольку условие устойчивой работы $\rho < n$ выполнено $2{,}5 < 3$, то можно определять предельные вероятности состояний;

доли времени простоя узла расчета –

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n=3} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-p)}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{2{,}5}{1!} + \frac{2{,}5^2}{2!} + \frac{2{,}5^3}{3!} + \frac{2{,}5^4}{3!\cdot 0{,}5}\right]^{-1} = 0{,}045;$$

вероятность того, что заявка окажется в очереди, –

$$p_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-p)} \cdot p_0 = \frac{2{,}5^4}{3!(3-2{,}5)} \cdot 0{,}045 = 0{,}586;$$

средняя длина очереди –

$$L_{\text{оч}} = \frac{n}{n-\rho} \cdot p_{\text{оч}} = \frac{3}{0{,}5} \cdot 0{,}586 = 3{,}5 \text{ чел.};$$

среднее время пребывания в очереди –

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{3{,}5}{5} = 0{,}7 \text{ мин};$$

среднее число покупателей в магазине –

$$L_{\text{смо}} = L_{\text{оч}} + \rho = 6;$$

среднее количество занятых каналов –

$$\overline{n}_3 = \rho = 2{,}5;$$

коэффициент занятости каналов –

$$K_3 = \frac{\overline{n}_3}{n} = \frac{2{,}5}{3} = 0{,}833;$$

среднее время пребывания заявки в магазине –

$$T_{\text{смо}} = T_{\text{оч}} + \bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}7 \text{ мин} + 0{,}5 \text{ мин} = 1{,}2 \text{ мин}.$$

Доля времени простоя расчетного узла в магазине самообслуживания составляет всего 4,5% от продолжительности рабочего дня, а вероятность оказаться в очереди велика – 58,6%, длина очереди небольшая – всего 3,5 покупателя, время ожидания в очереди – 0,7 мин, а коэффициент занятости каналов – 83,3%, поэтому система работает удовлетворительно. Следует иметь в виду, что при увеличении интенсивности входного потока λ может нарушиться стационарный режим работы СМО, и при $\rho > n$ очередь будет нарастать и система не будет справляться с обслуживанием.

Пример 3. В магазине самообслуживания установлены два кассовых аппарата. Интенсивность входного потока в будние дни в среднем составляет 1,3 покупателя/мин до обеда, 1,8 покупателя/мин – после обеда, а в субботу и воскресенье – в среднем 2,2 покупателя/мин. Среднее время обслуживания покупателя контролером-кассиром составляет 52 с. Проведем анализ работы системы массового обслуживания магазина.

Решение

Определяем характеристики СМО отдельно для каждого варианта значения интенсивности входного потока:

интенсивность нагрузки –

$$\rho_1 = \lambda_1 \cdot \bar{t}_{\text{обс}} = 1{,}3 \cdot 52/60 = 1{,}13;$$

$$\rho_2 = \lambda_2 \cdot \bar{t}_{\text{обс}} = 1{,}8 \cdot 52/60 = 1{,}56;$$

$$\rho_3 = \lambda_3 \cdot \bar{t}_{\text{обс}} = 2{,}2 \cdot 52/60 = 1{,}9;$$

поскольку $n = 2$, то $\rho > n$ и, следовательно, возможен стационарный режим работы, при котором доля времени простоя кассиров –

$$p_0 = \left[\Sigma \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1}; \; p_0^1 = 0{,}28; \; p_0^2 = 0{,}12; \; p_0^3 = 0{,}025;$$

вероятность оказаться в очереди –

$$p_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \cdot p_0; \;\; p^1_{оч} = 0{,}23; \;\; p^2_{оч} = 0{,}52; \;\; p^3_{оч} = 0{,}86;$$

среднее число покупателей в очереди –

$$L_{оч} = p_{оч} \cdot \frac{n}{n-\rho}; \;\; L^1_{оч} = 0{,}52 \text{ чел.}; \;\; L^2_{оч} = 0{,}24 \text{ чел.}; \;\; L^3_{оч} = 17{,}2 \text{ чел.};$$

среднее число покупателей в магазине –

$$L_{смо} = L_{оч} + \rho; \; L^1{}_{смо} = 1{,}65 \text{ чел.}; \; L^2{}_{смо} = 4{,}16 \text{ чел.}; \; L^3{}_{смо} = 19 \text{ чел.};$$

среднее число занятых каналов –

$$\overline{n}_з = \lambda/\mu = \rho; \; \overline{n}_з^1 = 1{,}13; \; \overline{n}_з^2 = 1{,}56; \; \overline{n}_з^3 = 1{,}9;$$

среднее время пребывания заявки в очереди –

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}; \;\; T^1_{оч} = 0{,}4 \text{ мин}; \;\; T^2_{оч} = 1{,}33 \text{ мин}; \;\; T^3_{оч} = 7{,}82 \text{ мин};$$

среднее время пребывания заявки в магазине –

$$T_{смо} = T_{оч} + T_{осб}; \; T^1{}_{смо} = 1{,}26 \text{ мин}; \; T^2{}_{смо} = 2{,}2 \text{ мин}; \; T^3{}_{смо} = 8{,}69 \text{ мин};$$

коэффициент занятости каналов –

$$K_з = \frac{\overline{n}_з}{n} = \frac{\rho}{n}; \;\; K^1_з = 1{,}13/2 = 0{,}56; \;\; K^2_з = 0{,}83; \;\; K^3_з = 0{,}95.$$

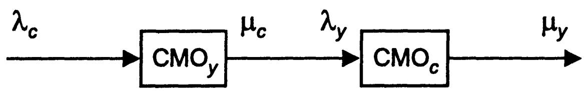
Интенсивность входного потока влияет на все характеристики СМО, доля времени простоя уменьшается до 2,5%, вероятность образования очереди увеличивается до 0,86, среднее число покупателей в очереди увеличивается до 17 человек, что уже недопустимо, поскольку потенциальные покупатели будут уходить к конкурентам, что в конечном итоге приведет к уменьшению длины очереди и снижению экономических показателей, поэтому необходимо ориентироваться на покупателей и стремиться обслужить всех путем введения дополнительного кассового аппарата после обеда и в субботние, и воскресные дни, ориентируясь на режим работы с длиной очереди в три покупателя.

Контрольные вопросы

1. Зачем нужны характеристики СМО?
2. Как пользоваться характеристиками СМО с отказами в коммерческой деятельности?
3. Как применять характеристики СМО с ожиданием в коммерческой деятельности?
4. Как аргументировать построение СМО с ограничением на длину очереди в коммерческой деятельности?
5. Каким образом можно оценить свою деятельность с помощью характеристик СМО?
6. Как можно провести оценку работы вашего руководителя на основе характеристик СМО?
7. Проведите оценку работы характеристиками СМО минимаркета, книжного киоска или любого другого торгового предприятия.
8. Проведите оценку согласованности взаимодействия студентов в группе с помощью характеристик СМО в процессе выполнения фрагментов учебного процесса: выполнения курсовых работ, подготовки и сдачи зачетов, экзаменов.
9. Дайте оценку взаимодействия членов вашей семьи утром характеристиками СМО.

6.6. Анализ системы массового обслуживания коммерческого предприятия

Одной из важных задач коммерческой деятельности является рациональная организация торгово-технологического процесса массового обслуживания, например в универсаме. В частности, определение мощности кассового узла торгового предприятия является непростой задачей. Такие экономико-организационные показатели, как нагрузка товарооборота на 1 м^2 торговой площади, пропускная способность предприятия, время пребывания покупателей в магазине, а также показатели уровня технологического решения торгового зала: соотношение площадей зон самообслуживания и расчетного узла, коэффициенты установочной и выставочной площадей, во многом определяются пропускной способностью кассового узла. В этом случае пропускную способность торгового зала можно рассматривать как пропускную способность двух зон (фаз) обслуживания: зоны самообслуживания и зоны расчетного узла (рис. 6.6.1).



λ_c – интенсивность входного потока покупателей;

μ_c – интенсивность прохода покупателей зоны самообслуживания;

λ_y – интенсивность прихода покупателей в расчетный узел;

μ_y – интенсивность потока обслуживания.

Рис. 6.6.1. Модель двухфазной СМО торгового зала универсама

Основная функция расчетного узла состоит в обеспечении высокой пропускной способности покупателей в торговом зале и создании комфортного обслуживания покупателей. Факторы, влияющие на пропускную способность расчетного узла, можно разделить на две группы:

1) экономико-организационные факторы: система материальной ответственности в универсаме; средняя стоимость и структура одной покупки;

2) организационная структура кассового узла;

3) технико-технологические факторы: применяемые типы кассовых аппаратов и кассовых кабин; применяемая контролером-кассиром технология обслуживания покупателей; соответствие мощности кассового узла интенсивности покупательских потоков.

Из перечисленных групп факторов наибольшее влияние оказывают организационное построение кассового узла и соответствие мощности кассового узла интенсивности покупательских потоков.

Рассмотрим обе фазы системы обслуживания:

1) выбор покупателями товаров в зоне самообслуживания;

2) обслуживание покупателей в зоне расчетного узла. Входящий поток покупателей попадает в фазу самообслуживания, и покупатель самостоятельно отбирает нужные ему товарные единицы, формируя их в единую покупку. Причем время этой фазы зависит от того, как взаиморазмещены товарные зоны, какой фронт они имеют, сколько времени тратит покупатель на выбор конкретного товара, какова структура покупки и т.д.

Выходящий поток покупателей из зоны самообслуживания μ_c одновременно является входящим потоком λ_y в зону кассового узла, который последовательно включает ожидание покупателя в очереди и затем обслуживание его контролером-кассиром. Кассовый узел можно рассматривать как систему обслуживания с потерями или как систему обслуживания с ожиданием.

Однако ни первая, ни вторая рассмотренные системы не позволяют реально описать процесс обслуживания в кассовом узле универсама по следующим причинам:

в первом варианте кассовый узел, мощность которого будет рассчитана на систему с потерями, требует значительных как капитальных вложений, так и текущих затрат на содержание контролеров-кассиров;

во втором варианте кассовый узел, мощность которого будет рассчитана на систему с ожиданиями, приводит к большим затратам времени покупателей в ожидании обслуживания. При этом в часы пик зона расчетного узла «переполняется» и очередь покупателей «перетекает» в зону самообслуживания, что нарушает нормальные условия для выбора товара другими покупателями.

В связи с этим целесообразно рассматривать вторую фазу обслуживания как систему с ограниченной длиной очереди, промежуточную между системой с ожиданием и системой с потерями. При этом предполагается, что одновременно в системе могут находиться не более L, причем $L = n + m$, где n – количество обслуживаемых клиентов в кассах, m – количество покупателей, стоящих в очереди, причем любая $m + 1$ – заявка покидает систему необслуженной.

Это условие позволяет, с одной стороны, ограничить площадь зоны расчетного узла с учетом максимально допустимой длины очереди, а с другой – ввести ограничение на время ожидания покупателями обслуживания в кассовом узле, т.е. учитывать издержки потребления покупателей.

Правомерность постановки задачи в таком виде подтверждается проведенными обследованиями потоков покупателей в универсамах, результаты которых приведены в табл. 6.6.1, анализ

Таблица 6.6.1

Часы работы	День недели								
	пятница			суббота			воскресенье		
	очередь, $L_{оч}$	количество покупателей без покупок		очередь, $L_{оч}$	количество покупателей без покупок		очередь, $L_{оч}$	количество покупателей без покупок	
		чел.	%		чел.	%		чел.	%
с 9 до 10	2	38	5	5	60	5,4	7	64	4,2
с 10 до 11	3	44	5,3	5	67	5	6	62	3,7
с 11 до 12	3	54	6,5	4	60	5,8	7	121	8,8
с 12 до 13	2	43	4,9	4	63	5,5	8	156	10
с 14 до 15	2	48	5,5	6	79	6,7	7	125	6,5
с 15 до 16	3	61	7,3	6	97	6,4	5	85	7,2
с 16 до 17	4	77	7,1	8	140	9,7	5	76	6
с 17 до 18	5	91	6,8	7	92	8,4	4	83	7,2
с 18 до 19	5	130	7,3	6	88	5,9	7	132	8
с 19 до 20	6	105	7,6	6	77	6			
с 20 до 21	6	58	7	5	39	4,4			
Итого		749	6,5		862	6,3		904	4,5

которых выявил тесную связь между средней длиной очереди в кассовом узле и количеством покупателей, не совершивших покупок.

В организации работы кассового узла универсама имеется еще одна важная особенность, которая значительно влияет на его пропускную способность: наличие экспресс-касс (одной-двух покупок). Изучение структуры потока покупателей в универсамах по типу кассового обслуживания показывает, что поток обслуженных через экспресс-кассы достигает 34,5%, а их товарооборот составляет 12,9 % (табл. 6.6.2).

Таблица 6.6.2

Дни недели	Потоки покупателей, чел.			Товарооборот		
	всего	по экспресс-кассам	% к дневному потоку	всего	по экспресс-кассам	% к дневному товарообороту
Летний период						
Понедельник	11182	3856	34,5	39669,2	3128,39	7,9
Вторник	10207	1627	15,9	38526,6	1842,25	4,8
Среда	10175	2435	24	33945	2047,37	6
Четверг	10318	2202	21,3	36355,6	1778,9	4,9
Пятница	11377	2469	21,7	43250,9	5572,46	12,9
Суббота	10962	1561	14,2	39873	1307,62	3,3
Воскресенье	10894	2043	18,8	35237,6	1883,38	5,1
Зимний период						
Понедельник	10269	1857	18,1	37121,6	2429.73	6,5
Вторник	10784	1665	15,4	38460,9	1950,41	5,1
Среда	11167	3729	33,4	39440,3	4912,99	12,4
Четверг	11521	2451	21,3	40000,7	3764,58	9,4
Пятница	11485	1878	16,4	43669,5	2900,73	6,6
Суббота	13689	2498	18,2	52336,9	4752,77	9,1
Воскресенье	13436	4471	33,3	47679,9	6051,93	12,7

Для окончательного построения математической модели процесса обслуживания с учетом перечисленных выше факторов необходимо определить функции распределения случайных величин, а также случайные процессы, описывающие входящие и выходящие потоки покупателей:

1) функцию распределения времени покупателей на выбор товаров в зоне самообслуживания;

2) функцию распределения времени работы контролера-кассира для обычных касс и экспресс-касс;

3) случайный процесс, описывающий входящий поток покупателей в первую фазу обслуживания;

4) случайный процесс, описывающий входящий поток во вторую фазу обслуживания для обычных касс и экспресс-касс.

Моделями для расчета характеристик системы массового обслуживания удобно пользоваться в том случае, если входящий поток требований в систему обслуживания является простейшим пуассоновским потоком, а время обслуживания заявок распределено по экспоненциальному закону.

Исследование потока покупателей в зоне кассового узла показало, что для него может быть принят пуассоновский поток.

Функция распределения времени обслуживания покупателей контролерами-кассирами является экспоненциальной, такое допущение не приводит к большим ошибкам.

Безусловный интерес представляет анализ характеристик обслуживания потока покупателей в кассовом узле универсама, рассчитанных для трех систем: с потерями, с ожиданием и смешанного типа.

Расчеты параметров процесса обслуживания покупателей в кассовом узле проведены для коммерческого предприятия торговой площадью $S = 650$ м^2 на основе следующих данных.

Целевая функция может быть записана в общем виде связи (критерия) выручки от реализации от характеристик СМО:

$$B = f\{k, \lambda_c, \bar{t}_{обс}, \mu_C, \rho_C, \lambda_k, \mu_k, \rho_k, n_k, n_э, m, L_{оч}, T_{оч}, p_о, p_{оч}, S, S_y\} \to \max,$$

где n_k, $n_э$ – кассовый узел состоит из $n_k = 7$ касс обычного типа и $n_э = 2$ экспресс-касс, всего $n = 9$;

μ_k – интенсивность обслуживания покупателей в зоне обычных касс – 0,823 чел./мин;

ρ_k – интенсивность нагрузки кассовых аппаратов в зоне обычных касс – 6,65, $\rho_K = \dfrac{\lambda_K}{\mu_K}$;

$\mu_э$ – интенсивность обслуживания покупателей в зоне экспресс-касс – 2,18 чел./мин;

λ_k – интенсивность входящего потока в зону обычных касс – 5,47 чел./мин;

$\rho_э$ – интенсивность нагрузки кассовых аппаратов в зоне экспресс-касс – 1,63, $\rho_Э = \dfrac{\lambda_Э}{\mu_Э}$;

$\lambda_э$ – интенсивность входящего потока в зону экспресс-касс – 3,55 чел./мин;

m – для модели СМО с ограничением на длину очереди в соответствии с проектируемой зоной кассового узла максимально допустимое число покупателей, стоящих в очереди в одну кассу, принимается равным $m = 10$ покупателей.

Следует заметить, что для получения сравнительно небольших по абсолютной величине значений вероятности потерь заявок p_{n+m} и времени ожидания покупателей в кассовом узле необходимо соблюдать следующие условия: $(\rho_K + \rho_Э) \leq (n_K + n_Э)$.

В табл. 6.6.3 приведены результаты характеристик качества функционирования СМО в зоне расчетного узла.

Расчеты проведены для наиболее напряженного периода времени рабочего дня с 17 до 21 часа. Именно на этот период, как показали результаты обследований, приходится около 50% однодневного потока покупателей.

Из приведенных данных в табл. 6.6.3 следует, что если бы для расчета была выбрана:

1) модель с отказами, то 22,6% потока покупателей, обслуживаемых обычными кассами, и соответственно 33,6% потока покупателей, обслуживаемых экспресс-кассами, должны были бы уйти без покупок;

2) модель с ожиданием, то потерь заявок в расчетном узле не должно бы быть;

Таблица 6.6.3

Характеристики системы массового обслуживания покупателей в зоне расчетного узла

Тип кассы	Количество касс в узле, n	Тип СМО	Характеристики СМО		
			среднее число занятых касс, $\overline{n}_3$	среднее время ожидания обслуживания, $T_{оч}$	вероятность потери заявок, P_{n+m}
Обычные кассы	7	С отказами	5,15	0	0,226
		с ожиданием	6,65	3	0
		с ограничением на длину очереди	6,7	2,66	0,0012
Экспресс-кассы	2	С отказами	1,08	0	0,336
		с ожиданием	1,17	0,91	0
		с ограничением на длину очереди	1,6	0,84	0,018

3) модель с ограничением на длину очереди, то только 0,12% потока покупателей, обслуживаемых обычными кассами, и 1,8% потока покупателей, обслуживаемых экспресс-кассами, покинут торговый зал без покупок. Следовательно, модель с ограничением на длину очереди позволяет более точно и реально описать процесс обслуживания покупателей в зоне кассового узла.

Интерес представляет сравнительный расчет мощности кассового узла как с учетом экспресс-касс, так и без них. В табл. 6.6.4 приведены характеристики системы обслуживания кассового узла трех типоразмеров универсамов, рассчитанные по моделям для СМО с ограничением на длину очереди на наиболее напряженный период рабочего дня с 17 до 21 часа.

Анализ данных этой таблицы показывает, что неучет фактора «Структура потока покупателей по типу кассового обслуживания» на стадии технологического проектирования может привести к увеличению зоны расчетного узла на 22—33%, а отсюда соот-

Таблица 6.6.4

№ п/п	Характеристики СМО	Единица измерения	Обозначение	Показатели, рассчитанные по типам универсамов торговой площади, кв. м								
				без экспресс-касс			с учетом экспресс-касс					
				650	1000	2000	650		1000		2000	
							обычные кассы	экспресс-кассы	обычные кассы	экспресс-кассы	обычные кассы	экспресс-кассы
1	Количество покупателей	чел.	k	2310	3340	6680	1460	850	2040	1300	4080	2600
2	Интенсивность входящего потока	чел./мин	λ	9,64	13,9	27,9	6,08	3,55	8,55	5,41	17,1	10,8
3	Интенсивность обслуживания	чел./мин	μ	0,823	0,823	0,823	0,823	2,18	0,823	2,18	0,823	2,18
4	Интенсивность нагрузки	—	ρ	11,7	16,95	33,8	6,65	1,63	10,35	2,48	20,7	4,95
5	Количество кассовых аппаратов	шт.	n	12	17	34	7	2	11	3	21	5
6	Общее количество касс расчетного узла	шт.	Σn	12	17	34	9		14		26	

ветственно и к уменьшению установочных и выставочных площадей торгово-технологического оборудования и товарной массы, размещаемой в торговом зале.

Проблема определения мощности кассового узла представляет собой цепочку взаимосвязанных характеристик. Так, увеличение его мощности сокращает время покупателей на ожидание обслуживания, уменьшает вероятность потери требований и, следовательно, потери товарооборота. Наряду с этим необходимо соответственно уменьшить зону самообслуживания, фронт торгово-технологического оборудования, товарную массу в торговом зале. В то же время увеличиваются затраты на заработную плату контролеров-кассиров и оборудование дополнительных рабочих мест. Поэтому необходимо проводить оптимизационные расчеты. Рассмотрим характеристики системы обслуживания в кассовом узле универсама торговой площадью 650 м^2, рассчитанные по моделям СМО с ограниченной длиной очереди для различных мощностей его кассового узла в табл. 6.6.5.

Таблица 6.6.5

Тип кассового обслуживания	Количество кассовых аппаратов в узле, n, шт.	Характеристики системы обслуживания		Средняя выручка за 1 ч, руб.	Средняя потеря выручки за 1 ч, руб.	Число покупателей в зоне расчетного узла	Площадь зоны расчетного узла, Sy, м^2	Удельный вес площади зоны узла 650/Sy
		среднее время ожидания, $T_{оч}$, мин	вероятность потери заявок					
Зоны обычных касс	1	1,79	0,85	205	1180	90	15	0,023
	2	3,58	0,7	415	970	360	30	0,046
	3	5,33	0,55	623	760	800	45	0,069
	4	7,08	0,4	831	554	1420	60	0,1
	5	8,58	0,25	1039	346	2150	75	0,12
	6	9,29	0,1	1371,1	13,9	2880	90	0,14
	7	2,66	0,001	1384,8	0,13	890	105	0,17
	8	0,48	0	1385	0	267	120	0,19
	9	0,16	0	1385	0	53,5	135	0,21
	10	0,06	0	1385	0	20	150	0,23
Зоны экспресс-касс	1	2,38	0,39	117	75	260	15	0,02
	2	0,84	0,002	188	3,8	179	30	0,05
	3	0,1	0	192	0	21,3	45	0,07

На основе анализа данных табл. 6.6.5 можно сделать вывод, что по мере увеличения количества касс время ожидания покупателей в очереди растет, а затем после определенного момента резко падает. Характер изменения графика времени ожидания покупателей $T_{оч} = f(n)$ понятен, если параллельно рассматривать изменение вероятности потери требований $p_{n+m} = f(n)$. Вполне очевидно, что когда мощность кассового узла чрезмерно мала, то более 85% покупателей будут уходить необслуженными, а оставшаяся часть покупателей будет обслужена за очень короткое время. Чем больше мощность кассового узла, тем вероятность потери требований будет уменьшаться и соответственно тем большее число покупателей будет дожидаться своего обслуживания, а значит, и время их ожидания в очереди соответственно будет расти. После того как расчетный узел превысит оптимальную мощность, время ожидания и вероятность потерь будут резко уменьшаться.

Для универсама торговой площадью 650 м^2 этот предел для зоны обычных касс лежит между 6 и 7 кассовыми аппаратами. При 7 кассовых аппаратах соответственно среднее время ожидания – 2,66 мин, а вероятность потери заявок очень мала — 0,1%. Таким образом, задача состоит в выборе такой мощности кассового узла, которая позволит получить минимальные совокупные затраты на массовое обслуживание покупателей.

В связи с этим следующим этапом решения поставленной задачи является оптимизация мощности кассового узла на базе применения моделей СМО разных типов с учетом совокупных затрат и перечисленных выше факторов.

Задачи

1. На оптовую базу прибывают автомашины с непродовольственными товарами. Поток простейший и поступает с интенсивностью 8 автомашин в час. На территории базы могут одновременно находиться не более 5 автомашин. На базе имеются 2 бригады грузчиков, которые разгружают автомашины. Среднее время разгрузки одной машины каждой бригадой составляет 1 ч.

Определите основные показатели СМО оптовой базы и разработайте рекомендации по улучшению ее работы.

2. Универсам получает ранние овощи и зелень из теплиц пригородного совхоза. В среднем прибывают с товаром 3 автомашины «Газель» в день. Подсобные помещения и оборудование для подготовки овощей к продаже позволяют обработать и хранить товар объемом не более 2 автомашин одновременно. В универсаме работают 5 групп фасовщиков, каждая из которых может обработать товар с одной автомашины в среднем в течение 0,5 дня.

Определите вероятность обслуживания приходящей автомашины $P_{обс}$, какова должна быть емкость подсобных помещений, чтобы вероятность обслуживания была бы больше или равна заданной величине $P^{*}_{обс} \geq 0{,}97$.

3. В магазин самообслуживания поступает пуассоновский поток покупателей с интенсивностью 120 человек в час. Средняя продолжительность обслуживания одного покупателя на расчетном узле составляет 1,5 мин. Уровень суммарных потерь связан с простоем среднего числа свободных контролеров-кассиров и пребыванием среднего числа покупателей в очереди.

Постройте график зависимости суммы среднего числа свободных контролеров-кассиров – $n_{св}$ и среднего $L_{оч}$ числа покупателей в очереди в зависимости от числа контролеров-кассиров n, $(L_{оч} + \bar{n}_{св}) = f(n)$.

Определите оптимальное число контролеров-кассиров n°, при котором суммарные потери будут минимальными.

4. В магазин самообслуживания поступает пуассоновский поток с интенсивностью 200 покупателей в час. В течение дня их обслуживают 3 контролера-кассира с интенсивностью 90 покупателей в час. Интенсивность входного потока покупателей в часы пик возрастает до величины 400 покупателей/ч, а в часы спада достигает величины 100 покупателей/ч.

Определите вероятность образования очереди в магазине $P_{оч}$ и среднюю длину очереди в течение дня, а затем необходимое число контролеров-кассиров в часы пик и часы спада, обеспечивающих такую же длину очереди $L_{оч}$ и вероятность ее образования $P_{оч}$, как и в номинальном режиме.

5. В торговом павильоне покупателей обслуживает один продавец. Площадь павильона составляет 24 м^2, причем 10 м^2 приходится на торговый зал, вместимость которого ограничена. Поэтому если очередь на обслуживание составляет 10 человек, то потенциальный покупатель туда не входит, что свидетельствует об отказе в обслуживании и, как следствие, снижении товарооборота и ухудшении других экономических показателей работы коммерческого предприятия.

Дайте оценку СМО и определите рекомендации по созданию оптимального режима работы, если интенсивность прихода покупателей составляет 60 человек в час, а среднее время обслуживания продавцом одного покупателя – 3 мин.

6. Мини-маркет с одним контролером-кассиром обслуживает покупателей, входящий поток которых подчиняется закону Пуассона с параметром 20 покупателей/ч. Время обслуживания подчиняется показательному закону с параметром 25 покупателей/ч.

Определите вероятность простоя контролера-кассира, среднюю длину очереди, среднее число покупателей в мини-маркете, среднее время ожидания обслуживания, среднее время пребывания покупателей в мини-маркете и дайте оценку его работы.

7. В магазине самообслуживания 6 контролеров-кассиров. Входящий поток покупателей подчиняется закону Пуассона с интенсивностью 120 чел./ч. Один кассир может обслужить 40 человек в час.

Определите вероятность, долю времени простоя кассира, среднее число покупателей в очереди, среднее время ожидания, среднее число занятых кассиров и среднее число кассиров, свободных от обслуживания; дайте оценку работы СМО.

8. Среднее число покупателей, поступающих на узел расчета в магазин самообслуживания, 100 человек в час. Кассир может обслужить 60 человек в час.

Определите, какое число кассиров необходимо для того, чтобы вероятность появления очереди не превысила 0,60.

9. В магазине самообслуживания планируется разместить расчетный узел с кассами сканирования для приема от покупателей денег за товары. По прогнозам, интенсивность входного потока покупателей составляет 8 чел./мин. Интенсивность обслуживания должна составлять 4 чел./мин. Допустимая длина очереди не должна превышать 7 человек. Определите, какое минимальное количество кассовых аппаратов необходимо установить, чтобы выполнялось условие стационарного режима работы системы, и рассчитайте основные показатели работы СМО.

10. Отделение фирмы «Автолайн» обслуживает пассажиров по маршруту и насчитывает 12 такси вместимостью 12 человек. В среднем каждая машина ломается раз в 5 дней. Приведите аргументы против того, что поток поломок машин в отделении фирмы является пуассоновским.

11. Используя терминологию и модели теории массового обслуживания, опишите реальные объекты, процессы и состояние покупателей в торговле, автолюбителей на дорогах, потоки пассажиров в метро, на вокзалах, аэропортах, больных на приеме к врачам, населения в социально-бытовых учреждениях.

12. На АТС поступают заявки на междугородние переговоры. В среднем за 1 ч поступает 15 заявок. Приведите аргументы в пользу того, что поток заявок на телефонную станцию является пуассоновским. Найдите среднее число заявок, поступающих за сутки, среднее время между появлениями заявок. На телефонной станции появляются сбои в работе, если за полчаса на нее поступит более 50 заявок. Найдите вероятность сбоя станции.

13. Миша и Виктор занимаются починкой автомобилей. Миша выполняет кузовной ремонт, Виктор – красит, причем друзья подряжаются только на работу, где одновременно необходимы и ремонт кузова, и покраска. Клиентура у мастеров непостоянная, в среднем по одному клиенту в 2 недели. Среднее время, необходимое для кузовного ремонта, –10 дней, для покраски – 5 дней. Если Миша занят кузовными работами, то клиент уходит к конкурентам. Постройте стохастический граф марковского процесса, описывающего работу предпринимателей. Запишите систему дифференциальных уравнений Колмогорова для марковского процесса; систему алгебраических уравнений и вычислите финальные распределения вероятностей.

14. Торговая фирма планирует выполнять заказы на приобретение товаров по телефону, для чего необходимо установить соответствующую мини-АТС с несколькими телефонными аппаратами. Если заказ поступает, когда все линии заняты, то клиент получает отказ. Если в момент поступления заявки хотя бы одна линия свободна, то производится переключение на эту линию и оформляется заказ. Интенсивность входящего потока заявок составляет 30 заказов в час. Длительность же оформления заказа в среднем равна 5 мин.

Определите оптимальное число каналов обслуживания, чтобы обеспечить условие стационарной работы СМО.

15. Коммерческая фирма отпускает винно-водочную продукцию клиентам. Погрузку на машины осуществляют 3 бригады грузчиков, каждая из которых состоит из 4 человек. Дебаркадер и склад вмещают одновременно 6 машин. Если на площадке находятся 6 машин, то вновь прибывшая машина не обслуживается. Интенсивность входящего потока машин составляет 3 автомашины в час. Интенсивность погрузки составляет 1,5 машины в час.

Дайте оценку работы СМО и предложите вариант ее реорганизации.

16. На станцию технического обслуживания в кооперативном гараже по ремонту отечественных автомобилей волжского автозавода ВАЗ поступает простейший поток заявок с интенсивностью один автомобиль за 2 ч. Во дворе в очереди может находиться не более трех автомашин. Среднее время ремонта – 2 ч.

Дайте оценку работы СМО и разработайте рекомендации по улучшению обслуживания.

17. На рис. 6.6.2 представлена столбиковая диаграмма регистрации потока покупателей на входе супермаркета.

Определите необходимое количество кассовых аппаратов в расчетном узле, если хронометраж времени, затраченного покупателями на операции по приобретению товаров, представлен в табл. 6.6.6, а в табл. 6.6.7 представлены результаты проведенного хронометража количества покупок и времени расчета одним контролером-кассиром 120 покупателей в течение 10 мин работы по кассе № 2 универсама.

18. В табл. 6.6.8 представлены результаты хронометража, проведенного в течение недели, числа покупателей и выручки от ре-

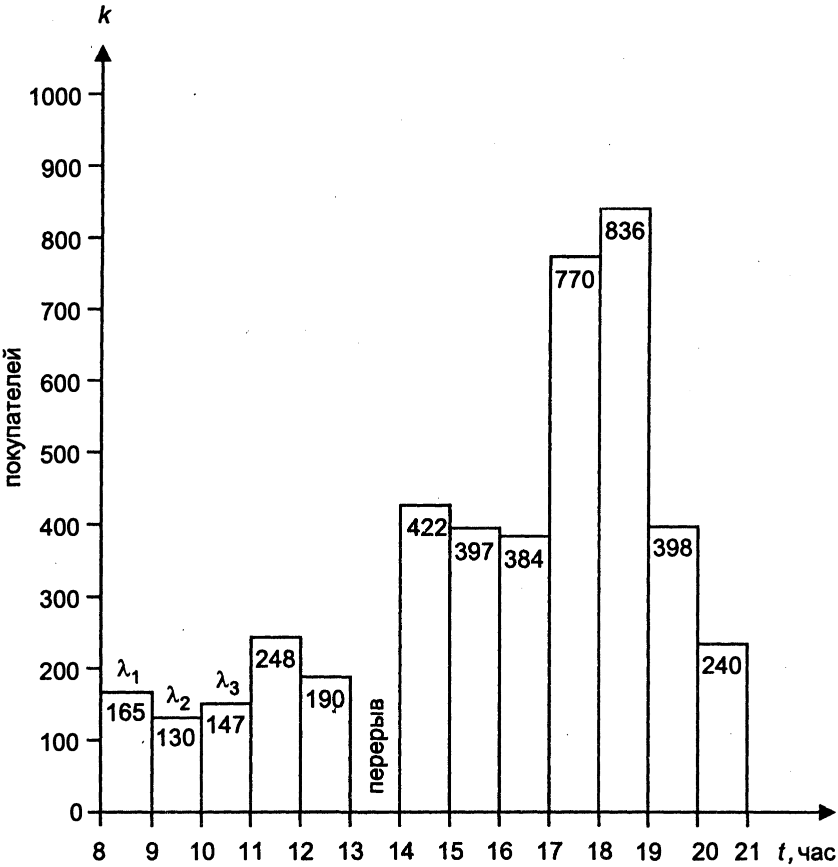


Рис. 6.6.2. Распределение потока покупателей в течение рабочего дня

ализации в универсаме по дням и часам работы. Определите количество кассовых аппаратов в расчетном узле и постройте график выхода на работу контролеров-кассиров, используя данные задачи 17.

19. В табл. 6.6.9 представлены результаты проведенного хронометража количества покупок по часам и дням недели.

Определите количество кассовых аппаратов в расчетном узле и постройте график выхода на работу кассиров с учетом данных задач 17 и 18.

Таблица 6.6.6

Время, затраченное покупателем на операции в супермаркете

Время			
Операции	минимальное	среднее	максимальное
Поиск-выбор	3 мин	6 мин 5 с	12 мин 2 с
Очередь	2 мин 32 с	4 мин 20 с	7 мин 10 с
Обслуживание-расчет	28 с	35 с	48 с
Пребывание в магазине	6 мин	11 мин	20 мин

Таблица 6.6.7

Распределение количества покупок и времени расчета покупателей с 16^{20} до 16^{30} по кассе № 2

Количество покупок	Время расчета, сек.	Количество покупок	Время расчета, сек.
3	19	1	4
2	12	2	10
3	16	3	14
3	10	3	10
3	13	4	13
1	3	2	6
5	28	2	5
3	10	7	38
9	40	5	30
5	37	5	26
3	7	6	29
2	5	7	40
4	14	8	50
6	30	5	26
2	7	30 покупателей (120 покупок)	600
7	38		

Таблица 6.6.8

Распределение потока покупателей и выручки от продажи товаров по часам и дням недели

Часы работы	Понедельник		Вторник		Среда		Четверг		Пятница		Суббота		Воскресенье	
	выручка	число покупателей	выручка	число покупателей	выручка	число покупателей	выручка	число покупателей	выручка	число покупателей	выручка	число покупателей	выручка	число покупателей
8 – 9	238-10	130	346-29	198	193-19	114	456-20	241	290-29	149	407-76	149	141-17	86
9 – 10	202-21	147	310-14	151	160-16	88	302-17	163	475-17	243	596-81	301	213-33	104
10 – 11	280-05	241	524-06	259	391-11	236	470-06	247	343-04	149	683-14	344	350-29	180
11 – 12	470-15	260	796-02	291	584-04	311	653-70	372	526-07	281	972-37	437	427-19	203
12 – 13	591-00	271	827-01	312	220-00	162	521-06	261	275-09	113	1203-09	496	682-11	294
13 – 14	Перерыв на обед													
14 – 15	620-00	251	1208-21	504	1047-07	539	760-28	329	511-41	198	871-26	329	796-23	367
15 – 16	908-02	342	994-19	410	821-03	389	1275-13	493	873-19	449	603-13	298	821-08	399
16 – 17	870-01	390	773-08	304	739-00	314	1284-02	502	1240-28	481	1027-41	507	1017-26	507
17 – 18	1221-14	416	1487-12	547	1948-11	975	1350-41	684	1474-09	697	1164-03	614	854-21	310
18 – 19	1489-24	513	1224-05	401	1859-00	1003	1435-00	714	1116-07	949	986-07	402		
19 – 20	530-08	303	940-03	387	1602-01	796	802-04	398	503-03	242	456-02	216		
20 – 21	295-04	107	767-02	268	974-02	407	406-11	209	418-04	196				

Таблица 6.6.9

Часы работы	Понедельник		Вторник		Среда		Четверг		Пятница		Суббота	
	количество покупок	сумма, руб.	количество покупок	сумма, руб.	количество покупок	сумма, руб.	количество покупок	сумма, руб.	количество покупок	сумма, руб.	количество покупок	сумма, руб.
9 – 10	742	6883	671	7747	938	12409	671	9110	833	7229	616	13566
10 – 11	544	10147	632	9586	634	12963	528	19618	643	8781	643	9394
11 – 12	546	13487	768	13574	766	12927	792	11926	887	11990	743	11647
12 – 13	1186	17564	1228	18920	1162	16597	1147	13682	1023	11876	835	12531
13 – 14	11041	18775	1129	18026	1167	18439	1035	15629	1187	12864	1276	22042
14 – 15	932	15963	1040	17580	1191	18666	1063	14065	1192	16939	1444	20962
15 – 16	1028	16462	989	16823	1158	16122	1151	18510	1329	18298	1498	24322
16 – 17	1004	18823	951	15043	1214	17979	1178	19548	1297	16331	745	24293
17 – 18	1205	17139	883	12622	1259	15181	1280	16542	1316	17630	1672	19094
18 – 19	849	13769	752	7442	1059	14608	829	13344	1088	14594	1505	18318
19 – 20	355	5713	493	10737	632	15185	440	11390	665	8627	1221	10170
20 – 21	91	2575	96	4305	704	3812	115	2626	123	2394	1169	2681
Σ	9523	154409	9830	152882	11341	174888	10226	156141	11613	147733	13838	188934

За неделю количество покупок – 66 371. Средняя цена покупки – 14 р. 70 к. На сумму 979 879 руб.

ГЛАВА 7

МОДЕЛИ ФИНАНСОВО-КОММЕРЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

В любых коммерческих операциях финансовые расчеты практически всегда привязываются к конкретным моментам времени (датам). Причем фактор времени играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм, и поэтому в коммерческих контрактах обязательно фиксируются сроки, даты, периодичность поступления товаров, денежных средств. Необходимость учета этого фактора определяется сущностью самого процесса коммерческой деятельности, финансирования, кредитования и связана с постулатом неравноценности денег в разные моменты времени. Этот постулат верен даже при отсутствии инфляции, поскольку в любой момент есть организации или частные лица (заемщики), нуждающиеся в кредитах на тот или иной период и готовые платить за такой заем (ссуду) определенную сумму, называемую процентами.

Следовательно, необходимо рассмотреть решение задачи использования ограниченных ресурсов во времени и детерминированные модели описания финансовых операций, которые полностью определены в будущем.

Постулат неравноценности денег, связанный со временем, ставит под сомнение правомерность бухгалтерских операций суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени поступления денежных средств, особенно при анализе взаиморасчетов и управления коммерческой деятельностью на длительные периоды.

Фактор времени в финансовой сфере учитывается с помощью процентной ставки как отношение суммы процентных денег, выплачиваемой за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды. Интервал, к которому приурочена процентная ставка, называют периодом начисления. Сумму процентных платежей определяют исходя из размера ссуды, общего ее срока и уровня процентной ставки. Начисление процентов чаще всего осуществляется дискретно, а в некоторых случаях и в виде непрерывных процентов.

7.1. Модели развития операций по схеме простых процентов

В условиях рыночной экономики существуют различные варианты инвестирования. В простейшем случае кредитор и заемщик договариваются о величине кредита P (первоначальная денежная сумма), размере годовой процентной ставки ($i\%$), сроке кредита и длительности периода начисления процентов. Математически такая операция может быть представлена в виде сетевой модели простых процентов. По этой модели происходит накопление общей суммы долга S за счет периодического, например ежегодного, начисления процентных денег (I_r). В соответствии с этим наращенная сумма будет равна:

к концу первого года –

$$S_1 = P + I_r;$$

к концу второго года –

$$S_2 = S_1 + I_r = P + 2 \cdot I_r;$$

к концу третьего года –

$$S_3 = S_2 + I_r = P + 3 \cdot I_r;$$

к концу n-го года –

$$S_n = P + n \cdot I_r$$

Таким образом, накопление суммы происходит по схеме простых процентов и образует возрастающую числовую последовательность:

$$S_0, S_1, S_2, S_3, ..., S_n,$$

которая представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом $a_0 = S_0$ и разностью прогрессии:

$$d = S_2 - S_1 = I_r$$

Таким образом, математической моделью, отображающей изменение капитала по схеме простых процентов, является арифметическая прогрессия, в соответствии с которой любой ее член находится по формуле

$$S_n = a_0 + d \cdot n.$$

Процентная сумма определяется по формуле

$$I = P \cdot \frac{i\%}{100\%} = P \cdot i,$$

где i – относительная величина годовой ставки ссудного процента:

$$i = \frac{i\%}{100\%}.$$

На этом основании модель накопления капитала по схеме простых процентов принимает вид

$$S = P + n \cdot P \cdot i = P \cdot (1 + n \cdot i).$$

Следует заметить, что срок ссуды n может быть как целым, так и дробным положительным числом

$$n = \frac{t}{K},$$

где t – срок ссуды в днях;

K – количество дней в году (360, 365, 366).

Тогда приведенную модель можно записать в другом виде:

$$S = P\left(1 + i\frac{t}{K}\right).$$

В зависимости от содержания поставленной задачи, пользуясь этой моделью, можно определять различные показатели операции:

величину первоначальной (математическое дисконтирование) суммы –

$$P = \frac{S}{1+ni} = \frac{S}{1+i\cdot\dfrac{t}{K}};$$

относительную величину процентной ставки –

$$i = \frac{S-P}{P \cdot n} = \left(\frac{S-P}{P}\right) \cdot \frac{K}{t};$$

продолжительность года –

$$K = \frac{i \cdot P \cdot t}{S-P};$$

срок ссуды (лет) –

$$n = \frac{S-P}{i \cdot P};$$

срок ссуды (дней) –

$$t = K \cdot \left(\frac{S-P}{P \cdot i}\right);$$

коэффициент наращения по простой процентной ставке –

$$k_{н} = \frac{S}{P} = (1 + i \cdot n).$$

Если на последовательных интервалах начисления процентов $n_1, n_2, n_3, ..., n_m$ устанавливаются разные ставки процентов $i_1, i_2, i_3, ..., i_m$, сумма процентных денег составит
в конце первого интервала: $I_1 = Pn_1i_1$;
в конце второго интервала: $I_2 = Pn_2i_2$;
в конце m-го интервала: $I_m = Pn_mi_m$.

На этом основании за весь срок договора наращенная сумма будет равна:

$$S = P + I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_m =$$
$$= P + P \cdot n_1 \cdot i_1 + P \cdot n_2 \cdot i_2 + P \cdot n_3 \cdot i_3 + ... + P \cdot n_m \cdot i_m$$

$$S = P\left(1 + \sum_{j=1}^{m} n_j i_j\right) = P \cdot k_{н}.$$

Следовательно, коэффициент наращения равен:

$$k_{\text{н}} = 1 + \sum_{j=1}^{m} n_j i_j .$$

Следует заметить, что в этом случае проценты начисляются всегда от величины первоначальной суммы P.

В банковской практике различных стран срок в днях и расчетное количество дней в году при начислении процентов определяются по-разному. При коммерческой (германской) практике подсчет числа дней основывается на длительности года в 360 дней и месяцев в 30 дней. При французской практике длительность года принимается равной 360 дням, а количество дней в месяце берется равным фактической календарной длительности 28, 29, 30 или 31 день соответственно. При английской практике длительность года — 365 дней и длительность месяцев соответствует фактической длительности по календарю. Для удобства выполнения расчетов пользуются сквозной нумерацией всех дней в году, представленной в табл. 7.1.1.

Пример 1. Определите количество дней для начисления процентов при различной практике начисления, если вклад до востребования был размещен с 12.01 по 15.03.

Решение. 1. При коммерческой практике количество дней для начисления процентов будет равно:

20 (количество дней хранения вклада в *январе) + 30 (в феврале) +15 (в марте) – 1* (день приема и день выдачи вклада считаются за один день) = *64* дня.

2. При французской и английской практике количество дней для начисления процентов составит:

20 + 28 + 15 – 1 = 62 дня (меньше, чем при коммерческой практике).

Пример 2. Вклад 300 тыс. руб. был положен в банк 20.05 при ставке 60% годовых. С 1 сентября банк снизил ставку по вкладам до 30% годовых. 25 октября вклад был закрыт.

Определите сумму начисленных процентов при английской, коммерческой и французской практике начисления.

Таблица 7.1.1

Порядковые номера дней года

День	Месяц											
	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Решение. 1. При коммерческой практике количество дней для начисления процентов по ставке 60% годовых равно: $t_{г1} = 12 + 30 + 30 + 30 + 1 - 1 = 102$ дням, по ставке 30% годовых: $t_{г2} = 30 + 25 - 1 = 54$ дням.

Сумма начисленных процентов составит:

$$I = 300\,000\left(\frac{102}{360}\cdot 0{,}6 + \frac{54}{360}\cdot 0{,}3\right) = 64\,500 \text{ руб.}$$

2. При французской практике количество дней для начисления процентов (табл. 7.1.1) по ставке 60% годовых равно:

$$t_{ф1} = 12 + 30 + 31 + 31 + 1 - 1 = 104 \text{ дням;}$$

по ставке 30% годовых равно:

$$t_{ф2} = 30 + 25 - 1 = 54 \text{ дням.}$$

Сумма начисленных процентов составит:

$$I = 300\,000\left(\frac{104}{360}\cdot 0{,}6 + \frac{54}{360}\cdot 0{,}3\right) = 65\,490 \text{ руб.}$$

3. При английской практике количество дней для начисления процентов (см. табл. 7.1.1) по ставке 60% годовых равно: $t_{a1} = 12 + 30 + 31 + 31 + 1 - 1 = 104$ дням;

по ставке 30% годовых равно: $t_{a2} = 30 + 25 - 1 = 54$ дням.

Сумма начисленных процентов составит:

$$I = 300\,000\left(\frac{104}{365}\cdot 0{,}6 + \frac{54}{365}\cdot 0{,}3\right) = 64\,615 \text{ руб. } 7 \text{ коп.}$$

В кредитных организациях рассматриваются операции банка по начислению и уплате процентов по привлеченным во вклады (депозиты) рублевым денежным средствам физических и юридических лиц, а также полученным межбанковским кредитам. Сроки привлечения банком средств во вклады (депозиты), а также межбанковские кредиты на условиях «овердрафт», «до востребования», «овернайт» – 3,7 и 21 день, 3 месяца. Для выполнения расчетов исходными данными являются процентные ставки банка (ставки привлечения).

По вкладам населения		По депозитам юридических лиц		По межбанковским привлеченным средствам	
срок	% годовых	срок	% годовых	срок	% годовых
До востребования	4	«Овернайт»	18,5 – 18,8[1]	Внутридневной «овердрафт», предоставленный банком	5,5
21 день	15	3 дня	СР – 0,5[1]	Кредит «овернайт»	18,8 – 20,7
3 месяца	22	7 дней	СР + 0,5[2]	Депозит на 7 дней	22,4 – 24,9

[1] Диапазон ставок задан в зависимости от колебаний ставки межбанковского рынка.

[2] Плавающая ставка, равная ставке рефинансирования Банка России плюс (минус) установленный банком процент.

Ставка рефинансирования Банка России в рассматриваемом периоде: по состоянию на 01.07 – 18%; по состоянию на 20.11 – 16%.

Пример 3. Начисление процентов на сумму срочного депозита.

Банк 02.07 принял в межбанковский депозит денежные средства в сумме 80 тыс. руб. сроком на 7 дней по ставке 24,9%.

Полный срок депозита (02.07 – 09.07) – 8 календарных дней (n), период начисления процентов по депозиту (02–08.07.2000) – 7 календарных дней (n – 1). Банк возвращает сумму депозита с начисленными процентами 09.07 в сумме:

$$S = 80\,000 \text{ руб.} \cdot \left(1 + \frac{24{,}9\%}{100\%} \cdot \frac{7 \text{ дней}}{365 \text{ дней}}\right) = 80\,382 \text{ руб. } 03 \text{ коп.}$$

Пример 4. Начисление процентов на сумму вклада «до востребования» по процентной ставке, изменяющейся в течение срока действия договора банковского вклада.

Банк 07.07 заключает с вкладчиком договор банковского вклада на условиях выдачи вклада по первому требованию (вклад «до востребования»). Первоначальная сумма вклада – 78 руб. Процентная ставка – 3%, начисленные проценты не увеличивают сумму основного вклада, выплата процентов осуществляется по первому требованию вкладчика отдельно от суммы вклада.

Вкладчик 30.07 снимает с вклада денежные средства в сумме 46 руб.

Банк 04.08 принимает решение об увеличении начиная с 10.08 процентной ставки по вкладам «до востребования» до 4% .

Вкладчик 03.09 снимает оставшуюся сумму вклада и начисленные за весь период вклада проценты.

Полный срок вклада (07.07 – 03.09) – 59 календарных дней (n), период начисления процентов по вкладу (07.07 – 03.09) – 58 календарных дней (n – 1).

Банк 03.09 возвращает вкладчику остаток вклада в сумме 32 руб. и уплачивает начисленные на этот день проценты в сумме:

$$\left(78 \text{ руб.}\cdot\frac{3\%}{100\%}\cdot\frac{23 \text{ дня}}{365 \text{ дней}}\right)+\left(32 \text{ руб.}\cdot\frac{3\%}{100\%}\cdot\frac{11 \text{ дней}}{365 \text{ дней}}\right)+$$

$$+\left(32 \text{ руб.}\cdot\frac{4\%}{100\%}\cdot\frac{24 \text{ дня}}{365 \text{ дней}}\right)=26 \text{ коп.}$$

Пример 5. Начисление процентов на сумму депозита по плавающей процентной ставке.

17.11 банк привлекает в 7-дневный депозит денежные средства юридического лица (предприятия) в сумме 40 тыс. руб. по плавающей процентной ставке, равной ставке рефинансирования Банка России на момент действия депозита (по состоянию на 17.11 – 18%) плюс 0,5%.

Банк России 19.11 объявляет о снижении начисления с 20.11 ставки рефинансирования с 18 до 16%.

Полный срок депозита (17 – 24.11) – 8 календарных дней (n), период начисления процентов (17 – 23.11) – 7 календарных дней (n – 1).

Банк 24.11 возвращает предприятию сумму депозита и уплачивает начисленные проценты в сумме:

$$\left(40\,000\text{ руб.}\cdot\frac{18{,}5\%}{100\%}\cdot\frac{3\text{ дня}}{365\text{ дней}}\right)+\left(40\,000\text{ руб.}\cdot\frac{16{,}5\%}{100\%}\cdot\frac{4\text{ дня}}{365\text{ дней}}\right)=$$

$$=133\text{ руб. }15\text{ коп.}$$

Пример 6. Начисление процентов на сумму предоставленного внутридневного «овердрафта» в банке.

В соответствии с договором о корреспондентских отношениях банк-корреспондент 09.12 предоставляет внутридневной овердрафт банка-респондента. Сумма внутридневного «овердрафта» составила 158 245 руб. в течение 2 ч 30 мин (150 мин) и 41 412 руб. в течение 1 ч 17 мин (77 мин). Процентная ставка по внутридневному овердрафту составляет 5,5%, время работы расчетной системы корреспондентских отношений между банками – 9 ч (540 мин) в сутки.

Банк-респондент 10.12 на основании полученной от банка-корреспондента выписки по корреспондентскому счету оплачивает задолженность по процентам за предоставленный 09.12 внутридневной овердрафт в сумме:

$$\left(158\,245\text{ руб.}\cdot\frac{5{,}5\%}{100\%}\cdot\frac{150\text{ мин}}{540\text{ мин}}\cdot\frac{1\text{ день}}{365\text{ дней}}\right)+$$

$$+\left(41\,412\text{ руб.}\cdot\frac{5{,}5\%}{100\%}\cdot\frac{77\text{ мин}}{540\text{ мин}}\cdot\frac{1\text{ день}}{365\text{ дней}}\right)=7\text{ руб. }51\text{ коп.}$$

Пример 7. Начисление процентов на сумму выданного кредита по фиксированной процентной ставке.

Банк 11.08 выдает юридическому лицу (предприятию) кредит в сумме 280 тыс. руб. на 1 месяц по ставке 25%. Срок возврата суммы кредита и уплаты процентов по нему – 11.09.

Полный срок кредита (11.08 – 11.09) – 32 календарных дня (n), период начисления процентов по кредиту (11.08 – 10.09) – 31 календарный день (n – 1).

Согласно условиям кредитного договора предприятие-заемщик 11.09 погашает перед банком задолженность по кредиту и производит уплату процентов за пользование кредитом в сумме:

$$280\,000 \text{ руб.}\cdot\frac{25\%}{100\%}\cdot\frac{31 \text{ день}}{365 \text{ дней}} = 5945 \text{ руб. } 21 \text{ коп.}$$

Пример 8. Начисление процентов на сумму выданного межбанковского кредита по плавающей процентной ставке.

Банк осуществляет операции по выдаче межбанковских кредитов на срок 3 дня. Процентная ставка по кредиту изменяется на ежедневной основе и равна ставке МИБОР по однодневным кредитам, действующей на соответствующий день срока действия кредитного договора, плюс 2%. Капитализация начисленных процентов не производится. Продление срока действия договора кредитным договором не предусматривается.

Банк 08.12 выдал межбанковский кредит на указанных выше условиях в сумме 1 млн 500 тыс. руб. Срок возврата суммы кредита и уплаты начисленных процентов – 11.12.

Полный срок кредита (08 – 11.12) – 4 календарных дня (n), период начисления процентов по кредиту (08 – 10.12) – 3 календарных дня (n – 1).

Дата	Ставка МИБОР[1] по 1-дн. кредитам, %	Ставка банка-кредитора (гр. 2 + 2%)
1	2	3
8.12	14,29	16,29
9.12	17,65	19,65
10.12	15,03	17,03

[1] МИБОР – годовые процентные ставки краткосрочного межбанковского кредита, базовые для России.

В период кредитного договора процентная ставка банка-кредитора по текущему кредиту составила:

начисление банком-кредитором процентов:

а) 09.12 (за первый день пользования суммой кредита) –

$$1\,500\,000\ \text{руб.} \cdot \frac{16{,}29\%}{100\%} \cdot \frac{1\ \text{день}}{365\ \text{дней}} = 669\ \text{руб.}\ 45\ \text{коп.};$$

б) 10.12 (за второй день пользования суммой кредита) –

$$1\,500\,000\ \text{руб.} \cdot \frac{19{,}65\%}{100\%} \cdot \frac{1\ \text{день}}{365\ \text{дней}} = 807\ \text{руб.}\ 53\ \text{коп.};$$

в) 11.12 (за третий день пользования суммой кредита) –

$$1\,500\,000\ \text{руб.} \cdot \frac{17{,}03\%}{100\%} \cdot \frac{1\ \text{день}}{365\ \text{дней}} = 699\ \text{руб.}\ 86\ \text{коп.};$$

г) 11.12 банк-заемщик погашает задолженность по кредиту в сумме 1 млн 500 тыс. руб. и уплачивает начисленные проценты в сумме 2176 руб. 84 коп. (669,45 + 807,53 + 699,86).

7.2. Модели развития операций по схеме сложных процентов

В финансово-коммерческих операциях используется схема сложных процентов, если начисляемый процент (I) (доход от капитала) суммируется с исходным капиталом (P) и на следующем интервале начисления процент начисляется уже от всей образовавшейся суммы ($P + I$). Этот вариант иногда называют капитализацией, или реинвестированием, или проценты на проценты. В этом случае сумма накопленного капитала составит:

к концу первого года –

$$S_1 = P + P \cdot i_c = P \cdot (1 + i_c),$$

где i_c – относительная величина годовой ставки сложных ссудных процентов;

к концу второго года –

$$S_2 = S_1 + S_1 \cdot i_c = S_1 \cdot (1 + i_c) = P \cdot (1 + i_c)^2;$$

к концу третьего года –

$$S_3 = S_2 \cdot (1 + i_c) = P \cdot (1 + i_c)^3;$$

к концу n-го года –

$$S_n = P \cdot (1 + i_c)n = P \cdot k_{нс},$$

где $k_{нс}$ – коэффициент наращения; $k_{нс} = (1 + i_c)^n$.

Таким образом, накопление капитала по схеме сложных процентов образует возрастающую числовую последовательность: S_0, S_1, S_2, S_3, ..., S_n, которая представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом $b_0 = S_0 = P$ и знаменателем $q = 1 + i_c$. В соответствии с этим можно записать формулу для определения любого ее члена:

$$S_n = b_0 \cdot q^n = P(1 + i_c)^n.$$

Таким образом, получена модель наращения по формуле сложных процентов:

$$S = P\,(1 + i_c)^n = P\,(1 + i_c)^{t/K} = P \cdot k_{нс},$$

где t – срок контракта в днях;
$k_{нс}$ – коэффициент наращения.

Выводим формулы для определения таких показателей финансовой операции, как

величина первоначальной суммы –

$$P = \frac{S}{(1+i_c)^n} = \frac{S}{(1+i_c)^{t/K}}$$

(математическое дисконтирование при начислении сложных процентов);

относительная величина процентной ставки –

$$i_c = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1$$

(одна из наиболее применяемых формул, используется для нахождения эффективной ставки сложных процентов, характеризующей доходность финансовой операции):

срок ссуды (лет) –

$$n = \frac{\ln\frac{S}{P}}{\ln(1+i_c)};$$

срок ссуды в днях –

$$t = K \cdot \frac{\ln\frac{S}{P}}{\ln(1+i_c)};$$

продолжительность года в днях –

$$K = \frac{t\ln(1+i_c)}{\ln\frac{S}{P}};$$

коэффициент наращения –

$$k_{\text{нс}} = (1 + i_c)^n = (1 + i_c)^{t/K}.$$

Если на протяжении всего срока контракта процентная ставка изменяется, то получим другую математическую модель определения наращенной суммы:

$$S = P(1+i_{c_1})^{n_1}(1+i_{c_2})^{n_2}\ldots(1+i_{c_l})^{n_l}\ldots(1+i_{c_L})^{n_L} = P\prod_{l=1}^{L}(1+i_{c_l})^{n_l},$$

где n_l – 1-й интервал начисления процентов, $l = \overline{1, L}$;

L – количество интервалов начисления;

$k_{\text{нс}} = \prod_{l=1}^{L}(1+i_{cl})^{n_l}$ – коэффициент наращения.

Начисление сложных процентов может осуществляться несколько раз в году: по месяцам, кварталам, полугодиям. В таких случаях указывается ставка на периоде, а наращенная сумма находится по формуле

$$S = P \cdot (1 + i_n)^N,$$

где i_n – ставка на периоде начисления;
N – количество интервалов начисления в течение срока действия контракта.

В случае когда начисление сложных процентов осуществляется через равные промежутки времени n, указывается номинальная годовая процентная ставка j, пользуются следующей формулой:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn},$$

где m – количество интервалов начисления за год;
n – срок контракта в годах;
$N = m \cdot n$ – количество интервалов начисления за весь срок контракта.

На практике применяется еще и непрерывное начисление процентов по номинальной годовой процентной ставке j. В этом случае величину наращенной суммы находят из следующего выражения:

$$S = P \cdot \lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}.$$

Затем при переходе к пределу при $m \to \infty$, используя известную формулировку второго замечательного предела:

$$\lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} = e,$$

получим такое уравнение:

$$\lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} = e^{j \cdot n},$$

тогда для определения наращенной суммы получим формулу

$$S = P \cdot e^{jn} = P \cdot k_{нс},$$

где $k_{нс} = e^{jn}$ – коэффициент наращения при непрерывном начислении процентов по номинальной годовой ставке j.

Приведенные модели позволяют проводить вычисления различных показателей финансовых операций.

Пример 1. Коммерческие банки C и D начисляют доход один раз в полгода, причем банк C по простой ставке, а банк D по сложной ставке процентов. Через год в этих банках средства инвестора увеличиваются на 60%. В какой банк выгоднее положить деньги на полгода и в какой – на полтора года?

Решение. По условию задачи коэффициенты наращения банков C и D равны, поэтому $k_н = k_{нс} = 1{,}6$, откуда для банка C ставка простых процентов определяется из выражения

$$k_н = 1 + ni = 1 + 2i = 1{,}6 \Rightarrow i = \frac{1{,}6 - 1}{2} = 0{,}3 = 30\%.$$

Для банка D ставка сложных процентов составляет

$$k_{нс} = (1 + ni)^2 = 1{,}6 \Rightarrow i_c = \sqrt{1{,}6} - 1 = 0{,}265 = 26{,}5\%.$$

Следовательно, выгоднее положить деньги на полгода в банк C. Для сравнения результатов финансовых операций с банками C и D можно составить следующую таблицу.

t	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
n	1	2	3	4	5	6	7	8
$k_н$	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1	3,4
$k_{нс}$	1,265	1,6	2,02	2,56	3,24	4,1	5,18	6,56

Из данных таблицы следует, что на полтора года (как и вообще на любой срок свыше года) выгоднее положить деньги в банк D, поскольку $k_нc = 2{,}02 > k_н = 1{,}9$.

Пример 2. М.Е. Салтыков-Щедрин описывает в «Господах Головлевых» такую сцену: «Порфирий Владимирович... сидит у себя в кабинете, исписывая цифирными вкладками листы бумаги. На этот раз его занимает вопрос: сколько было бы у него теперь денег, если б маменька... подаренные ему при рождении дедушкой... на зубок сто рублей... не присвоила себе, а положила бы вкладом в ломбард на имя малолетнего Порфирия? Выходит, однако, немного: восемьсот рублей...»

Определите сложную ставку процентов годовых ломбарда по вкладам, если Порфирию в момент его расчетов было 50 лет.

Решение. $n = 50$; $P = 100$ руб.; $S = 800$ руб.

По формуле сложных процентов наращенная сумма равна:

$$S = P\,(1 + i_c)^n,$$

откуда ставка сложных процентов составит

$$i_c = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1 = \sqrt[50]{\frac{800}{100}} - 1 = 0{,}0425 \Rightarrow 4{,}25\%.$$

Пример 3. Знаменитый американский ученый и государственный деятель Бенджамин Франклин завещал жителям города Бостона 1 тыс. фунтов стерлингов на следующих условиях:

деньги давать под 5% годовых молодым ремесленникам;

через 100 лет из накопленных денег (с учетом процентов на проценты) 100 тыс. фунтов стерлингов пустить на строительство общественных зданий;

оставшиеся после этого деньги отдать под те же проценты еще на 100 лет;

по истечении этого срока накопленную сумму разделить между бостонскими жителями и правлением Массачусетской общины, которой передать 3 млн фунтов стерлингов.

Сколько денег должно было достаться бостонским жителям через 200 лет после смерти Б. Франклина (он умер в 1790 г.)?

Решение. Р = 1000 ф. ст., $I_c = 5\%$, $n = 100$ лет.

1. Завещанный капитал через 100 лет составил:

$$S = 1000 \cdot (1 + 0{,}05)^{100} = 131\,501 \text{ ф. ст.}$$

2. После выделения 100 000 ф. ст. на постройку общественных зданий осталось:

$$131\,501 - 100\,000 = 31\,501 \text{ ф. ст.}$$

3. Через 100 лет наращенный капитал составил:

$$S = 31\,501 \cdot (1+0{,}05)^{100} = 4\,142\,421 \text{ ф. ст.}$$

4. Бостонским жителям из этой суммы после вычета 3 млн ф. ст. осталось:

$$4\,142\,421 - 3\,000\,000 = 1\,142\,421 \text{ ф. ст.}$$

Пример 4. Начисление процента на сумму срочного вклада с условием ежемесячной капитализации процентов.

Банк 20.07 заключает с вкладчиком договор срочного вклада на 3 месяца (срок возврата вклада – 20.10). Сумма вклада – 15 тыс. руб. Процентная ставка – 22%. 20-го числа каждого месяца действия договора производится капитализация начисленных процентов. Переоформление вклада по окончании срока действия договора на ранее действовавших условиях срочного вклада договором не предусматривается. Выплата причисленных к сумме вклада процентов осуществляется по истечении срока действия договора.

В течение срока действия договора банк трижды – 20.08, 20.09 и 20.10 производит капитализацию начисленных процентов во вклад. 20.10 – срок окончания договора срочного вклада, вкладчик не явился за вкладом в установленный договором срок. В этот же день после окончания операционного дня банк переоформляет указанный срочный вклад во вклад до востребования.

Вкладчик 28.10 получает сумму вклада до востребования и начисления за период с 20.10 по 27.10 включительно (8 календарных дней) проценты по установленной ставке 4%.

Полный срок срочного вклада (20.07 – 20.10) – 93 календарных дня (n), период начисления процентов по ставке срочного вклада – 22% (20.07 – 19.10) – 92 календарных дня (n – 1).

Полный срок вклада до востребования (20.10–28.10) – 9 календарных дней (n), период начисления процентов по ставке вклада до востребования – 4% (20.10–27.10) – 8 календарных дней.

Порядок начисления банком процентов на сумму вклада:

сумма срочного вклада на 21.08 (с капитализацией процентов, начисленных за период с 20.07 по 19.08 включительно):

$$15\,000\ \text{руб.}+\left(15\,000\ \text{руб.}\cdot\frac{22\%}{100\%}\cdot\frac{31\ \text{день}}{365\ \text{дней}}\right)=15\,280\ \text{руб.}\ 27\ \text{коп.};$$

сумма срочного вклада на 21.09 (с капитализацией процентов, начисленных за период с 20.08 по 19.09 включительно):

$$15280{,}27\ \text{руб.}+\left(15280{,}27\ \text{руб.}\cdot\frac{22\%}{100\%}\cdot\frac{31\ \text{день}}{365\ \text{дней}}\right)=15\,565\ \text{руб.}\ 78\ \text{коп.};$$

сумма срочного вклада по состоянию на конец операционного дня 20.10 (с капитализацией процентов, начисленных за период с 20.09 по 19.10 включительно), в конце рабочего дня 20.10 и переоформленного во вклад до востребования:

$$15565{,}78\ \text{руб.}+\left(15565{,}78\ \text{руб.}\cdot\frac{22\%}{100\%}\cdot\frac{31\ \text{день}}{365\ \text{дней}}\right)=15\,856\ \text{руб.}\ 63\ \text{коп.};$$

сумма начисленных на вклад до востребования процентов (за период с 20.10 по 27.10 включительно):

$$15856{,}63\ \text{руб.}\cdot\frac{4\%}{100\%}\cdot\frac{8\ \text{дней}}{365\ \text{дней}}=13\ \text{руб.}\ 90\ \text{коп.}$$

Таким образом, общая сумма возврата денежных средств вкладчику составит на 28.10 15 870 руб. 53 коп., из которых 15 856 руб. 63 коп. – сумма срочного вклада с учетом капитализированных процентов и 13 руб. 90 коп. – проценты, начисленные за время, прошедшее с момента переоформления указанного срочного вклада во вклад до востребования.

Пример 5. Начисление процентов на сумму срочного вклада по формуле сложных процентов.

Банк 05.09 заключает с вкладчиком договор срочного банковского вклада на 21 день (срок возврата вклада – 26.08). Сумма вклада – 15 тыс. руб. Процентная ставка – 15%. По условиям договора начисленные по итогам каждого дня срока действия депозита проценты увеличивают сумму вклада.

Полный срок вклада (05.08–26.08) – 22 календарных дня (n), период начисления процентов по вкладу (05.08–25.08) – 21 календарный день (n – 1).

26.08 банк возвращает вкладчику вклад (с учетом ежедневной капитализации процентов) в сумме:

$$15\,000 \text{ руб.} \cdot \left(1 + \frac{15\%}{100\%} \cdot \frac{1 \text{ день}}{365 \text{ дней}}\right)^{21} = 15\,129 \text{ руб. } 99 \text{ коп.}$$

Пример 6. Банк выдал коммерческому предприятию 16.08 валютный кредит под контракт на покупку товаров на сумму 10 000 долл. США, срок кредита – 2 месяца (до 16.10); ставка процентов – 35% годовых за полное количество календарных дней из расчета 360 дней в году, при подсчете количества дней в периоде граничные дни (первый и последний) считаются за 1 день;

порядок выплаты кредита: 16.09 – проценты за первый месяц, 16.10 – проценты за второй месяц и сумма кредита; штрафные санкции по ставке сложных процентов составляют 0,5% от просроченных сумм кредита за каждый день просрочки. Очередность погашения просроченной задолженности: в первую очередь погашаются начисленные штрафы, затем сумма процентов и сумма кредита.

Фактически 16.09 клиент погасил проценты за первый месяц кредита. Далее кредит погашался в следующей последовательности: 22.10 клиент перевел 2600 долл. США в счет погашения задолженности; 25.10 клиент перевел 3100 долл. США в счет погашения задолженности, а 30.10 клиент заявил, что готов погасить свою задолженность в полном объеме.

Определите величину задолженности клиента на 30.10.

Решение. Определяем:

сумму задолженности на 16.10 –

$$S_1 = P(1 + i \cdot n) = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{35\%}{100\%} \cdot \frac{30 \text{ дней}}{365 \text{ дней}}\right) = 10291{,}67 \text{ долл.};$$

сумму задолженности на 22.10 до внесения первой суммы на погашение –

$$S_2 = 10291{,}66 + 10\,000 \cdot \frac{0{,}5\%}{100\%} = 10591{,}66 \text{ долл.}$$

После частичного погашения сумма долга составит –

$$S_2{}^1 = S_2 - 2600 = 10591{,}66 - 2600 = 7991{,}66 \text{ долл.}$$

Рассчитаем сумму задолженности S_3 на 25.10 до внесения второй суммы на погашение –

$$S_3 = 7991{,}66 \cdot \left(1 + \frac{0{,}5\%}{100\%} \cdot 3\right) = 8111{,}53 \text{ долл.}$$

После частичного погашения долга сумма долга составит

$$S_3{}^1 = S_3 - 3100 = 8111{,}53 - 3100 = 5011{,}53 \text{ долл.}$$

Определяем сумму задолженности S_4 на 30.10 –

$$S_4 = S_3^1 \cdot \left(1 + \frac{0{,}5\%}{100\%} \cdot 5\right) = 5011{,}53 \cdot 1{,}025 = 5136{,}82 \text{ долл.}$$

Следовательно, на 30 октября полная задолженность по кредиту, процентам и начисленным штрафам составит 5136,82 долл. США.

7.3. Модели операций дисконтирования

Дисконтирование связано с распространенным в коммерческой сфере утверждением «время – это тоже деньги», что обусловлено неравноценностью одинаковых по абсолютной величине сумм денежных средств сегодня и через некоторое время в будущем. Это объясняется, например, возможностью инвестировать капитал сегодня и в будущем получить доход. Кроме того, инфляционный процесс обесценивает денежную массу. Таким образом, можно утверждать, что «деньги сегодня» ценнее «будущих денег». Именно поэтому «золотое» правило бизнеса гласит: сумма, полученная сегодня, больше той же суммы, полученной завтра.

Дисконтирование позволяет учитывать в операциях фактор времени. Различают математическое дисконтирование и коммерческий или банковский учет.

Математическое дисконтирование связано с определением так называемого современного, или приведенного, значения P на некоторый момент времени, которое соответствует заданному значению S в другой момент времени. Простейшая задача – определение суммы вклада P на основе заданной конечной величины в будущем S через временной период начислений n под заданную, например, простую ставку процентов:

$$P = \frac{S}{1+n_i} = S \cdot k_д,$$

где $k_Д$ – коэффициент дисконтирования (приведения) по простой ставке процентов $k_д = \dfrac{1}{1+n_i}$.

Дисконтированное значение будущей суммы вклада по сложной ставке процентов равно:

$$P = \frac{S}{(1+i_c)^n} = S \cdot k_{ДС},$$

где $k_{ДС}$ – коэффициент дисконтирования (приведения) по сложной ставке процентов $k_{дс} = \dfrac{1}{(1+i_c)^n}$,

а по номинальной ставке процентов j при начислении процентов m раз в году –

$$P = \frac{S}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}}.$$

Банковский учет заключается в покупке денежных обязательств, например векселя банком по цене, которая меньше номинальной указанной в нем суммы. В этом случае говорят, что вексель учитывается и клиент получает сумму:

$$P = S - D,$$

где S – номинальная сумма данного обязательства;
P – цена покупки векселя банком;
D – дисконт, сумма процентных денег (доход банка).

Процентный доход покупателя векселя банка может определяться по простой годовой учетной ставке:

$$d\% = \frac{D}{S} \cdot 100\%.$$

Если срок n от даты учета до даты погашения будет составлять часть года, то дисконт определяется по формуле

$$D = n \cdot d \cdot S = \frac{t}{K} \cdot d \cdot S,$$

где d – относительная величина простой учетной ставки.

Предъявителю учитываемого денежного обязательства будет выдана сумма:

$$P = S - D = S(1 - nd) = S \cdot \left(1 - \frac{t}{K} d\right).$$

Следует заметить, что дисконтирование может быть связано и с проведением кредитной операции. В таком случае проценты начисляются в начале интервала начисления и заемщик получает сумму P за вычетом процентных денег D из суммы кредита S, подлежащего к возврату. Поэтому при проведении операции по простой учетной ставке d следует пользоваться формулой

$$S = \frac{P}{1 - nd};$$

при проведении операции по сложной учетной ставке d_c –

$$S = \frac{P}{(1-d_c)^n},$$

где d_c – относительная величина сложной учетной ставки.

Откуда можно найти другие показатели операции:

$$n = \frac{\ln\frac{P}{S}}{\ln(1-d_c)}; \qquad d_c = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}}.$$

Выгодность метода начисления процентов по учетной ставке для кредитора или заемщика зависит от величины процентной ставки и срока кредита.

В финансовых операциях используется и номинальная годовая учетная ставка f, по которой при начислении процентов m раз в году можно определить:

$$S = \frac{P}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}.$$

Отсюда находим следующие формулы расчета показателей операции:

$$n = \frac{\ln\frac{P}{S}}{m\ln\left(1-\frac{f}{m}\right)}; \qquad f = m\left(1 - \sqrt[mn]{\frac{P}{S}}\right).$$

При непрерывном начислении процентов по номинальной годовой учетной ставке f справедливо соотношение

$$S = \frac{P}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}} = Pe^{-f\cdot n},$$

из которого находим следующие формулы:

$$n = \frac{1}{f}\ln\frac{P}{S}; \quad f = \frac{1}{n}\ln\frac{P}{S}.$$

Пример 1. Финансовая компания выдает ссуду 15 000 руб. на полгода по простой годовой процентной ставке $d = 5\%$. Определите сумму, которую получит клиент, и доход компании.

Решение. S = 15 000 руб.; $d = 0{,}05$; $n = 0{,}5$, тогда сумма, полученная клиентом, составит:

$$P = S(1 - nd) = 15\,000(1 - 0{,}5 \cdot 0{,}05) = 4\,625 \text{ руб.}$$

Доход финансовой компании исчисляется простым дисконтом, т.е. как процентный доход, вычитаемый из ссуды в момент ее выдачи:

$$D = ndS = 0{,}5 \cdot 0{,}05 \cdot 15\,000 = 375 \text{ руб.}$$

Пример 2. Переводной вексель (тратта) выдан на 100 000 руб. с уплатой 12 ноября того же года. Владелец векселя учел его в банке досрочно – 12 сентября по простой учетной ставке 10%. Определите сумму, полученную владельцем векселя в банке, если число дней в году принять равным $K = 360$.

Решение. S = 10 000 руб.; $d = 0{,}1$; t – 60 дней; K – 360.

Находим сумму, полученную владельцем векселя:

$$P = 100\,000 \cdot \left(1 - 0{,}1\frac{60}{360}\right) = 98\,333 \text{ руб. } 33 \text{ коп.}$$

Пример 3. Дата погашения дисконтного векселя – 22 июля текущего года. Определите выкупную цену и дисконт на 2 июля векселя номиналом 100 млн руб., если вексельная ставка составляет 40% годовых, а число дней в году принять за 360.

Решение. $S = 100\,000\,000$ руб.; $d = 0{,}4$; $t = 20$ дней; $K = 360$.

Определяем выкупную цену дисконтного векселя:

$$P = S - D = S \cdot \left(1 - \frac{t}{K}d\right) = 100\,000\,000 \cdot \left(1 - \frac{20 \text{ дней}}{360 \text{ дней}} \cdot \frac{40\%}{100\%}\right) =$$

$$= 97\,777\,777 \text{ руб. } 78 \text{ коп.}$$

Пример 4. Операция, связанная с покупкой и последующей продажей облигаций, должна принести через 3 года прибыль в 100 000 руб. Определите современную ценность этой суммы по сложной годовой учетной ставке $d = 30\%$.

Решение. S = 100 000 руб.; $d_c = 0{,}3$; $n = 3$, тогда современная ценность суммы прибыли:

$$P = S(1 - d_c)^n = 100\,000\,(1 - 0{,}3)^3 = 34\,300 \text{ руб.}$$

Пример 5. Клиент имеет вексель на 10 000 руб., который он хочет учесть 01.03 в банке по сложной учетной ставке, равной 7%. Какую сумму он получит, если срок погашения векселя 01.08.2000?

Решение. Срок от даты учета до даты погашения векселя равен:

$$t = 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 1 - 1 = 153 \text{ дням;}$$

число дней в году $K = 365$ дней; $S = 10\,000$ руб.; $d_c = 0{,}07$. Клиент получит сумму:

$$P = S \cdot (1 - d_c)^{\frac{t}{k}} = 10\,000(1 - 0{,}07)^{\frac{153}{365}} = 9\,700 \text{ руб. } 38 \text{ коп.}$$

Пример 6. Банк учитывает вексель за 2 года до срока его оплаты по простой учетной ставке $d = 6\%$. Какую сложную учетную ставку должен установить банк, чтобы доход банка остался прежним?

Решение. $n = 2$ года; $d = 0{,}06$.

Доход банка Д $= S - P$. При применении простой учетной ставки d:

$$S = \frac{P}{1 - nd}; \quad P = S(1 - nd); \quad Д = S \cdot n \cdot d.$$

При применении сложной учетной ставки d_c:

$$S = \frac{P}{(1 - d_c)^n}; \quad p = S(1 - d_c)^n; \quad Д = S\left[1 - (1 - d_c)^n\right].$$

По условию доход должен быть одинаковым, поэтому должно выполняться соотношение:

$$S \cdot n \cdot d = S\,[1 - (1 - d_c)^n],$$

следовательно,

$$(1 - d_c)^2 = 1 - 2 \cdot d,$$

$$d_c = 1 - \sqrt{1 - 2d} = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0{,}062} = 0{,}062 = 6{,}2\%,$$

т.е. сложная учетная ставка должна быть несколько больше, чем простая.

Пример 7. Банк учитывает вексель по номинальной учетной ставке $f = 8\%$ с начислением процентов 3 раза в год и желает перейти к сложной учетной ставке d_c. Какой величины должна быть ставка d_c, чтобы доход банка не изменился?

Решение. $f = 0{,}08$; $m = 3$.

Обозначим число лет n. Чтобы доход не менялся, выданная им сумма P должна быть одинакова. В случае номинальной учетной ставки –

$$P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}.$$

В случае сложной учетной ставки –

$$P = S(1 - d_c)^n.$$

Тогда запишем уравнение эквивалентности:

$$\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn} = (1 - d_c)^n,$$

$$1 - d_c = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m.$$

откуда находим величину сложной учетной ставки

$$d_c = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m = 1 - \left(1 - \frac{0{,}08}{3}\right)^3 = 0{,}078 = 7{,}8\%,$$

которая будет меньше номинальной.

7.4. Модели финансовых и товарных потоков

Финансовые и товарные потоки являются составной и неотъемлемой частью практически любой сферы человеческой деятельности. В коммерции они образуют питательную среду товародвижения. В экономической, финансовой, производственной и других сферах, направленных на удовлетворение потребностей человека, эти потоки порождают интерес и объясняют смысл их существования. Примерами таких потоков являются: оплата по заключенным договорам, которая может предусматривать как разовый платеж, так и ряд выплат, распределенных во времени; погашение банковской задолженности или коммерческого кредита частями и т.п. При этом может возникать целый ряд последовательных, например равновеликих, платежей R, которые и образуют поток платежей в соответствии, например, с контрактами на поставку товаров.

При некоторых платежах проценты начисляются на находящиеся в обороте деньги. Здесь возникают две основные задачи: определить наращенную сумму потока платежей или, наоборот, по наращенной сумме рассчитать величину отдельного платежа. Очевидно, в контрактах на поставку товаров это необходимо учитывать во взаимозачетах.

Ряд последовательных финансовых платежей, производимых через равные промежутки времени, называются финансовой рентой, или аннуитетом. Это частный случай потока платежей, все члены которого – положительные величины. Примерами аннуитета могут быть регулярные взносы в пенсионный или другие фонды, выплаты процентов по ценным бумагам, например по акциям, платежи за партии товаров и т.д. Финансовая рента имеет следующие основные характеристики: член ренты R_j – величина каждого отдельного платежа; интервал ренты τ_j – временной интервал между двумя платежами; срок ренты t – время от начала реализации ренты до момента последнего платежа (бывают и вечные ренты); процентная ставка для расчета наращения или дисконтирования платежей; S – наращенная будущая сумма ренты, включающая все члены потока платежей с процентами на дату последней выплаты; современная (приведенная) величина ренты A – сумма всех членов потока платежей, дисконтированная (уменьшенная) на величину учетной ставки на начальный момент времени ренты.

Ренты подразделяются на постоянные, когда члены ренты равны: $R_1 = R_2 = R_3 = ... = R_n$, и переменные.

По моменту выплат членов ренты различают ренты: постнумерандо (обычные), в которых платежи осуществляются в конце соответствующих периодов, и пренумерандо, в которых платежи производят в начале указанных периодов.

Рассмотрим модели потоков ежегодных платежей с начислением процентов на платежи в конце каждого года (постнумерандо) по сложной процентной ставке.

Сумма первого платежа S_1 с наращенными на него за весь срок процентами определяем из уравнения

$$S_1 = R \cdot (1 + i_c)^{n-1},$$

где n – количество платежей величиной R.

Для второго платежа, для которого проценты начисляются на один год меньше, соответственно получим

$$S_2 = R \cdot (1 + i_c)^{n-2}.$$

Для третьего платежа наращенная сумма составит

$$S_3 = R \cdot (1 + i_c)^{n-3}.$$

На последний платеж, произведенный в конце последнего n-го года, проценты не начисляются:

$$S_n = R \cdot (1 + i_c)^{n-n} = R.$$

Тогда для всей наращенной суммы ренты получим

$$S = \sum_{t=1}^{n} S_t = \sum_{t=1}^{n} R(1+i_c)^{n-t} = R\sum_{t=1}^{n}(1+i_c)^{n-t}.$$

Коэффициент наращения равен:

$$k_{\text{на}} = \sum_{t=1}^{n}(1+i_c)^{n-t}.$$

Следует заметить, что этот коэффициент представляет собой сумму членов геометрической прогрессии, где первый член равен $b_1 = R$, а знаменатель $q = (1 + i_c) > 1$. На этом основании, используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии, преобразуем полученное выражение для наращенной суммы ренты к такому виду

$$S = R\frac{(1+i_c)^n - 1}{i_c},$$

из которой следует, что коэффициент наращения равен:

$$k_{\text{на}} = \frac{(1+i_c)^n - 1}{i_c}.$$

Для каждого платежа современное значение определяется формулой

$$A_t = R\frac{1}{(1+i_c)^t}.$$

Современная приведенная величина всей ренты будет определяться выражением

$$A = \sum_{t=1}^{n} A_t = R\sum_{t=1}^{n}(1+i_c)^{-t} = a \cdot R,$$

где a является коэффициентом приведения ренты и определяется формулой для суммы геометрической прогрессии с параметрами

$$b_1 = \frac{1}{1+i_c}, \quad q = \frac{1}{1+i_c},$$

в соответствии с которой находим

$$a = \sum_{t=1}^{n}\left(\frac{1}{1+i_c}\right)^t = \frac{1-(1+i_c)^{-n}}{i_c}.$$

Следовательно, получим выражение для приведенной величины ренты

$$A = R\frac{1-(1+i_c)^{-n}}{i_c}.$$

Полученные модели позволяют определить, например, величину отдельного платежа

$$R = \frac{S}{k_{\text{н}}} = \frac{S \cdot i_c}{(1+i_c)^n - 1} = \frac{A \cdot i_c}{1-(1+i_c)^{-n}}.$$

Если платежи выплачиваются p раз в год, а годовой платеж равен R, а проценты начисляются m раз в год, то наращенная сумма ренты составит:

$$S = \left(\frac{R}{P}\right)\frac{(1+j/m)^{nm} - 1}{(1+j/m)^{m/p} - 1}.$$

Современную величину ренты можно определять так:

$$A = \frac{S}{(1+j/m)^{mn}}.$$

В зависимости от исходных данных при решении каждой задачи формируется соответствующий набор моделей для определения значений показателей контракта.

Пример 1. Вкладчик в конце каждого месяца вкладывает в банк 1000 руб. Проценты начисляются ежемесячно по номинальной годовой ставке сложных процентов, составляющей 12%. Определите наращенную сумму на счете вкладчика через 2 года.

Решение. $R = 1000$; $n = 24$; $m = 12$; $i = \frac{j}{m} = \frac{12\%}{12} = 1\% = 0{,}01.$

$$S = R \cdot \frac{(1+i_c)^n - 1}{i_c} = 1000 \cdot \frac{(1+0{,}01)^{24} - 1}{0{,}01} = 10^5\left[(1{,}01)^{24} - 1\right] =$$

$$= 100\,000 \cdot [(1{,}01)^{24} - 1] = 100\,000 \cdot (1{,}2697346 - 1) =$$

$$= 26\,973 \text{ руб. } 46 \text{ коп.}$$

Если бы вкладчик только накапливал (дома) не включал в оборот деньги, то наращенная сумма составила бы всего 24 000 руб. = 1000 · 24.

Другая задача, обратная этой, заключается в вычислении регулярных платежей финансовой ренты R по заданной величине наращенной суммы S.

Пример 2. Вкладчик желает накопить в течение двух лет в банке 30 000 руб., производя ежемесячные равные вклады по сложной номинальной годовой ставке 12%. Определите сумму ежемесячного вклада при условии, что проценты начисляются ежемесячно.

Решение. $S = 30\,000$; $n = 24$; $j = 12\%$; $i^c = 0{,}01$.

Сумма ежемесячного вклада составит

$$R = \frac{S \cdot i_c}{(1+i_c)^n - 1} = \frac{30\,000 \cdot 0{,}01}{(1+0{,}01)^{24} - 1} = \frac{300}{0{,}2697346} = 1112 \text{ руб. } 20 \text{ коп.}$$

Пример 3. Вкладчик намерен положить в банк сумму, чтобы его сын в течение пятилетнего срока обучения мог снимать в конце каждого года по 10 000 руб. и израсходовать к концу учебы весь вклад. Определите сумму вклада, если годовая ставка сложных процентов – 12%.

Решение. Сумма вклада равна современной ценности ренты, состоящей из пяти платежей:

$$A = R \cdot \frac{1-(1+i_c)^{-n}}{i_c} = 10\,000 \cdot \frac{1-(1+0{,}12)^{-5}}{0{,}12} =$$

$$= \frac{10^4}{0{,}12}\left[1 - \frac{1}{1{,}12^5}\right] = \frac{10^4[1-0{,}56742069]}{0{,}12} = 36\,047 \text{ руб. } 76 \text{ коп.}$$

Пример 4. Заемщик получил кредит 3 млн руб. на 5 месяцев с условием погашения долга в конце каждого месяца равными срочными платежами. На величину долга начисляются сложные проценты по ставке 5% за месяц. Определите сумму срочного платежа.

Решение. $n = 5$; $A = 3\,000\,000$ руб.; $i_c = 0{,}05$.

Сумма срочного платежа

$$R = \frac{A \cdot i_c}{1-(1+i_c)^{-n}} = \frac{3\,000\,000 \cdot 0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-5}} = \frac{3\,000\,000}{4{,}3294767} = 692\,924 \text{ руб. } 39 \text{ коп.}$$

7.5. Модели инфляции в коммерческих операциях

Инфляция характеризуется обесценением национальной валюты, снижением ее покупательной способности и общим повышением цен в стране. При наличии инфляции инвестор может потерять часть дохода, а заемщик может выиграть за счет погашения задолженности деньгами сниженной покупательной способности. На этом основании необходимо установить количественные соотношения по определению влияния инфляции на показатели финансово-коммерческих операций.

Следует заметить, что если наблюдается общее снижение цен, то происходит дефляция.

Все показатели финансово-коммерческих операций можно разделить на две группы: номинальные, рассчитанные в текущих ценах, и реальные, учитывающие влияние инфляции, рассчитанные в сопоставимых ценах базового периода.

Для оценки упомянутых процессов формируют определенный набор товаров и услуг, называемый потребительской корзиной, и фиксируют изменения ее стоимости в различные моменты времени.

Состав потребительской корзины математически можно представить в виде n-мерного вектора товаров:

$$\bar{X} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n),$$

где x_i — количество i-го вида товара или услуги в корзине;
n — количество товаров и услуг потребительской корзины.

В базовом периоде t_0 цены состава потребительской корзины можно представить в виде n-мерного вектора

$$\bar{P_0} = (P_1^0, P_2^0, P_3^0, ..., P_n^0),$$

а в анализируемом периоде t_j — соответственно вектором

$$\bar{P_j} = (P_1^j, P_2^j, P_3^j, ..., P_n^j).$$

Тогда стоимость потребительской корзины описывается скалярным произведением этих векторов:

$$S = \bar{P} \cdot \bar{X}.$$

Стоимость корзины в базовом периоде t_0 составит

$$S_0 = P_1^0 x_1 + P_2^0 x_2 + P_i^0 x_i + ... + P_n^0 x_n = \sum_{i=1}^{n} P_i^0 x_i,$$

а в анализируемом периоде t_j —

$$S_j = P_1^j x_1 + P_2^j x_2 + P_i^j x_i + ... + P_n^j x_n = \sum_{i=1}^{n} P_i^j x_i.$$

На этом основании полагают, что изменение (рост или падение) потребительских цен определяется безразмерным показателем, называемым индексом инфляции, который показывает, во сколько раз выросли цены:

$$I_{\text{и}} = \frac{S_j}{S_0},$$

а относительная величина уровня инфляции есть темп инфляции

$$\alpha = \alpha_{0,j} = \frac{S_j - S_0}{S_0} = \frac{\Delta S}{S_0} = I_{\text{и}} - 1,$$

откуда следует, что индекс инфляции равен:

$$I_{\text{и}} = 1 + \alpha.$$

Уровень инфляции определяют в процентах:

$$\alpha\% = \left(\frac{S_j - S_0}{S_j}\right) \cdot 100\%.$$

Индекс инфляции показывает, во сколько раз выросли цены, а уровень инфляции – на сколько процентов выросли цены за рассматриваемый период. При проведении исследования стоимость потребительской корзины фиксируется через, например, равные промежутки времени: $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots, t_1, \ldots, t_N$, что можно записать таким образом – $S_0,\ S_1, S_2, S_3, \ldots, S_i, \ldots, S_N$.

Аналогично для темпов инфляции на этих интервалах –

$$\alpha_{0,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \ldots, \alpha_{j-1,l}, \ldots, \alpha_{N-1,N}.$$

Тогда можно записать следующие уравнения связи между членами ряда

$$S_1 = S_0(1 + \alpha_{0,1});\quad S_2 = S_1(1 + \alpha_{1,2});\quad S_3 = S_2(1 + \alpha_{2,3}).$$

После соответствующих подстановок получим

$$S_3 = S_0(1 + \alpha_{0,1})(1 + \alpha_{1,2})(1 + \alpha_{2,3}).$$

На этом основании нетрудно записать выражение для определения стоимости потребительской корзины в общем виде

$$S_N = S_0 \cdot \prod_{l=1}^{N}(1+\alpha_{l-1,l}),$$

тогда индекс инфляции за весь период будет равен:

$$I_и = \frac{S_N}{S_0} = \prod_{l=1}^{N}(1+\alpha_{l-1,l}).$$

Поскольку индекс инфляции связан с темпом инфляции выражением

$$I_и = 1 + \alpha,$$

то темп инфляции за весь период будет равен:

$$\alpha = I_и - 1 = \left(\prod_{l=1}^{N}(1+\alpha_{l-1,\,l})\right) - 1.$$

Следует заметить, что при равенстве значений темпов инфляции на всех интервалах

$$\alpha_{0,1} = \alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,4} = \ldots =, \alpha_{N-1,N} = \alpha_1,$$

индекс инфляции определяется по формуле

$$I_и = (1 + \alpha_1)^N.$$

Рассмотрим различные варианты начисления процентов с учетом инфляции.

Для простых процентов обозначим i_α ставку процентов, учитывающую инфляцию. Тогда для наращенной суммы имеем выражение

$$S_\alpha = P\,(1 + n \cdot i_\alpha).$$

Кроме того, если воспользоваться уравнением связи S_α с S через индекс инфляции:

$$S_\alpha = S \cdot I_и = P(1 + n \cdot i)I_и,$$

то можно записать такое уравнение

$$P(1 + n \cdot i_\alpha) = P(1 + n \cdot i)I_н,$$

откуда получим модель определения ставки простых процентов, учитывающей инфляцию:

$$i_\alpha = \frac{(1+ni)I_и - 1}{n} = \frac{(1+ni)(1+\alpha)-1}{n}.$$

Реальная доходность операции по ставке простых процентов при заданных i_α и $I_и$ определяется по формуле

$$i = \frac{ni_\alpha + 1 - I_и}{nI_и}.$$

Для сложных процентов аналогично запишем два выражения

$$S_\alpha = P(1 + i_{c\alpha})^n; \; S_\alpha = P(1 + i_c)^n \cdot I_и,$$

из которых получим

$$i_{c\alpha} = (1 + i_c)\sqrt[n]{I_и} - 1.$$

Эту формулу можно записать так:

$$i_c = \frac{1 + i_{c\alpha}}{\sqrt[n]{I_и}} - 1 = \frac{1 + i_{c\alpha}}{\sqrt[n]{1+\alpha}} - 1,$$

по которой можно сравнивать i_{ca} и α (больше, равно, меньше), проводить экономический анализ эффективности вложений и установить, поглощается ли доход инфляцией или происходит реальный прирост вложенного капитала, а не убыток.

При начислении процентов несколько раз в году запишем аналогичные модели:

$$S = P\left(1 + \frac{j_\alpha}{m}\right)^{mn}; \quad S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} \cdot I_и,$$

откуда получим выражение для номинальной сложной процентной ставки, учитывающей инфляцию:

$$j_\alpha = m\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)\sqrt[mn]{I_и}-1\right],$$

а также уравнение для определения номинальной ставки:

$$j = m\cdot\left[\frac{1+\dfrac{j_\alpha}{m}}{\sqrt[mn]{I_и}}-1\right].$$

Приведенные модели позволяют проводить взаиморасчеты с клиентами по показателям в контрактах с учетом инфляции.

Пример 1. Определите ожидаемый уровень инфляции за год при ежемесячном уровне инфляции 6%.

Решение. $\alpha\% = 6\%$, $\alpha = 0{,}06$, $N = 12$.

Индекс инфляции за год составит

$$I_и = (1+\alpha)^N = (1+0{,}06)^{12} = 2{,}012;$$

уровень инфляции за год –

$$\alpha = I_и - 1 = 2{,}012 - 1 = 1{,}012;\quad \alpha\% = 101{,}2\%.$$

Пример 2. Определите уровень инфляции за полгода, если уровни инфляции по месяцам составили соответственно 10, 15, 12, 9, 4, 13%.

Решение. Индекс инфляции за полгода составляет

$$I_и = (1+\alpha_1)\,(1+\alpha_2)\,(1+\alpha_3)\,(1+\alpha_4)\,(1+\alpha_5)\,(1+\alpha_6) =$$
$$= (1+0{,}1)\cdot(1+0{,}15)\cdot(1+0{,}12)\cdot(1+0{,}09)\cdot(1+0{,}14)\cdot(1+0{,}13) =$$
$$= 1{,}1\cdot 1{,}15\cdot 1{,}12\cdot 1{,}09\cdot 1{,}14\cdot 1{,}13 = 1{,}989;$$

темп и уровень инфляции за полгода соответственно составляют

$$\alpha = I_и - 1 = 1{,}989 - 1 = 0{,}989;\quad \alpha\% = 98{,}9\%.$$

Пример 3. Банк выдал клиенту кредит на один год в размере 2 тыс. руб. по ставке 6% годовых. Уровень инфляции за год составил 40%. Определите с учетом инфляции реальную ставку процентов по кредиту, погашаемую сумму и сумму процентов за кредит.

Решение. P = 2000 руб.; $i = 0{,}06$; $\alpha = 0{,}4$; $n = 1$.

Сумма погашения кредита с процентами без учета инфляции составит

$$S = P\,(1 + ni) = 2000 \cdot (1 + 0{,}06) = 2120 \text{ руб.};$$

сумма процентов –

$$P \cdot n \cdot i = 2000 \cdot 1 \cdot 0{,}06 = 120 \text{ руб.};$$

возвращаемая сумма с процентами, приведенная к моменту оформления кредита с учетом инфляции, –

$$P_\alpha = \frac{S}{I_n} = \frac{S}{1+\alpha} = \frac{2120}{1{,}4} = 1514 \text{ руб. } 29 \text{ коп.};$$

реальный доход банка –

$$Д = P_a - P = 1514{,}29 - 2000 = -\,485 \text{ руб. } 71 \text{ коп.},$$

что свидетельствует об убытке этой операции;

чтобы обеспечить доходность банку в размере 6% годовых, ставка процентов по кредиту с учетом инфляции должна быть равна:

$$i_\alpha = \frac{(1+ni)(1+\alpha)-1}{n} = i + \alpha + i \cdot \alpha = 0{,}06 + 0{,}4 + 0{,}06 \cdot 0{,}4 = 0{,}484;$$

$$i_\alpha\% = 48{,}4\%;$$

погашаемая сумма должна составлять

$$S_\alpha = P\,(1 + i_\alpha) = 2000 \cdot (1 + 0{,}484) = 2968 \text{ руб.};$$

реальный доход банка –

$$Д = P_\alpha - P = \frac{S_\alpha}{I_n} - P = \frac{2968}{1{,}4} - 2000 = 120 \text{ руб.},$$

что обеспечит реальную доходность операции 6% годовых.

Пример 4. Вклад 1000 руб. положен в банк на полгода с ежемесячным начислением сложных процентов по номинальной ставке 120% годовых. Определите реальный доход вкладчика, если ожидаемый ежемесячный уровень инфляции – 15%.

Решение. $P = 1000$ руб.; $n = 0,5$; $m - 12$; $j = 1,2$; $\alpha = 0,15$.

Индекс инфляции за полгода составит

$$I_и = (1 + \alpha)^6 = (1 + 0,15)^6 = 2,313;$$

уровень инфляции –

$$\alpha = I_и - 1 = 2,313 - 1,0 = 1,313, \quad \alpha\% = 131,3\%;$$

наращенная сумма вклада с процентами –

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} = 1000 \cdot (1 + 0,1)^6 = 1771 \text{ руб. } 56 \text{ коп.};$$

сумма вклада с процентами, приведенная к моменту его оформления, –

$$P_\alpha = \frac{S}{I_и} = \frac{1771,56}{2,313} = 765 \text{ руб. } 91 \text{ коп.};$$

реальный доход вкладчика составит

$$Д = P_\alpha - P = 765,91 - 1000 = -234 \text{ руб. } 9 \text{ коп.},$$

следовательно, вкладчик понесет убытки с позиций покупательной способности получаемой суммы в банке.

7.6. Модели сравнения финансово-коммерческих операций

Для выбора из различных схем финансово-коммерческой операции наиболее выгодной необходимо проводить их сравнение. Юридические или физические лица, участвующие в операции (сделке), должны ясно представлять ее результаты, оценить выгоду, определить доходность или эффективность.

Простейшим видом финансово-коммерческой операции является однократное предоставление кредитором в долг товара на сумму или суммы P заемщику (дебитору) с условием, что через некоторое время n будет возвращена сумма S. Для оценки эффективности такой операции можно использовать следующие показатели:

относительный рост, относительную величину ставки процента, называемую интересом:

$$i = \frac{S - P}{P};$$

относительную скидку, или дисконт:

$$d = \frac{S - P}{S}.$$

Эти показатели характеризуют приращение капитала кредитора, отнесенное либо к первоначальной сумме (интерес), либо к конечной сумме (дисконт).

Между этими показателями существует связь, которая находится путем совместного решения этих уравнений, откуда можно получить следующие модели:

$$i = \frac{d}{1-d}; \quad d = \frac{i}{1+i}.$$

В операциях иногда вместо дисконта используют дисконт-фактор, определяемый по такой формуле

$$V = 1 - d = \frac{P}{S} = \frac{1}{1+i}.$$

Для определения выгодности операции используют сравнительную доходность, которая на основе допущения о равенстве финансовых результатов различных вариантов проведения операций приводит к понятию эквивалентных процентных ставок простых или сложных процентов. Это позволяет получить инструмент корректного сравнения операций.

Эквивалентные ставки дают одинаковые финансовые результаты или наращенные суммы S на равных промежутках времени n.

Для этих целей используют базовые модели вычисления наращенных сумм процентных ставок:

$$S = P \cdot (1 + ni), \quad S = \frac{P}{1 - nd},$$

$$S = P \cdot (1 + i_c)^n, \quad S = \frac{P}{(1 - d_c)^n},$$

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}, \quad S = \frac{P}{\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}}.$$

На этом основании можно в обобщенном виде написать модели связи возможных вариантов сочетания эквивалентных ставок (30 формул):

эквивалентные ставки простых процентов –

$$i_э = \varphi(i_c), \; i_э = \varphi(j), \; i_э = \varphi(d), \; i_э = \varphi(d_c), \; i_э = \varphi(f);$$

эквивалентные ставки сложных процентов –

$$i_{cэ} = \varphi(i), \; i_{cэ} = \varphi(j), \; i_{cэ} = \varphi(d), \; i_{cэ} = \varphi(d_c), \; i_{cэ} = \varphi(f);$$

эквивалентные номинальные ставки сложных процентов –

$$j_э = \varphi(i), \; j_э = \varphi(i_c), \; j_э = \varphi(d), \; j_э = \varphi(d_c), \; j_э = \varphi(f);$$

эквивалентные простые учетные ставки процентов –

$$d_э = \varphi(i), \; d_э = \varphi(i_c), \; d_э = \varphi(j), \; d_э = f(d_c), \; d_э = \varphi(f);$$

эквивалентные сложные учетные ставки процентов –

$$d_{cэ} = \varphi(i), \; d_{cэ} = \varphi(i_c), \; d_{cэ} = \varphi(j), \; d_{cэ} = \varphi(d), \; d_{cэ} = \varphi(f);$$

эквивалентные номинальные сложные учетные ставки процентов –

$$f_э = \varphi(i),\ f_э = \varphi(i_c),\ f_э = \varphi(j),\ f_э = f(d),\ f_э = \varphi(d_c).$$

Для нахождения эквивалентных ставок составляют уравнения эквивалентности по следующим правилам. Рассматривается результат инвестирования капитала P на срок n лет:

$$S = P + Д,$$

где Д – доход.

Эту операцию можно сопоставить с эквивалентной операцией вложения средств, например, по ставке простых процентов $i_э$. Тогда сумма вложенных средств с процентами будет равна:

$$S = P \cdot (1 + ni_э).$$

Доход по этой операции составит

$$Д = S - P = P \cdot n \cdot i_э = P \cdot i_э \cdot \frac{t}{K},$$

где t – срок операции в днях.

Следовательно, эквивалентная ставка простых процентов будет равна:

$$i_э = \frac{Д}{P \cdot n} = \frac{Д \cdot K}{P \cdot t}.$$

При учете денежных обязательств, например векселей с использованием учетной ставки, доход (дисконт) определяется формулой

$$D = n \cdot d \cdot S = S - P,$$

откуда эквивалентная ставка простых процентов будет равна:

$$i_э = \frac{D}{(S - D)n} = \frac{ndS}{S(1 - nd)n} = \frac{d}{1 - nd}.$$

На основе равенства двух выражений можно составить уравнения эквивалентности для других сочетаний различных вариантов процентных ставок. Так, например, приравнивая наращенные суммы при схемах начисления простых и сложных процентов:

$$S = P(1 + ni);\ \ S = P(1 + i_c)^n,$$

получим следующее уравнение эквивалентности:

$$P(1 + ni) = P(1 + i_c)^n,$$

из которого следует определение эквивалентной ставки простых процентов

$$i_э = \frac{(1+i_c)^n - 1}{n},$$

или эквивалентной ставки сложных процентов

$$i_{сэ} = \sqrt[n]{1+ni} - 1.$$

При начислении сложных процентов получаем следующее уравнение эквивалентности:

$$(1+i_c)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn},$$

откуда получим эквивалентную годовую ставку сложных процентов:

$$i_{сэ} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1,$$

которая определяет так называемую годовую эффективную ставку сложных процентов, эквивалентную номинальной сложной процентной ставке, и не зависит от срока операции n. Эффективная ставка сложных процентов, эквивалентная сложной учетной ставке, равна:

$$i_{сэ} = \frac{d_c}{1-d_c},$$

а эквивалентная – номинальной сложной учетной процентной ставке –

$$i_{сэ} = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{-m} - 1.$$

Эти показатели необходимы для оценки реальной доходности финансовых операций или для сравнения различных процентных ставок, что в конечном итоге позволяет вычислить доходность и аргументировать выбор варианта для инвестирования капитала.

Пример 1. Кредит на 2 года получен под 60%-ную номинальную ставку сложных процентов. Начисление происходит ежеквартально. Оцените эффективность операции через эквивалентные простую и сложную ставки процентов.

Решение. $j = 0{,}6$; $n = 2$; $m = 4$.

Эквивалентная ставка простых процентов равна:

$$P(1 + i \cdot n) = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}, \quad 1 + i \cdot n = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn},$$

$$i = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{n} = \frac{\left(1 + \frac{0{,}6}{4}\right)^{8} - 1}{2} = 1{,}03; \quad i\% = 103\%;$$

эквивалентная эффективная ставка сложных процентов –

$$P(1 + i_c)^n = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}; \quad i_c = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1 = \left(1 + \frac{0{,}6}{4}\right)^{4} - 1 = 0{,}749;$$

$$i_c = 74{,}9\%.$$

Пример 2. Определите, под какую простую ставку процентов выгоднее поместить капитал на 1 год: с ежемесячным начислением 40%, с ежеквартальным начислением 120% или с ежегодным начислением 1000%.

Решение. Доходность вариантов сравниваем по величине годовых ставок простых процентов:

$$i_1 = 40\% \cdot 12 = 480\%,$$
$$i_2 = 120\% \cdot 4 = 480\%,$$
$$i_3 = 1000\%,$$

очевидно $i_3 > i_1 = i_2$.

Следует заметить, что приведенные данные были в реальной ситуации на фондовом рынке и, как правило, по третьему варианту вкладчики так ничего и не получили (даже своего вклада), а вот по первому варианту, используя реинвестирование по трехмесячным контрактам, они получили финансовый результат, превышающий третий вариант.

Пример 3. Срок оплаты долгового обязательства составляет полгода по простой учетной ставке 40%. Оцените доходность операции по эквивалентным ставкам (считать, что номинальная ставка начисляется ежеквартально).

Решение. $d = 0{,}4$; $n = 0{,}5$; $m = 4$.

Эквивалентная простая ставка ссудного процента равна:

$$1 + ni = \frac{1}{1 - nd} \Rightarrow$$

$$i_1 = 40\% \cdot 12 = 480\%;$$

$$i = \frac{d}{1 - nd} = \frac{0{,}4}{1 - 0{,}4 \cdot 0{,}5} = \frac{0{,}4}{0{,}8} = 0{,}5; \quad i\% = 50\%;$$

эквивалентная ставка сложного процента –

$$(1 + i_c)^n = \frac{1}{1 - nd} \Rightarrow$$

$$i_c = \sqrt[n]{\frac{1}{1 - nd}} - 1 = \left(\frac{1}{1 - 0{,}5 \cdot 0{,}4}\right)^{\frac{1}{0{,}5}} - 1 = \left(\frac{1}{0{,}8}\right)^2 - 1 = 0{,}5625;$$

$$i_c\% = 56{,}25\%;$$

эквивалентная номинальная ставка сложного процента –

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}=\frac{1}{1-nd}\Rightarrow$$

$$j=m\left(\sqrt[mn]{\frac{1}{1-nd}}-1\right)=4\left(\sqrt{\frac{1}{1-0,5\cdot 0,4}}-1\right)=0,472;$$

$$j\%=47,2\%;$$

эквивалентная сложная учетная ставка –

$$\frac{1}{(1-d_c)^n}=\frac{1}{1-nd}\Rightarrow$$

$$d_c=1-\sqrt[n]{1-nd}=1-(1-0,5\cdot 0,4)^2=1-0,64=0,36;$$

$$d_c\%=36\%;$$

эквивалентная номинальная учетная ставка –

$$\frac{1}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}=\frac{1}{1-nd}\Rightarrow$$

$$f=m\left(1-\sqrt[mn]{1-nd}\right)=4\left(1-\sqrt{1-0,5\cdot 0,4}\right)=0,422;$$

$$f\%=42,2\%.$$

7.7. Модели операций с облигациями

Облигация представляет собой долговую ценную бумагу, в соответствии с которой заемщик гарантирует кредитору выплату по истечении определенного срока полной суммы долга с процентами на определенную дату в будущем.

Эмитент выпускает облигации, на которых указаны их номинальная стоимость N и срок, по истечении которого облигации выкупаются (погашаются) эмитентом по номинальной стоимости.

Покупатель, приобретающий облигации по цене, меньшей номинала, предоставляет тем самым эмитенту ссуду и практически является кредитором. В таком случае покупатель получает доход, определяемый разностью между номиналом и ценой покупки облигации и называемый дисконтом. Если к облигации прилагаются купоны, то, например, ежегодно или ежеквартально ему выплачиваются проценты по указанной на них ставке. Это является дополнительным так называемым купонным доходом.

Целью операций с облигациями являются использование одного из вариантов финансовых вложений для получения дохода и тем самым обеспечение защиты от обесценения капитала и его роста в условиях инфляции.

При расчете доходности покупки облигаций используют понятие курса, определяемого ценой облигации, выраженной в процентах от номинала:

$$P_k = \frac{P}{N} \cdot 100,$$

где P – цена облигации;

N – номинальная стоимость облигации.

Цена облигации при заданном курсе определяется по формуле

$$P = \frac{P_k \cdot N}{100} = 0{,}01 P_k N.$$

Если по облигациям выплачиваются проценты, то облигации называются процентными, а доход по каждой выплате определяется от ее номинальной стоимости:

$$I = i_{\text{обл}} \cdot N.$$

Если проценты по облигациям не выплачиваются, то источником дохода будет являться разность между ценой выкупа эмитентом (по номиналу) и ценой покупки, которая называется дисконтом, такие облигации называются дисконтными, например государственные краткосрочные обязательства (ГКО). Доход от этих облигаций находим как разность между номиналом и ценой покупки:

$$Д = N - P = N - \frac{P_k \cdot N}{100} = N(1 - 0{,}01 \cdot P_k).$$

Доходность, облигаций к погашению можно определить, например, по эквивалентной ставке простых процентов:

$$i_э = \frac{Д}{P \cdot n} = \frac{N - P}{P \cdot n} = \frac{100 - P_k}{P_k \cdot n} = \left(\frac{100 - P_k}{P_k}\right) \cdot \frac{K}{t}.$$

Доход от покупки долгосрочных облигаций с выплатой процентов будет состоять из суммы полученных процентов и разницы между ценой их погашения (номиналом) и ценой покупки.

Если проценты по облигациям выплачиваются в конце года, например, по ставке сложных процентов i_c, то сумма процентных денег при погашении облигации через n лет определяется по формуле

$$I = N(1 + i_c)^n - N = N[(1 + i_c)^n - 1];$$

общий доход –

$$Д = I + N - P = N(1 + i_c)^n - P = N\left[(1 + i_c)^n - \frac{P_k}{100}\right].$$

Доходность операции покупки-погашения облигации в виде эффективной ставки сложных процентов можно определить по формуле

$$S = P(1 + i_э)^n, \; Д = S - P - P[(1 + i_э)^n - 1].$$

На основе приведенных соотношений получим

$$i_{сэ} = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1 = \sqrt[n]{\frac{P + Д}{P}} - 1 = \frac{1 + i_c}{\sqrt[n]{\frac{p_k}{100}}} - 1.$$

При определении общего дохода следует учитывать возможность реинвестирования, если проценты выплачиваются периодически.

Пример 1. Курс облигаций номиналом 500 руб. составляет 75. Определите цену облигации.

Решение. $P_k = 75$; $N = 500$ руб.

Цена облигации равна:

$$P = \frac{P_k \cdot N}{100} = \frac{75 \cdot 500}{100} = 375 \text{ руб.}$$

Пример 2. Доход по облигациям номиналом 1000 руб. выплачивается каждые полгода по ставке 50% годовых. Вычислите сумму дохода по каждой выплате.

Решение. $N = 1000$ руб.; $i = 0{,}5$; $n = 0{,}5$.

Сумма дохода по каждой выплате:

$$I = N \cdot n \cdot i = 1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 250 \text{ руб.}$$

Пример 3. Облигации номиналом 1000 руб. и со сроком обращения 90 дней продаются по курсу 85. Определите сумму дохода от покупки 5 облигаций и доходность финансовой операции при расчетном количестве дней в году 360.

Решение. $N = 1000$ руб.; $t = 90$ дн.; $K = 360$; $P_k = 85$.

Доход от покупки одной облигации при условии ее погашения составит

$$Д_1 = \left(N - \frac{P_k \cdot N}{100}\right) = N\left(1 - \frac{P_k}{100}\right) = 1000 \cdot \left(1 - \frac{85}{100}\right) = 150 \text{ руб.}$$

Сумма дохода от покупки 5 облигаций составит

$$Д = 5 \cdot Д_1 = 5 \cdot 150 = 750 \text{ руб.}$$

Доходность облигаций к погашению по эквивалентной ставке простых процентов:

$$i_э = \frac{N - P}{P} \cdot \frac{K}{t} = \frac{1000 - 850}{850} \cdot \frac{360}{90} = \frac{150}{850} \cdot 4 = \frac{60}{85} = 0{,}706 = 70{,}6\%.$$

Пример 4. Облигации номиналом 1000 руб. и сроком обращения 180 дней были приобретены в момент их выпуска по курсу 65 и проданы через 90 дней по курсу 85. Определите доходность к погашению и текущую доходность в результате продажи для $K =$ 360 дней.

Решение. $N = 1000$ руб.; $t_1 = 180$ дн.; $\Delta t_2 = 90$ дн.; $K = 360$ дн.; $P_{k1} = 65$; $P_{k2} = 85$.

Доходность облигаций к погашению по эквивалентной ставке простых процентов:

$$i_э = \frac{N-P}{P}\cdot\frac{K}{t} = \frac{100-P_{k1}}{P_{k1}}\cdot\frac{K}{t} = \frac{100-65}{65}\cdot\frac{360}{180} = 1{,}077 \Rightarrow 107{,}7\%.$$

Текущая доходность в результате их продажи составит

$$i = \frac{P_2-P_1}{P_1}\cdot\frac{K}{\Delta t} = \frac{P_{k2}-P_{k1}}{P_{k1}}\cdot\frac{K}{\Delta t} = \frac{85-65}{65}\cdot\frac{360}{90} = 1{,}231 \Rightarrow 123{,}1\%.$$

Пример 5. Облигация куплена по курсу 95 и будет погашена через 10 лет. Проценты по облигации выплачиваются в конце срока по сложной ставке 5% годовых. Определите доходность приобретения облигации.

Решение. $P_k = 95;\ \ q = 0{,}05;\ \ n = 10;\ \ P = \dfrac{P_k \cdot N}{100} = 0{,}95N.$

Процентный доход за 10 лет составит

$$I = N(1+q)^n - N = N[(1+q)^n - 1] = N[1 + 0{,}05)^n - 1] =$$
$$= N(1{,}05^{10} - 1) = 0{,}629N;$$

доход от помещения облигации –

$$Д_п = N(1 - 0{,}01P_k) = N(1 - 0{,}95) = 0{,}05N;$$

общий доход –

$$Д = I + Д_п = 0{,}629N + 0{,}05N = 0.{,}679N.$$

Доходность покупки облигации по эффективной ставке (сложных) процентов равна:

$$i = \sqrt[n]{\frac{Д + N}{N}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{0{,}679N + N}{N}} - 1 = \sqrt[10]{1{,}679} - 1 = 1{,}053 - 1 = 0{,}053.$$

Пример 6. Банковская ставка по депозитам составит 10%, а банковская ставка по кредитам – 15%. Определите процент по облигациям, установленный при выпуске, при условии, что их курс равен 98.

Решение. $i_1 = 0{,}1$; $i_2 = 0{,}15$; $P_k = 98$.

В качестве альтернативной ставки следует выбрать процент по депозитам, тогда процент по облигациям равен:

$$i_{обл} = \frac{P_k \cdot i_1}{100} = \frac{98 \cdot 0{,}1}{100} = 0{,}098 = 9{,}8\%.$$

Пример 7. Банк А выдал банку Б межбанковский валютный кредит под залог облигаций внутреннего государственного валютного займа третьего транша. Сумма кредита определяется путем оценки облигаций по текущей рыночной стоимости за вычетом из полученной суммы дисконта (в целях страхования от ценовых рисков).

Дата выдачи кредита T_0 – 30 октября; дата погашения кредита и процентов по нему T_1 – 13 ноября; процентная ставка по кредиту составляет 13% годовых на 360 дней в году; срок кредита рассчитывается на основе полного количества календарных дней; сумма облигаций по номиналу – 1 000 000 долл. США; курс облигаций – 81; размер дисконта – 10%. Банк Б попросил банк А погасить непогашенные купоны по облигациям за 1 год и произвести расчеты по полученному купонному доходу 13 ноября (на облигации ежегодно начисляется купонный доход из расчета 3% от номинала). За погашение купонов банк А возьмет комиссию в размере 1% от суммы купонного дохода. В день погашения кредита банки договорились оформить новый кредит под заложенные облигации с переоценкой облигаций по курсу 81,7. Стороны договорились произвести 13 ноября взаиморасчеты.

Определите, какой банк должен платить 13 ноября другому банку и какую сумму?

Решение. $N = 1\,000\,000$; $i = 0{,}13$; $d = 0{,}1$; $P_0 = 81$; $P_1 = 81{,}7$;

$K = 360$; $i_{обл} = 0{,}03$; $q = 0{,}01$.

Сумма S выданного кредита:

$$S = N \cdot \frac{P_0}{100}(1-d) = 1\,000\,000 \cdot 0{,}81 \cdot (1-0{,}1) = 729\,000 \text{ долл.}$$

Сумма процентов за кредит:

$$I = \frac{S \cdot (T_1 - T_0) \cdot i}{K} = \frac{729\,000 \cdot 14 \cdot 0{,}13}{360} = 3685{,}50 \text{ долл.}$$

Сумма купонного дохода по облигациям:

$$Д_k = N \cdot i_{обл} = 1\,000\,000 \cdot 0{,}03 = 30\,000 \text{ долл.}$$

Комиссия за погашение купонного дохода:

$$C = Д_k q = 0{,}01 \cdot 30\,000 = 300 \text{ долл.}$$

Сумма нового кредита:

$$S_н = N \cdot \frac{P_1}{100}(1-d) = 1\,000\,000 \cdot 0{,}817 \cdot (1-0{,}1) = 735\,300 \text{ долл.}$$

Сведем взаимные требования сторон на 13 ноября в следующую таблицу.

Вид платежа	Банк А платит банку Б, долл.	Банк Б платит банку А, долл.
S		729000,00
I		3685,50
$Д_k$	30000,00	
C		300,00
$S_н$	735300,00	
Итого	765300,00	732985,50

В итоге 13 ноября банк А должен уплатить банку Б 32314,50 долл.

Пример 8. Брокеру фондовой биржи ММВБ поступило распоряжение 3 октября о размещении 2 млрд руб. на рынке ГКО при следующих условиях:

вложение денежных средств проводить только в краткосрочные выпуски (со сроком обращения менее полугода);

доля каждого выпуска в общем пакете должна занимать только часть объема капиталовложения и не превышать 30%;

продать весь пакет необходимо 4 ноября и вернуть деньги инвестору 5 ноября. На торгах 3 октября по краткосрочным выпускам ГКО номиналом 1 млн руб. сложились следующие цены:

№ выпуска	Дата погашения	Цена, % от номинала (курс)
21067	13.11.96	95,86
21068	20.11.96	95,00
21069	18.12.96	91,78
21070	03.01.97	89,44
21071	22.01.97	86,85

Сформируйте пакет ГКО исходя из условия получения максимальной доходности.

Рассчитайте средневзвешенную доходность пакета.

Выявите зависимость между доходностью ценной бумаги и сроком, оставшимся до ее погашения.

Решение. Под доходностью к погашению понимается доход, приносимый вложением в ценную бумагу с ожиданием ее погашения по номиналу.

Определяем доходность к погашению каждого выпуска в процентах годовых:

$$i_э = \frac{(N-P)}{P \cdot t} \cdot K \cdot 100\% = \frac{\Delta P}{P \cdot t_{\text{пог}}} \cdot K \cdot 100\%,$$

где ΔP – прирост в цене от текущего момента до погашения:

$$\Delta P = N - P = N\left(1 - \frac{P_k}{100}\right),$$

где $t_{\text{пог}}$ – количество дней до погашения;
K – количество дней в году, $K = 360$ дн.

Результаты расчетов представим в виде таблицы.

№ выпуска	Дней до погашения, $t_{\text{пог}}$	ΔP, %	$i_э$, % годовых
21067	40	4,14	38,87
21068	47	5,00	40,31
21069	75	8,22	42,99
21070	91	10,56	46,71
21071	110	13,15	49,55

Из полученных результатов следует, что доходность ценной бумаги снижается с уменьшением срока, остающегося до ее погашения.

Исходя из требований инвестора необходимо перечислить по 600 млн руб. (30% от 2 млрд руб.) на покупку выпусков 21071, 21070, 21069 и на оставшиеся 200 млн руб. купить бумаги выпуска 21068.

Рассчитаем точное количество бумаг по каждому из приобретаемых выпусков:

№ выпуска	Объем капиталовложений, руб.	Стоимость 1-й бумаги, руб.	Количество бумаг	Остаток от вложений, руб.
21071	600000000,00	868500,00	690	735000,00
21070	600000000,00	894400,00	670	752000,00
21069	600000000,00	917800,00	653	676600,00
21068	200000000,00	950000,00	210	500000,00

Просуммировав все остатки от вложений, получим 2663600,00 руб. свободных (невложенных) средств. Поскольку мы уже исчерпали 30% лимита по выпускам 21069–21071, следовательно, остаток средств надо потратить на покупку облигаций выпуска 21068. На оставшуюся сумму покупаем еще две бумаги данного выпуска, получая в остатке 763600,00 руб.

Окончательно сформированный пакет выглядит следующим образом:

№ выпуска	Количество бумаг, шт.	Объем капиталовложений
21071	690	5992650,00
21070	670	599248000,00
21069	653	599323400,00
21068	212	201400000,00
Свободные средства		763600,00

Подсчитаем средневзвешенную доходность к погашению полученного пакета ценных бумаг по следующей формуле:

$$\overline{i_э} = \sum_{l=1}^{n} \frac{i_{эl} \cdot V_l}{V_\Sigma} = \frac{1}{V_\Sigma} \sum_{l=1}^{n} i_{эl} \cdot V_l,$$

где $i_{эl}$ – доходность к погашению первого выпуска;
V_l – объем вложений в первый выпуск;
V_Σ – суммарный объем всех капиталовложений;
V_Σ – 2000000000,00 – 763600,00 – 1999236400,00 руб.

В результате подсчета получаем: $\overline{i_э} = 45{,}80\%$ годовых.

Пример 9. Утром 29 октября брокеру поступило распоряжение срочно продать весь пакет ГКО, сформированный по условиям примера 8, если 29 октября на торгах по краткосрочным выпускам ГКО сложились следующие цены (номинал каждой ценной бумаги – 1,0 млн руб.):

№ выпуска	Дата погашения	Цена, % от номинала (курс)
21067	13.11.96	98,53
21068	20.11.96	97,80
21069	18.12.96	94,86
21070	03.01.97	93,04
21071	22.01.97	90,22

В силу специфики расчетов на ММВБ и расчетов с инвестором средства от реализации пакета поступят на счет инвестора на второй рабочий день от момента реализации.

Определите доход в рублях, полученный от вложения в ГКО, а также доходность в процентах годовых (из расчета 360 дней в году и полного количества дней в периоде) по данной финансовой операции с позиции инвестора.

Решение. Определяем сумму, полученную от реализации этого пакета:

№ выпуска	Количество бумаг, шт.	Цена, % от номинала	Общая сумма, руб.
21071	690	90,22	622518000,00
21070	670	93,04	623368000,00
21069	653	94,86	619435800,00
21068	212	97,80	207336000,00
Свободные средства	763600,00 руб.		763600,00
Итого			2073421400,00

Доход, полученный от вложения в ГКО, составляет:

$$Д = 2073421400{,}00 - 2000000000{,}00 = 73421400{,}00 \text{ руб.}$$

Доходность определяется по формуле

$$i_э = \frac{Д}{P \cdot \Delta t} \cdot K \cdot 100\%,$$

где Д – полученная прибыль;

P – вложенная сумма;

Δt – количество дней в периоде (необходимо рассчитывать количество дней от 03.10 до 31.10, учитывая 2 дня, необходимые для передачи средств инвестору), т.е. $\Delta t = 28$ дням;

$K = 360$ – количество дней в году.

$$i_э = \frac{73421400{,}00}{2000000000{,}00 \cdot 28} \cdot 360 \cdot 100\% = 47{,}2\%.$$

7.8. Модели операций с акциями

Акция представляет собой долевую ценную бумагу, в которой указывается непосредственная доля держателя акции в реальной собственности, и обеспечивает получение дивиденда. В зависимости от порядка начисления и выплаты дивидендов акции делят на привилегированные и обыкновенные.

Дивиденды по привилегированным акциям объявляются в фиксированных процентах от номинальной ее стоимости N и определяются по формуле

$$D_1 = f \cdot N,$$

где f – годовая ставка дивиденда.

Доход на одну обыкновенную акцию равен:

$$Д_0 = \frac{ЧП - D_{пр}}{M_0},$$

где M_0 – количество обыкновенных акций;
ЧП – распределяемая чистая прибыль;
$D_{пр}$ – дивиденд по всем привилегированным акциям

$$D_{пр} = M_{пр} \cdot D_1;$$

$M_{пр}$ – количество привилегированных акций.

Обычно на выплату дивидендов по обыкновенным акциям может идти не весь доход, а только его часть, поэтому величина выплачиваемого дивиденда определяется дивидендным выходом:

$$D_{вых} = \frac{D_0}{Д_0},$$

где D_0 – дивиденд на одну обыкновенную акцию.

Доходность по акциям определяется доходом от выплачиваемых дивидендов, а также разницей в цене покупки и продажи, что и определяет эффективность инвестиций:

$$Э = \frac{P_1 - P_a + D}{P_a},$$

где P_a – цена покупки;
P_1 – цена продажи;
D – дивиденды за время владения акцией.

Для проведения анализа операций с акциями необходимо проводить расчеты по нескольким показателям.

Доходность текущая без учета налогообложения определяется по формуле

$$i_T = \frac{D}{P_a},$$

где P_a – курсовая стоимость акции.

Курсовая стоимость акции определяется в сравнении с банковской депозитной ставкой i:

$$P_a = \frac{D}{i}.$$

Доходность конечная определяется суммой дивидендов и дополнительным доходом от перепродажи:

$$i_э = \frac{D \cdot n + P_1 - P_a}{P_a \cdot n}.$$

Доходность текущая с учетом налогообложения определяется выражением:

$$i_{тн} = \frac{D(1 - i_н)}{P_a} \cdot 100\%,$$

где $i_н$ – ставка налогообложения.

Курсовая стоимость определяется и от номинальной цены акции:

$$P_a = \frac{f}{i} \cdot N.$$

Рыночная цена акций определяется спросом, и в связи с этим находится показатель ценности акций на рынке:

$$\frac{P}{E}=\frac{P_a}{Д_a}.$$

При долгосрочных операциях с акциями можно применять формулы определения эквивалентных ставок простых и сложных процентов:

$$S = P(1 + ni_э);\ \ S = P(1 + i_э)^n.$$

Доход от финансовых операций в таких случаях определяется так:

$$Д = S - P = ni_э P;\ \ Д = P\,[(1 + i_э)^n - 1],$$

откуда исчисляются эквивалентные ставки простых и сложных процентов:

$$i_э=\frac{Д}{n\cdot D};\ \ i_{cэ}=\sqrt[n]{\frac{P+Д}{P}}-1=\sqrt[n]{1+\frac{Д}{P}}-1.$$

Пользуясь приведенными моделями, можно проводить сравнение выгодности финансовых операций с акциями и, следовательно, решать задачу выбора оптимального инвестиционного проекта.

Пример 1. Банк объявил, что дивиденды по его акциям за прошедший год составляют 20% годовых по обыкновенным акциям и 30% годовых по привилегированным. Определите сумму дивиденда на одну привилегированную акцию номиналом 3000 руб. и одну обыкновенную акцию номиналом 1000 руб.

Решение. Сумма дивиденда на одну привилегированную акцию равна: $D_{пр} - 0{,}3 \cdot 3000 = 900$ руб.;

сумма дивиденда на одну обыкновенную акцию –

$$D_0 = 0{,}2 \cdot 1000 = 200 \text{ руб.}$$

Пример 2. Определите ожидаемый доход от покупки акции номиналом 1000 руб. от ежегодного получения дивидендов в размере 20% годовых и ежегодного роста стоимости на 10% от номинала, если акция будет продана через 5 лет, а также доходность операции.

Решение. N – 1000 руб.; $f = 0{,}2$; $n = 5$ лет; $\Delta P_1 = 0{,}1N$.

Величина годовых дивидендов за 5 лет составит:

$$Д = n \cdot f \cdot N = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 1000 \text{ руб.}$$

Стоимость акции через 5 лет –

$$P_a = N + 0{,}1 \cdot N \cdot 5 = N(1 + 0{,}5) = 1500 \text{ руб.};$$

общий доход –

$$Д_a = D + P_a - N - 1000 + 1500 - 1000 = 1500 \text{ руб.}$$

Доходность покупки акции в виде эквивалентной ставки сложных процентов составит:

$$i_{сэ} = \sqrt[n]{\frac{N + Д_a}{N}} - 1 = \sqrt[5]{\frac{1000 + 1500}{1000}} - 1 = 1{,}204 - 1 = 0{,}201 \Rightarrow 20{,}1\%.$$

Пример 3. АО с уставным фондом 1 млн руб. имеет следующую структуру капитала: 85 обыкновенных акций и 15 привилегированных. Размер прибыли к распределению между акционерами составляет 120 тыс. руб. Фиксированный дивиденд по привилегированным акциям составляет 10%. Определите дивиденды для владельца обыкновенной акции.

Решение. ЧП = 120 000 руб.; $M_0 = 85$; $M_{пр} = 15$; УК = 100 000 руб.; $f = 0{,}1$.

Номинал одной акции находим как отношение уставного фонда к общему числу акций:

$$N = \frac{УК}{M_0 + M_{пр}} = \frac{1\,000\,000}{(85 + 15)} = 10\,000 \text{ руб.};$$

выплаты по всем привилегированным акциям равны:

$$Д_{пр} = M_{пр}Д_1 = N \cdot 15 \cdot f = 10\,000 \cdot 15 \cdot 0{,}1 = 15000 \text{ руб.};$$

выплаты на одну обыкновенную акцию —

$$Д_о = \frac{ЧП - Д_{пр}}{M_0} = \frac{120\,000 - 15\,000}{85} = 1235 \text{ руб. } 29 \text{ коп.}$$

Пример 4. Балансовая прибыль АО с уставным фондом 2 млн руб., полученная от производственной деятельности, составила 10 млн руб. Собрание акционеров постановило, что оставшуюся после уплаты налогов прибыль следует распределить так: 20% — на развитие производства, а 80% — на выплату дивидендов. Определите курс акций, если банковский процент составляет 80%, номинал акции — 100 руб., а ставки налога на прибыль — 32%.

Решение. УК = 2 000 000 руб.; БП = 1000 000 руб.; $Д_{вых} = 0{,}8$; $i = 0{,}8$; $N = 100$ руб.; $W = 0{,}32$.

Количество акций АО равно:

$$M = \frac{УК}{N} = \frac{2\,000\,000}{100} = 20\,000 \text{ шт.};$$

прибыль после уплаты налогов составит:

$$ЧП = БП(1 - W) = 10\,000\,000 \cdot (1 - 0{,}32) =$$
$$= 6\,800\,000 \text{ руб.} = 6{,}8 \text{ млн руб.};$$

величина дивидендов на выплату акционерам —

$$D_{\Sigma} = ЧП \cdot Д_{вых} = 6\,800\,000 \cdot 0{,}8 = 5\,440\,000 \text{ руб.};$$

выплата дивидендов на одну акцию —

$$D_1 = \frac{Д_{\Sigma}}{M} = \frac{5\,440\,000}{20\,000} = 272 \text{ руб./акц.};$$

курс акции составляет:

$$P_a = \frac{Д_1}{i} = \frac{272}{0{,}8} = 340 \text{ руб.}$$

Рассмотрим пример, связанный с финансами предприятий, иллюстрирующий, как по данным бухгалтерской отчетности предприятия можно рассчитать его реальную стоимость и стоимость одной акции.

Пример 5. Рассчитайте реальную стоимость предприятия на 01.07, а также стоимость одной акции АО «Дорстрой» номиналом $N = 50$ руб. на основе следующих данных:

уставный капитал $У_k = 2115$ тыс. руб.;

активы по балансу предприятия $A_k = 3\,000\,475$ тыс. руб.;

непроизводственные основные средства других отраслей $H_c = 43266$ тыс. руб.;

балансовая прибыль за отчетный период БП = 99115 тыс. руб.;

начисленная за период амортизация $A_м = 4328$ тыс. руб.;

платежи в бюджет за отчетный период ПБ = 34690,2 тыс. руб.;

средства, направленные на погашение кредитов и уплату процентов по ним $Kp = 9700$ тыс. руб.;

норма дисконта $d = 0,2$;

кредиты и другие заемные средства КЗ = 515 904 тыс. руб.;

убытки (по балансу) У = 112 531 тыс. руб.;

курс доллара на дату баланса $K_д = 5115$ руб. на 01.07.96 г.;

средний курс доллара США за период $K_c = 4856$ руб.;

коэффициент риска (учитывающий нефинансовые критерии) $K = 0,2$.

Решение. Балансовая оценка стоимости имущества предприятия (без учета задолженности):

$$БС = \frac{(А_К - НС)}{К_Д} = \frac{(3\,000\,475 - 43\,266)}{5115} = 578{,}14 \text{ тыс. долл.}$$

Оценим стоимость предприятия по методу будущей доходности:

денежный поток за анализируемый период составит

$$Д_п = (БП + A_м - ПБ - Kp) \cdot K_c =$$
$$= (99115 + 4328 - 34\,690{,}2 - 9\,700) \cdot 4856 = 12{,}16 \text{ тыс. долл.};$$

годовой денежный поток –

$$Д^г{}_п = Д_п \cdot 2 = 12{,}16 \cdot 2 = 24{,}32 \text{ долл.};$$

стоимость предприятия –

$$C_{д}=\frac{Д_{п}^{г}}{Д}=\frac{24,32}{0,2}=121,61 \text{ тыс. долл.}$$

Рассчитаем максимальную среднюю стоимость предприятия:

$$\bar{C}_{max}=\frac{(C_{д}+БС)}{2}=\frac{(121,61+578,14)}{2}=349,88 \text{ тыс. долл.};$$

задолженность предприятия –

$$З=\frac{(КЗ+У)}{К_{д}}=\frac{(515\,904+112\,531)}{5115}=122,86 \text{ тыс. долл.};$$

максимальную стоимость предприятия за вычетом задолженности –

$$\bar{C}_{max}=\bar{C}_{max}-З=349,88-122,86=227,02 \text{ тыс. долл.};$$

стоимость предприятия по состоянию на 01.07 –

$$C=\bar{C}_{max}\cdot K=227,02\cdot 0,2=45,4 \text{ тыс. долл.};$$

стоимость одной акции предприятия на 01.07 –

$$C_{A}=\frac{C}{\frac{У_{K}}{N}}=\frac{45\,400}{\frac{2115}{0,05}}=1,07 \text{ долл.}$$

Таким образом, стоимость АО «Дорстрой» составляет 45,4 тыс. долл., а стоимость одной акции АО номиналом 50 руб. – 1,07 долл.

Контрольные вопросы

1. Каково содержание финансово-коммерческой операции?
2. Каковы показатели финансово-коммерческой операции?

3. Приведите пример механизма развития финансово-коммерческой операции по схеме простых процентов.

4. Каков механизм развития коммерческих операций по схеме сложных процентов?

5. Как следует учитывать инфляцию в коммерческих операциях?

6. Как можно использовать вексель в коммерческих операциях?

7. Поясните на моделях утверждение коммерческой сферы: сумма, полученная сегодня, больше той же суммы, полученной завтра.

8. Как следует сравнивать финансово-коммерческие операции?

9. Каким образом можно использовать операции с ценными бумагами в коммерческом деле?

Задачи

1. Инвестсбербанк предоставлял валютные кредиты под 30% годовых, а рублевые кредиты – под 36% годовых. Какой вариант кредита на сумму 100 000 долл. предпочтительнее было взять заемщику в январе 1998 г. на 2 года, если курс покупки тогда составлял 6 руб. за доллар (США).

2. Банки предлагали специальные долгосрочные кредиты на покупку автомобиля на следующих условиях: максимальный срок кредита – 10 лет, максимальная сумма кредита – 10 000 долл. Для получения кредита необходимо иметь гарантию поручителя.

Первый вариант: ставка начисления процентов – 15% к сумме в долларах, или 24% к сумме в рублях.

Второй вариант: в момент выдачи кредита выплачивается 30% стоимости автомобиля, а 70% его стоимости – сумма кредита, тогда ставка процента – 20% от суммы долларового кредита.

Третий вариант: срок кредита – 1,5 года, предоплата – 30% стоимости автомобиля, сумма кредита – 70% от стоимости, ставка – 20% годовых к сумме в долларах.

Четвертый вариант: срок кредита – 1 год, сумма кредита – не ограничена, предоплата – 30%; сумма кредита – 70%, ставка процента 18% к сумме в долларах.

Определите наиболее выгодный вариант покупки автомобиля стоимостью 6000 долл.

3. Московский банк предлагал ипотечные ссуды на срок до 10 лет под залог покупаемой недвижимости для физических лиц на условиях оплаты заемщиком 30% стоимости, например квартиры, на момент получения кредита; сумма кредита при наличии 4–5 гарантов (физических или юридических лиц) – 70%.

Постройте сетевую модель взаимодействия участников операции покупки квартиры под залог квартиры стоимостью 30 000 долл. США и найдите минимальный срок кредита. Ставка процентов по валютному кредиту – 15% и по рублевому кредиту – 24%.

4. Под какой процент, когда и на какой срок могла взять кредит на сумму 4450 долл. для приобретения автомобиля «ВАЗ-2106» в сентябре 98 г. через фирму INTO студентка РГТЭУ 3-го курса у 50 студентов своего потока, если обменный пункт покупал доллар 08.09.98 г. по цене 21,5 руб., а 15.09.98 г. продавал по цене 10,8 руб. за доллар?

5. В контракте за оплату коммерческих услуг можно записать к получению либо непосредственно в момент совершения операции 5000 руб., либо через 6 месяцев – 10 000 руб.

Определите минимальную сумму, которую выгодно получить в момент совершения операции, если банковская ставка составляет сложные 80% годовых.

6. Автобанк принимает вклады до востребования под 12% годовых. Определите эквивалентное значение учетной ставки при учете векселя в день его погашения со сроком обращения 200 дней и количестве дней в году 360, чтобы обеспечить эквивалентную доходность при приеме вкладов до востребования.

7. Месячная заработная плата 01.02 составила 900 руб., а цена товара – 18 000 руб. 01.08 заработная плата достигла 1500 руб., а цена товара повысилась до 36 000 руб. Среднемесячный уровень инфляции в рассматриваемый период составил 10%. Как изменилась (в рублях и процентах) реальная цена товара с учетом инфляции и как изменилась реальная заработная плата за рассматриваемый период?

8. Инфляция за прошедший год по месяцам составила соответственно 7, 5, 6, 9, 10, 12, 6, 8, 7, 11, 9, 7%. Определите уровень инфляции за год; средний ежемесячный уровень инфляции; на сколько процентов возросли цены с 01.01 по 01.04; во сколько раз возросли цены на 01.11 по отношению к ценам на 01.02; на сколько процентов цены на 01.06 будут ниже цен на 01.10?

9. В течение 5 лет на счет в банк поступают в конце года регулярные платежи по 10 000 руб., на которые начисляют проценты по сложной годовой ставке 12%. Определите наращенную сумму и современную величину ренты.

10. Страховая компания заключила договор с фирмой «Прогресс» на страховку ее бензозаправочных станций сроком на 3 года. Поступающие ежегодные взносы по 5 млн руб. размещаются в банке, обслуживающем страховую компанию, под сложные 16% годовых с ежеквартальным начислением процентов.

Определите сумму, полученную страховой компанией, при условии отсутствия страховых случаев.

11. Выберите вариант формирования договора с банком, обслуживающим фирму, для создания фонда модернизации основных средств в течение 3 лет в размере 200 млн руб.: 1) внесение рентных платежей по полугодиям под сложные 20% годовых с ежеквартальным начислением процентов; 2) внесение рентных платежей также по полугодиям под сложные 20% годовых с начислением процентов по полугодиям. Определите современную величину ренты наиболее выгодного варианта.

12. Пенсионер подал в суд на Пенсионный фонд РФ, который в течение 10 лет недоплачивал ежемесячно 120 руб. пенсии. Суд обязал фонд выплатить все недоплаченные деньги с процентами по номинальной сложной ставке 12% годовых с ежемесячным начислением процентов. Определите сумму выплаты.

13. По контракту заказчик после окончания строительства здания строительной фирмой производит оплату в течение 3 лет равными ежегодными платежами по 8000 руб. в конце каждого года. Проценты начисляются по сложной ставке 20% годовых.

Определите наращенную сумму.

14. По кредитному договору фирма выплачивает по полугодиям пренумерандо по 8000 руб. банку в течение 2 лет. Проценты начисляются ежеквартально по сложной ставке 15% годовых. Определите наращенную сумму.

15. ЗАО «Прогресс», имея пакет из 80 облигаций номиналом 1000 руб., купоном 8%, дисконтом 15% и 35 облигаций номиналом – 500 руб., купоном – 10%, ажио – 5%, решило инвестировать полученный годовой доход в акции курсовой стоимостью 100 руб. Определите, какое количество акций можно приобрести на полученную сумму?

16. Облигация номиналом 1000 руб. приобретена с дисконтом 20% и сроком погашения 5 лет. Купонный процент – 10% годовых. Определите доходность текущую и при погашении.

17. Какую сумму необходимо положить в банк, чтобы в течение следующих 10 лет ежемесячно снимать со счета по 3000 руб. Банк начисляет проценты по номинальной сложной ставке 12% годовых с ежеквартальным начислением процентов.

18. Привилегированные акции номиналом 1000 руб. были куплены в количестве 10 шт. по цене 1200 руб.; а через 2 года по цене 25 000 руб. за шт. Дивиденд по акциям за первый год составил 40% годовых, за второй – 60% годовых.

Рассчитайте доход, полученный по акциям, и доходность их купли-продажи в виде эффективной ставки простых и сложных процентов.

19. Акционерное общество с уставным фондом 1 млн руб. в составе капитала имеет 85 обыкновенных и 15 привилегированных акций. Прибыль к распределению между акционерами составляет 115 000 руб. Фиксированная ставка дивиденда по привилегированным акциям – 20%.

Определите величину дивиденда владельцев обыкновенных акций.

20. АО в 1992 г. выпустило 100 тыс. обыкновенных акций номинальной стоимостью 100 руб. Инвестор приобрел в 1993 г. пакет, состоящий из 100 шт. этих акций, по цене 150 руб. за акцию. Через год рыночная цена составила 300 руб. Ставка дивиденда по акциям равна 60%.

Рассчитайте текущую доходность пакета акций инвестора.

21. Тамара через 28 лет уйдет на пенсию. Она планирует накопить в Пенсионном фонде к тому времени 200 тыс. долл.

Определите, сколько Тамара должна ежеквартально отчислять в фонд, если номинальная сложная ставка 14% годовых с ежеквартальным начислением процентов; сколько она реально внесет в фонд; какую сумму процентов Тамара получит в фонде.

22. Фермер купил новый трактор за 3000 долл. с рассрочкой по годовой сложной ставке 12%. Он должен погасить сумму задолженности в течение 6 лет.

Определите ежегодную сумму платежей и общую сумму выплаченных процентов.

23. Фермер купил новый дом за 14 500 долл. Первоначальный взнос – 20% от стоимости дома. Оставшуюся сумму он должен погашать в течение 20 лет ежемесячными платежами, номинальная ежеквартальная сложная ставка – 4%.

Определите, какова сумма ежемесячных отчислений, какую сумму процентов необходимо выплатить за пользование кредитом, сколько еще надо будет выплатить спустя 10 лет?

24. Семья приобрела у строительной компании «Траст» дом за 5 млн руб. по контракту, в соответствии с которым погашение долга происходит равными ежегодными платежами в течение 10 лет на условиях 6% годовых за величину долга. Компания продает контракт банку, который получает по ссудам 8% годовых.

Определите сумму, полученную компанией в банке за контракт, и доход банка.

25. ЗАО «Автомир» продало автомобиль за 150 000 руб., получив в момент продажи 30 000 руб., и предоставило покупателю кредит на величину долга под сложную номинальную ставку 8% годовых с ежеквартальным начислением процентов, который должен быть погашен в течение 3 лет равными платежами раз в квартал.

Определите: доходность операции, если ожидаемая среднегодовая инфляция составит 20%; оптимальное значение годовой ставки процента кредита.

26. Брокеру фондовой биржи ММВБ поступило распоряжение 04.10.96 о размещении 2 млрд руб. на рынке ГКО при следующих условиях: вложение денежных средств проводить только в краткосрочные выпуски (со сроком обращения менее полугода); доля каждого выпуска в общем платеже должна занимать только часть объема капиталовложения; продать весь пакет необходимо 31.10.96 и вернуть деньги инвестору 04.11.96. На торгах по краткосрочным выпускам ГКО номиналом 1 млн руб. сложились следующие цены:

№ выпуска	Дата погашения	Цена, % от номинала
21067	13.11.96	95,86
21068	20.11.96	95,00
21069	18.12.96	91,78
21070	03.01.97	89,44
21071	22.01.97	86,95

Сформируйте пакет ГКО для получения максимальной доходности.

Инвестор в целях снижения ценового риска дополнительно распорядился по 30% от выделенной суммы направить на покупку ГКО выпусков 21071,21070 и 21069, а на оставшиеся 200 млн руб. купить бумаги выпуска 21068. Определите точное количество бумаг по каждому из приобретенных выпусков и величину свободных средств.

Рассчитайте доходность пакета; определите зависимость доходности ценной бумаги от срока, оставшегося до ее погашения.

Утром 29.10.96 от инвестора брокеру ММВБ поступило распоряжение продать сразу же на торгах весь сформированный пакет ГКО. В этот день по краткосрочным выпускам ГКО сложились следующие цены:

№ выпуска	Дата погашения	Цена, % от номинала
21067	13.11.96	98,53
21068	20.11.96	97,80
21069	18.12.96	94,86
21070	03.01.97	93,04
21071	22.01.97	90,22

Определите прибыль в рублях, а также доходность всей операции с позиции инвестора.

27. Сформируйте пакет облигаций для инвестирования 10 млн руб., если срок инвестирования – 2 года, номинал облигаций – 1000, количество купонных выплат – 2, рыночная норма доходности – 16%, ставка купонного дохода – 3% и выплачивается 15 мая, при следующих данных на 25.09.96:

№ выпуска	Дата погашения	Текущий курс на 25.09.96	Прогнозируемый курс на 25.09.98
3	14.05.1999	77,7	94,4
4	14.05.1999	52,4	66,7
5	14.05.1999	34,35	45,6
6	14.05.1999	40,55	52,6
7	14.05.1999	29,5	33,1

Определите доходность с учетом оплаты комиссии от продажи ГКО по курсу 99,5 на 10.01.97.

28. Лена вкладывает 265 долл. на свой счет в банке в начале каждого месяца в течение 9 лет. Номинальная сложная процентная ставка равна 18% с ежемесячным начислением процентов. Какая сумма будет на счете через 9 лет? Какой доход получит Лена?

29. В течение 10 лет семья решила накопить 360 000 руб. для оплаты в будущем обучения сына в университете. Банк начисляет проценты по сложной ставке 18% годовых.

Определите величину ежегодного регулярного платежа и современную величину ренты.

30. В течение 5 лет необходимо накопить 120 000 руб. для покупки автомобиля. Банк начисляет проценты ежеквартально по сложной номинальной ставке 18% годовых.

Определите величину ежемесячного регулярного взноса и современную величину ренты.

31. Марианна приобрела компьютер в кредит. Первоначальный взнос она сделала в размере 1500 долл., остальную сумму ежемесячно будет вносить по 125 долл. в течение 60 месяцев. Ежеквартальная процентная ставка по кредиту равна 1,5%. Какую сумму выплатит Марианна за компьютер?

32. Володя собирается переводить ежемесячно по 150 долл. на счет в банк в течение 10 лет. Ежемесячная процентная ставка равна 1%. Какая сумма будет накоплена при условии перевода денег в начале и в конце месяца?

33. Коммерческое предприятие продает банку контракт, по которому покупатель за мебельный гарнитур должен ежемесячно выплачивать по 10 000 руб. в течение полугода. Какую сумму выплатит банк коммерческому предприятию, если начисляются проценты по номинальной ставке 12% годовых?

Определите доход банка и потерю коммерческого предприятия, сумму платы банка за риск.

34. Фермер поставил в розничное предприятие овощей на 3 млн руб. в соответствии с контрактом, по которому предприятие обязано проводить оплату контракта ежемесячно равными долями в течение полугода. Поскольку деньги потребовались немедленно, то фермер продал контракт банку с учетом ежемесячной номинальной сложной процентной ставки 12% годовых.

Определите сумму, полученную фермером в банке.

35. Брокер по поручению фирмы приобрел портфель облигаций трех видов со следующими показателями:

Облигации	Количество	Номинальная стоимость, руб.	Срок погашения, лет	Ставка купонного дохода	Количество выплат в год	Цена приобретения, руб.
01	30	200	5	10	2	170
02	20	100	6	7	1	80
03	10	150	4	9	1	130

Определите доходность портфеля облигаций.

36. Фирма приобрела портфель облигаций нескольких видов, имеющих следующие характеристики:

Облигации	Количество	Номинальная стоимость, руб.	Срок погашения, лет	Стажа купонного дохода	Количество выплат в год	Цена приобретения, руб.
01	15	400	10	8	2	300
02	25	300	8	12	4	300
03	10	1000	6	14	2	1100
04	30	200	5	8	1	170

Определите доходность портфеля облигаций.

37. Фирма взяла кредит на 3 дня под 15% годовых для приобретения государственных ценных бумаг номинальной стоимостью 100 000 руб., сроком погашения 1 год и текущим уровнем доходности 20%.

Определите цену продажи ценной бумаги через три дня для покрытия расходов по кредиту и получения прибыли в размере 25% годовых без учета налогообложения.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Глава 1

1.3

1. Breitling. 2. Moulinex. 3. Electrolux. 4. Motorola V3688.

6. Год выпуска, год покупки, модель, мощность двигателя, расход бензина на 100 км, цвет, ремонтопригодность, обеспеченность запчастями, вес, пассажировместимость, максимальная скорость, вероятность угона, емкость топливного бака, длина, цена, дорожный просвет, год начала выпуска модели, грузоподъемность, кондиционер, общее состояние, необходимость дополнительных затрат, сигнализация, удаленность фирмы от дома, наличие гарантии, проведение предпродажной подготовки по 54 узлам, удовлетворенность предварительного переговора по телефону, механизм обслуживания, перечень дополнительных работ по желанию клиента, время работы фирмы на рынке автомобилей, содержание рекламы, состояние салона продажи, удобство подъезда, затраты времени на приобретение автомобиля.

7. Lada – Favorit. 8. Нет решения. 9. INNA – TUR. 10. Bosch. 11. YASHICA.

Глава 2

2.2

1) $\Pi = \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{p_j} \cdot x_j (x_j - c_j) \to \max$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{p_j} x_j \ge Q_{\text{пл}}, \quad j = \overline{1, n} \quad \text{товарооборот} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} q_j^s \overline{p_j} x_j \le S \quad \text{площадь} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} q_j^l \overline{p_j} x_j \le b^l, \quad l = \overline{1, L} \quad \text{время} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} q_j^h x_j \overline{p_j} \le b^h, \quad h = \overline{1, H} \quad \text{издержки} \\ q_j^s x_j \le S_j \\ x_j \ge Q_{j\text{пл}} \end{cases}$$

2) $Q = \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{p_j} \cdot x_j \to \max$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{p_j} x_j (x_j - c_j) \ge \Pi_{\text{пл}} \quad \text{прибыль} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} q_j^s \overline{p_j} x_j \le S, \quad j = \overline{1, n} \quad \text{площадь} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} q_j^l \overline{p_j} x_j \le b^l, \quad l = \overline{1, L} \quad \text{время} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} q_j^h x_j \overline{p_j} \le b^h, \quad h = \overline{1, H} \quad \text{издержки} \\ x_j \ge Q_j \text{пл} \end{cases}$$

3) $$\Pi = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{R}\Pi_{jr}\cdot\overline{p}_{jr}\cdot x_{jr}\to\max$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{R}S_{jr}\cdot\overline{p_{jr}}\cdot x_{jr}\le S, & j=\overline{1,n}\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{R}q_{jr}^{l}\cdot\overline{p_{jr}}\cdot x_{jr}\le b^{l}, & r=\overline{1,R}\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{R}q_{jr}^{l}\cdot\overline{p_{jr}}\cdot x_{jr}\le b^{n}, & n=\overline{1,H}\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{R}\overline{p_{jr}}\cdot x_{jr}\ge Q_{\text{пл}}, & l=\overline{1,L}\\ q_{jr}^{\min}\le\overline{p_{jr}}x_{jr}\le q_{jr}^{\max} & \end{cases}$$

4) $$Q = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{R}\overline{p_{jr}}\cdot x_{jr}\to\max$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{R}\Pi_{jr}\cdot\overline{p_{jr}}\cdot x_{jr}\ge \Pi_{\text{пл}}, & j=\overline{1,n}\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{R}S_{jr}\cdot\overline{p_{jr}}\cdot x_{jr}\le S, & r=\overline{1,R}\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{R}q_{jr}^{l}\cdot\overline{p_{jr}}\cdot x_{jr}\le b^{l}, & l=\overline{1,L}\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{R}q_{jr}^{h}\cdot\overline{p_{jr}}\cdot x_{jr}\le b^{h}, & h=\overline{1,H}\\ q_{jr}^{\min}\le\overline{p_{jr}}x_{jr}\le q_{jr}^{\max} & \end{cases}$$

5) $$C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{R}c_{ijr}\cdot x_{ijr}\to\min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ijr} \le 3_{jr}, & i=\overline{1,m} \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ijr} \ge S_r, & j=\overline{1,n} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ijr} \ge M_{ir}, & r=\overline{1,R} \end{cases}$$

6) $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{R} b_r \cdot N_j \ge S_j & \text{спрос} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} b_r \ge M_{ir} \\ \sum\limits_{r=1}^{R} x_{ij} b_r \le x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n} N_j \end{cases}$$

7) $$C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{R} b_r \cdot N_j \ge S_j, & j=\overline{1,n} \\ \sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij} b_r \ge M_{ir} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum\limits_{j}^{n} N_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{R} N_j b_r \ge S \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{\pi=1}^{R} M_{ir} \ge \sum\limits_{j=1}^{n} S_j \end{cases}$$

9) $$\overline{T} = \left\{ \frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} N_j t_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot N_j} \right\} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{ij} t_{ij} \le T\max, & j = \overline{1, n} \\ \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{r=1}^{R} x_{ij} N_j b_r \ge S, & r = \overline{1, R} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} N_j \ge N\min, & i = \overline{1, m} \\ x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если пункт } i \text{ прикреплен к центру;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases} \end{cases}$$

2.3.1.

1а) $F_{\min} = -12$; (2; 6), $F_{\max} = 31{,}2$ $(6;\ \frac{6}{5})$

1б) $F_{\min} = 16\frac{2}{3}\left(\frac{5}{6};\ \frac{5}{6}\right)$, $F_{\max} = 42$ (0; 7)

2а) $F_{\min} = -42$ {3; 0}, $F_{\max} = 0$ (1; 7)

2б) $F_{\min} = \frac{-24}{5}\left(3;\ \frac{3}{5}\right)$, $F_{\max} = 6$ (0; 3)

3а) $F_{\min} = -12$ (6; 0), $F_{\max} = \frac{528}{19}\left(\frac{24}{19};\ \frac{96}{19}\right)$

3б) $F_{\min} = -9$ (3; 0), $F_{\max} = 15$ (3; 4)

4а) $F_{\min} = -6$ (0; 4), $F_{\max} = 19\frac{2}{3}\left(6\frac{11}{13};\ \frac{12}{13}\right)$

4б) $F_{\min} = 16$ (0,5; 3,5), $F_{\max} = 60$ (0; 15)

5) (2000 дет., 1500 дет.); 445 тыс. руб.

6) (2; 3); 70 млн руб.

7) (88 ст., 222 шк.); 403,4 тыс. руб.

8) (5 скор., 10 пасс.); 9540 чел.

9) (242 чеб.; 209 бел.); 2888 руб.

10)(9700,5200); 217 600 руб.

11) (750 ваз; 100 граф.); 1025 тыс. руб.

12) (254 шан., 400 подст.); 304 800 руб.

13) (4; 8); 560 руб.

14) (10,8 т, 4,8 т); 1152 тыс. руб.

2.3.2 – 2.3.4

1) (15,0,10); 140 тыс. руб.

2) (0,132,156); 1020 тыс. руб.

3) (7,1; 0; 45,16); 237,42 тыс. руб.

4) (0; 0; 58); 348 тыс. руб.

5) (0; 22,2; 28,9); 335,56 тыс. руб.

6) (0; 9; 16); 544 тыс. руб.

7) (0;170;0); 1190 тыс. руб.

8) (800; 1800; 0); 169 200 руб.

9) (250; 0; 0); 22,5 тыс. руб.

10) (0; 13 500; 0); 27 714 руб.

11) 560 шт. (2 м); 280 шт. (1,25 м)

12) (0; 0; 0,16; 0,57); 81 тыс. руб.

13) (50/11; 0; 180/11); 7900/11руб.

14) (0,43; 0; 0; 0); 7042 руб.

15) 20 000; 30 000; 20 000; 30 000 долл.

18) (8/3; 0; 0; 2/3); 6

19) (0; 0; 1; 0); 3

20) (0; 5; 0); 50

21) (0; 6; 2); 18

22) (0; 6; 0); 1260

23) (0; 8; 0); 96

24) (22,5; 20; 15); 1225,5

25)(0; 18;10;5); 125.

2.4.3

1)	а) $\Delta b_i = 20$	$x_1 = 5$	$x_2 = 0$	$x_3 = 30$	$F(x) = 180$
	б) $\Delta b_3 = -10$	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 20$	$F(x) = 130$
	в) $x_1 = 2{,}5$	$x_2 = 5$	$x_3 = 20$		$F(x) = 140$
2)	а) $\Delta b_1 = 200$	$x_1 = 0$	$x_2 = 252$	$x_3 = 116$	$F(x) = 1220$
	б) $\Delta b_2 = -300$	$x_1 = 0$	$x_2 = 192$	$x_3 = 36$	$F(x) = 720$
	в)	$x_1 = 90$	$x_2 = 6$	$x_3 = 138$	$F(x) = 840$
3)	а) $\Delta b_1 = 100$	$x_1 = 0{,}6$	$x_2 = 0$	$x_3 = 68$	$F(x) = 276$
	б) $\Delta b_2 = -10$	$x_1 = 4{,}2$	$x_2 = 0$	$x_3 = 50{,}36$	$F(x) = 234{,}82$
	в)	$x_1 = 2{,}75$	$x_2 = 5$	$x_3 = 43$	$F(x) = 224$
4)	а) $\Delta b_1 = 2$	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 59$	$F(x) = 354$
	б) $\Delta b_1 = -50$	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 33$	$F(x) = 198$
	в)	$x_1 = 20$	$x_2 = 0$	$x_3 = 18$	$F(x) = 268$
5)	а) $\Delta b_1 = 300$	$x_1 = 0$	$x_2 = 10{,}2$	$x_3 = 49{,}9$	$F(x) = 410{,}5$
	б) $\Delta b_2 = -100$	$x_1 = 0$	$x_2 = 11{,}11$	$x_3 = 34{,}45$	$F(x) = 307{,}5$
	в)	$x_1 = 60$	$x_2 = 16{,}8$	$x_3 = 7{,}3$	$F(x) = 335{,}5$
6)	а) $\Delta b_1 = 6$	$x_1 = 0$	$x_2 = 10{,}5$	$x_3 = 16$	$F(x) = 568$
	б) $\Delta b_3 = -1$	$x_1 = 0$	$x_2 = 9$	$x_3 = 15{,}8$	$F(x) = 5$
	в)	$x_1 = 30$	$x_2 = 1{,}5$	$x_3 = 4$	$F(x) = 304$
7)	а) $\Delta b_1 = 40$	$x_1 = 0$	$x_2 = 178$	$x_3 = 0$	$F(x) = 1246$
	б) $\Delta b_1 = -100$	$x_1 = 0$	$x_2 = 150$	$x_3 = 0$	$F(x) = 1050$
	в)	$x_1 = 0$	$x_2 = 150$	$x_3 = 20$	$F(x) = 1130$

2.5

1) (25/11; 0; 54/11); 549/11

2) (15/8; 9/4; 0); 135/8

3) (78/19; 22/19; 0); 332/19

4) (2; 14/11; 28/11); 772/14

5)(0; 0; 1; 5); 41

6) (20/9; 0; 7/9); 65/3

7)(1; 1; 0; 0); 59

8) (23/13; 0; 2/13); 347/13

9) (9/2; 0; 0; 0); 173/2

10)(2; 2; 0; 0); 36

2.6

1) Множество оптимальных решений, одно из них:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 220 \\ 0 & 0 & 188 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 200 & 0 \\ 125 & 75 & 0 & 180 & 0 \end{pmatrix} F_{\min} = 4992$$

2) $$X^* = \begin{pmatrix} 190 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 180 & 130 \\ 210 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 120 & 0 & 20 \end{pmatrix} F_{\min} = 5590$$

3) $$X^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 30 & 0 \\ 40 & 170 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 80 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_{\min} = 1130$$

4) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 200 & 0 & 200 \\ 150 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 50 & 50 & 0 \end{pmatrix} F_{\min} = 4550$

5) Множество оптимальных планов, один из них:

$$X^* = \begin{pmatrix} 20 & 280 & 50 & 0 & 0 \\ 180 & 0 & 0 & 220 & 0 \\ 0 & 0 & 190 & 0 & 210 \end{pmatrix} F_{\min} = 10\,240$$

6) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 140 & 0 \\ 30 & 0 & 100 & 0 & 120 \\ 50 & 200 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_{\min} = 5340$

7) $X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 65 & 0 & 0 \\ 15 & 50 & 15 \end{pmatrix} F_{\min} = 10\,350$

8) Множество оптимальных решений, одно из них:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 0 & 40 \\ 50 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_{\min} = 4480$$

9) Множество оптимальных планов, один из них:

$$X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 12 & 0 \\ 8 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \end{pmatrix} F_{\min} = 5715$$

10) $X^* = \begin{pmatrix} 520 & 310 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 670 \\ 0 & 300 & 380 & 90 \end{pmatrix} F_{\min} = 12\,320$

11) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 0 & 560 & 0 \\ 0 & 110 & 60 & 0 & 540 \\ 400 & 0 & 420 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_{\min} = 12\,010$

2.7

1) $x_н = 1$, $x_в = 3$, $F(x) = 11$ т. р.

2) $x_н = 3\,{}^1/_3$, ${}^1/_3$, $x_в = 1{}^1/_3$, $F(x) = 10{}^2/_3$ тыс. руб.

3) $x_н = 4{}^1/_6$, $x_в = 1{}^1/_3$, $F(x) = 12{}^1/_3$ тыс. руб.

4) $x_н = 3{}^1/_3$, $x_в = 1{}^1/_3$, $F(x) = 8{}^1/_3$ тыс. руб.

5) $x_н = 3{}^1/_3$, $x_в = 1{}^1/_3$, $F(x) = 12{}^1/_3$ тыс. руб.

6) $x_н = {}^2/_3$, $x_в = 6{}^2/_3$, $F(x) = 28$ тыс. руб.

7) $x_н = 3$, $x_в = 2$, $F(x) = 12$ тыс. руб.

8) $x_н = 5$, $x_в = 0$, $F(x) = 10$ тыс. руб.

9) $x_н = 3$, $x_в = 2$, $F(x) = 12$ тыс. руб.

10) $x_н = 1{}^1/_3$, $x_в = 2{}^1/_3$, $F(x) = 9{}^2/_3$ тыс. руб.

Глава 3

3.5

1) $\alpha = 3$, $\beta = 5$, $(A_3; B_4)$

2) $\alpha = 6$, $\beta = 11$, $(A_4; B_3)$, *нет*.

3) $S_1 = (3/5; 2/5)$, $S_n = (23/30; 7/30)$, $\gamma = 6/5$

5) $S_n = (0; 0; 1/13; 2/13)$, $S_1 = (0; 2/39; 7/39)$, $\gamma = 13/3$

6) A_4

7) A_3

8) A_3

10) A_4

Глава 4

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	–1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	1	–1	–1	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	1	0	–1	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	1	1	–1	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	–1	0	–1	–1	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
x_7	0	0	0	0	0	1	0	1	0	–1
x_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2.

$d^+(x_1) = 0$ $d^+(x_2) = 1$ $d^+(x_3) = 1$

$d^-(x_1) = 1$ $\mathrm{d}^-(x_1) = 2$ $d^-(x_3) = 1$

$d^+(x_4) = 3$ $d^+(x_5) = 0$ $d^+(x_6) = 0$

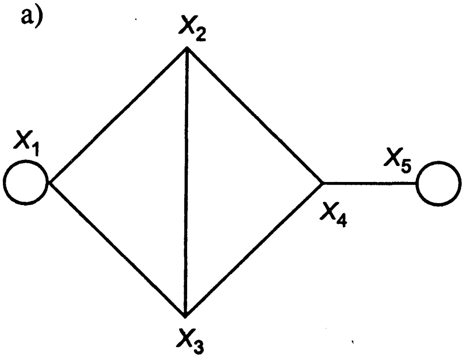
$d^-(x_4) = 1$ $d^-(x_5) = 3$ $d^-(x_6) = 2$

$d^+(x_7) = 2$ $d^+(x_8) = 1$ $d^+(x_9) = 0$

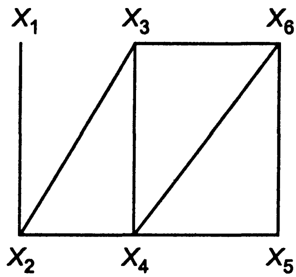
$d^-(x_7) = 1$ $d^-(x_8) = 0$ $d^-(x_9) = 0$

3.

а)



б)



4.

1) $N_p = \{S; 1; 3\}$

$\overline{N}_p = \{5; 2; 4; t\}$

$U_p = \{(1; 2)\ (1; 5)\ (3; 5)\ (3; 4)\}$

$V_p = 5 + 4 + 3 + 4 = 16$

2) $N_p = \{S\}$

$\overline{N}_p = \{1, 2, 3, 4, 5, t\}$

$U_p = \{(S; t)\ (S; 2)\}$

$V_p = 10 + 9 = 19$

3) $N_p = \{S; 2; 5\}$

$\overline{N}_p = \{1; 3; 4; t\}$

$U_p = \{(S; 1)\ (S; 3)\ (1; 1)\ (1; 5)\ (3; 5)\ (2; t)\ (5; t)\ (4; 5)\}$

$V_p = 10 + 9 + 5 + 4 + 3 + 8 + 2 + 3 = 44$

4) $N_p = \{S; 4\}$

$\overline{N}_p = \{1; 2; 3; 4; 5; t\}$

$U_p = \{(S; 1)\ (S; 3)\ (3; 4)\ (4; 5)\ (4; t)\}$

$V_p = 10 + 9 + 4 + 3 + 7 = 33$

5.

1) $\{S; 1; 2; t\}$

$(S; 1)\ \Delta\varphi = 10$

$(1; 2)\ \Delta\varphi = 5$

$(2; t)\ \Delta\varphi = 8$

$\max V = \min[10; 5; 8] = 5$

2) $\{S; 1; 5; 2; t\}$

$(S;1)\ \Delta\varphi = 5$

$(1; 5)\ \Delta\varphi = 4$

$(5; 2)\ \Delta\varphi = 2$

$(2; t)\ \Delta\varphi = 3$

$\max V = \min[5; 4; 2; 3] = 2$

3) $\{S; 1; 5; t\}$

$(S; 1)\ \Delta\varphi = 3$

$(1; 5)\ \Delta\varphi = 2$

$(5; t)\ \Delta\varphi = 2$

$\max V = \min[3; 2; 2] = 2$

4) $\{S; 3; 4; t\}$

$(S; 3)\ \Delta\varphi = 9$

$(3; 4)\ \Delta\varphi = 4$

$(4; t)\ \Delta\varphi = 7$

$\max V = \min[9; 4; 7] = 4$

$V_{\max} = 5 + 2 + 2 + 4 = 13$

6. $V_{\max} = 5$

7.

1) $\{S; 1; 2; t\}$

$(S;1)\ \Delta\varphi = 9$

$(1; 2)\ \Delta\varphi = 6$

$(2; t)\ \Delta\varphi = 10$

$\max V = \min[9; 6; 10] = 6$

2) $\{S; 1; 4; 2; t\}$

$(S; 1)\ \Delta\varphi = 3$

$(1; 4)\ \Delta\varphi = 3$

$(4; 2)\ \Delta\varphi = 4$

$(2; t)\ \Delta\varphi = 4$

$\max V = \min[3; 3; 4; 4] = 3$

3) $\{S; 3; 4; t\}$

$(S; 3)\ \Delta\varphi = 8$

$(3; 4)\ \Delta\varphi = 4$

$(4; t)\ \Delta\varphi = 7$

$\max V = \min\ [8; 4; 7] = 4$

$V_{\max} = 6 + 3 + 4 = 13$

$N_p = \{S\}$

$\overline{N}_p = \{1; 2; 3; 4; t\}$

$U_p = \{(S; 1)\ (S; 3)\} = 9 + 8 = 17$

8.

1) $\{S; 1; 2; t\}$

$(S; 1)\ \Delta\varphi = 11$

$(1; 2)\ \Delta\varphi = 6$

$(2; t)\ \Delta\varphi = 9$

$\max V = \min[11; 6; 9] = 6$

2) $\{S; 2; t\}$

$(S; 2\}\ \Delta\varphi = 3$

$(2, t)\ \Delta\varphi = 3$

$\max V = \min\ [3; 3] = 3$

3) $\{S; 1; 4; 5; t\}$

$(S; 1)\ \Delta\varphi = 5$

$(1; 4)\ \Delta\varphi = 8$

$(4; 5)\ \Delta\varphi = 5$

$(5; t)\ \Delta\varphi = 6$

$\max V = \min[5; 8; 5; 6] = 5$

$V_{\max} = 6 + 3 + 5 = 14$

9) $(1 - 2 - 4 - 3 - 5 - 1)\ L_{\min} = 120$

10) 1) 23,5; 2) 28; 3) 35; 4) 40; 5) 39,75

11) а) 30,7; б) 26,4

12) $(2 - 4 - 7 - 13); (3 - 6 - 4 - 7 - 13)\ P_{\max} = 49$ т.

13) а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} C_{\min} = 26$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C_{\max} = 46$

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C_{\min} = 14$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C_{\max} = 24$

в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C_{\min} = 32$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} C_{\max} = 56$

г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C_{\min} = 8$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C_{\max} = 25$

14) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} H_{\max} = 7\,892\,000$ долл.

16) 379 (1 – 2 – 3 – 5 – 4 – 1)

17) $L_{\min}$ = 445 км; (С – Л – С) – С – (С – Ф) – Х – (С – Л) – – М – Н – Ч – (С – Л – С).

Глава 5

5.7

1) (0; 40; 40; 40); 97

2) 3-й год

3) 2-й год

4) начало 4-го года

5) (1 – 4 – 7 – 10 – 1 1); 41

6) $(S_0 \to D_7 \to C_7 \to B_7 \to A_6 \to A_5 \to A_4 \to A_3 \to A_2 \to A_1 \to S_1)$; 108

Глава 6

6.6

1. $P_{отк} = 0{,}655$; $P_{обс} = 0{,}345$; A = 2,76 авт/ч; $L_{оч} = 4$ авт., $t_{оч} = 0{,}5$ ч

2. $P_{обс} = 0{,}998$

3. $n^* = 5$

4. $n_1 = 6$; $n_2 = 1$

5. $P_{отк} = 0{,}66$; $P_{обс} = 0{,}34$; $L_{оч} = 10$ чел.; $T_{оч} = 0{,}5$ ч

6. $P_о = 0{,}2$; $L_{оч} = 3$ чел.; $L_{смо} = 4$ чел.; $T_{оч} = 9{,}6$ мин; $T_{смо} = 12$ мин

7. $P_о = 0{,}049$; $L_{оч} = 0{,}1$ чел.; $P_{оч} = 0{,}05$; $T_{оч} = 0{,}005$ мин; $\bar{n}_з = 3$, $\bar{n}_{св} = 3$

8. $n^* = 3$

9. $n^* = 2$

12. $\lambda = 360$ 1/сутки; $T_{ср} = 4$ мин; $P\ (k > 50) = 10^{-16}$

14. $n^* = 3$

15. $P_{отк} = 0{,}01$; $P_{обс} = 0{,}99$; $P_о = 0{,}12$

16. $P_о = 0{,}2$; $P_{отк} = 0{,}2$; $P_{обс} = 0{,}8$; $T_{сто} = 4$ ч

17. $n_{min} = 2$; $\bar{n} = 4$; $n_{max} = 6$

18.

n	Пн.	Вт.	Ср.	Чтв.	Птн.	Сб.	Воскр.
Утро	2	3	2	3	2	4	2
Вечер	4	4	6	5	5	4	3

19. $n^* = 2$

Глава 7

7.8

1) 36%

2) четвертый

3) 1-й год

4) 60%, 5.09.98 на месяц

5) 6000 руб.

6) 11,2%

7) На + 4140 руб; на – 293 руб.

8) 8%; 153,6%; на 19%; на 103,2%; на 27%

9) S = 63528,47 руб.; A=36047,76 руб.

10) 17692 тыс. руб.

11) A_1 = 111,37 млн руб.

12) S= 27 600 руб.

13) 29 120 у.е.

14) 37202,47 руб.

15) 90 шт.

16) 10%; 15%.

17) 210133,33 руб.

18) 96%; 71%

19) 1000 руб.

20) 140%

21) 152 долл.; 17 024 долл.; 182 976 долл.

22) R = 731, 13 долл.; *I* = 1386,8 долл.

23) 159,57 долл.; 26 697 долл.; 19148,5 долл.

24) 4 558 425 руб.; 2 234 975 руб.

25) –26,6%; 28,4%

26) 46,36%; 73 421 400 руб.; 48,95%.

27) 24,7%

28) 70537,11 долл.; 41917,11 долл.

29) R=15305,4 руб.; A=68783,7 руб.

30) R=1256,33 руб.; A=49757,43 руб.

31) 10214,95 долл.

32) 34850,86 долл.; 34505,80 долл.

33) 57 955 руб.; 2045 руб.

34) 2 897 738 руб.

35) 22,14%.

36) 28,48%.

37) 100 333 руб.

Приложение 1

Значения $P_m = \dfrac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$ **(распределения Пуассона)**

m	a															
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
0	0,904	0,818	0,740	0,670	0,606	0,548	0,496	0,449	0,406	0,367	0,223	0,135	0,082	0,049	0,030	0,018
1	0,090	0,163	0,222	0,268	0,303	0,329	0,347	0,359	0,365	0,367	0,334	0,270	0,205	0,149	0,105	0,073
2	0,004	0,016	0,033	0,053	0,075	0,098	0,121	0,143	0,164	0,183	0,251	0,270	0,256	0,224	0,184	0,146
3	0,000	0,001	0,003	0,007	0,012	0,019	0,028	0,038	0,049	0,061	0,125	0,180	0,213	0,224	0,215	0,195
4	–	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,007	0,011	0,015	0,047	0,090	0,133	0,168	0,188	0,195
5	–	–	–	–	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,003	0,014	0,036	0,066	0,100	0,132	0,156
6	–	–	–	–	–	–	–	0,000	0,000	0,000	0,003	0,012	0,027	0,050	0,077	0,104
7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,000	0,003	0,009	0,021	0,038	0,059
8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,000	0,003	0,008	0,016	0,029
9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,000	0,002	0,006	0,013
10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,000	0,002	0,005
11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,000	0,001
12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,000

Продолжение

m	a															
	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	12	14	16	18
0	0,011	0,006	0,004	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	–	–	–	–	–	–
1	0,049	0,033	0,022	0,014	0,009	0,006	0,004	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000	–	–	–	–
2	0,112	0,084	0,061	0,044	0,031	0,022	0,015	0,010	0,007	0,004	0,003	0,002	0,000	–	–	–
3	0,168	0,140	0,113	0,089	0,068	0,052	0,038	0,028	0,020	0,014	0,010	0,007	0,001	0,000	–	–
4	0,189	0,175	0,155	0,133	0,111	0,091	0,072	0,057	0,044	0,033	0,025	0,018	0,005	0,001	0,000	–
5	0,170	0,175	0,171	0,160	0,145	0,127	0,109	0,091	0,075	0,060	0,048	0,037	0,012	0,003	0,001	–
6	0,128	0,146	0,157	0,160	0,157	0,149	0,136	0,122	0,106	0,091	0,076	0,063	0,025	0,008	0,002	0,000
7	0,082	0,104	0,123	0,137	0,146	0,149	0,146	0,139	0,129	0,117	0,103	0,090	0,043	0,017	0,005	0,001
8	0,046	0,065	0,084	0,103	0,118	0,130	0,137	0,139	0,137	0,131	0,123	0,112	0,065	0,030	0,011	0,004
9	0,023	0,036	0,051	0,068	0,085	0,101	0,114	0,124	0,129	0,131	0,130	0,125	0,087	0,047	0,021	0,008
10	0,010	0,018	0,028	0,041	0,055	0,070	0,085	0,099	0,110	0,118	0,123	0,125	0,104	0,066	0,034	0,014
11	0,004	0,008	0,014	0,022	0,032	0,045	0,058	0,072	0,085	0,097	0,106	0,113	0,114	0,084	0,049	0,024
12	0,001	0,003	0,006	0,011	0,017	0,026	0,036	0,048	0,060	0,072	0,084	0,094	0,114	0,098	0,066	0,036
13	0,000	0,001	0,002	0,005	0,008	0,014	0,021	0,029	0,039	0,050	0,061	0,072	0,105	0,105	0,081	0,050
14	–	0,000	0,001	0,002	0,004	0,007	0,011	0,016	0,023	0,032	0,041	0,052	0,090	0,105	0,093	0,065
15	–	–	0,000	0,000	0,001	0,003	0,005	0,009	0,013	0,019	0,026	0,034	0,072	0,098	0,099	0,078
16	–	–	–	–	0,000	0,001	0,002	0,004	0,007	0,010	0,015	0,021	0,054	0,086	0,099	0,088
17	–	–	–	–	–	0,000	0,001	0,002	0,003	0,005	0,008	0,012	0,038	0,071	0,093	0,093
18	–	–	–	–	–	–	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,007	0,025	0,055	0,083	0,093
19	–	–	–	–	–	–	–	–	0,000	0,001	0,002	0,003	0,016	0,040	0,069	0,088
20	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,000	0,001	0,001	0,009	0,028	0,055	0,079
21	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,000	0,000	0,005	0,019	0,042	0,068
22	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,003	0,012	0,030	0,055
23	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,001	0,007	0,021	0,043
24	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,000	0,004	0,014	0,032
25	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,002	0,009	0,023

Приложение 2

Критические точки распределения χ^2 Пирсона

r	$P = 0{,}99$	$P = 0{,}95$	$P = 0{,}90$	$P = 0{,}10$	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$
1	≈ 0	≈ 0	0,01	2,70	3,84	6,63
2	0,02	0,10	0,21	4,60	5,99	9,21
3	0,11	0,35	0,58	6,25	7,81	11,3
4	0,29	0,71	1,06	7,77	9,48	13,2
5	0,55	1,14	I,61	9,23	11,0	15,0
6	0,87	I,63	2,20	10,6	12,6	16,8
7	1,23	2,16	2,83	12,0	14,1	18,4
8	1,64	2,73	3,48	13,3	15,5	20,0
9	2,08	3,32	4,16	14,6	16,9	21,6
10	2,55	3,94	4,86	15,9	18,3	23,2
11	3,05	4,57	5,57	17,2	19,7	24,7
12	3,57	5,22	6,30	18,5	21,0	26,2
13	4,10	5,89	7,04	19,8	22,4	27,6
14	4,66	6,57	7,78	21,0	23,7	29,1
15	5,22	7,26	8,54	22,3	25,0	30,5
16	5,81	7,96	9,31	23,5	26,3	31,9
17	6,40	8,67	10,0	24,7	27,6	33,4
18	7,01	9,39	10,8	25,9	28,8	34,8
19	7,63	10,1	11,6	27,2	30,1	36,1
20	8,26	10,8	12,4	28,4	31,4	37,5
21	8,89	II,5	13,2	29,6	32,6	38,9
22	9,54	12,3	14,0	30,8	33,9	40,2
23	10,1	13,0	14,8	32,0	35,1	41,6
24	10,8	13,8	15,6	33,1	36,4	42,9
25	11,5	14,6	16,4	34,3	37,6	44,3
26	12,1	15,3	17,2	35,5	38,8	45,6
27	12,8	16,1	18,1	36,7	40,1	46,9
28	13,5	16,9	18,9	37,9	41,3	48,2
29	14,2	17,7	19,7	39,0	42,5	49,5
30	14,9	18,4	20,5	40,2	43,7	50,5

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абчук В. А.* 250 занимательных задач по менеджменту и маркетингу. – М.: Вита-Пресс, 1996.
2. *Аванесов Ю. А., Клочка А. Н., Васькин Е. В.* Основы коммерции на рынке товаров и услуг. – М.: ТОО «Люкс арт», 1995.
3. *Анцупов А. Я. Шипилов А. И.* Конфликтология. – М.: ЮНИТИ, 1999.
4. *Баканов М. И., Бровиков И. С., Бабурин В. Т.* Математические методы анализа в торговле. – М.: Экономика, 1967.
5. *Баканов М. И., Шеремет А. Д.* Теория экономического анализа: Учебник. – 4-е изд., доп. и перераб. – М.: Финансы и статистика, 1999.
6. *Башарин Г. П.* Начала финансовой математики. – М.: Инфра-М, 1997.
7. *Бережная Е.В., Бережной В.И.* Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2001.
8. *Берн Э.* Игры, в которые играют люди: Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1988.
9. *Бурмистров В. Г.* Организация торговли непродовольственных товаров. – М.: Экономика, 1989.
10. *Бухвалов А. В., Идельсон А. В.* Самоучитель по финансовым расчетам. – М.: Мир, «Пресс-сервис», 1997.
11. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. – М.: Наука, 1980.
12. *Волков И.К., Загоруйко Е.А.* Исследование операций в экономике: Учебник. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002.
13. *Замков О. О., Толстопятенко А. В. Черемных Ю. Н.* Математические методы в экономике: Учебник. – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, «ДИС», 1997.
14. *Иохин В. Я.* Экономическая теория: Учебник. – М.: ЮРИСТЪ, 2000.
15. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие/Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.
16. *Колемаев В.А.* Математическая экономика: Учебник. – М.: ЮНИТИ, 1998.
17. *Конюховский П.В.* Математические методы исследования операций в экономике. – СПб.: ПИТЕР, 2000.

18. *Крассе М.С., Чупрынов Б.П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. – М.: Изд-во «Дело», 2002.
19. *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б.* Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980.
20. *Лабскер Л. Г., Бабешко Л. О.* Теория массового обслуживания в экономической сфере. – М.: ЮНИТИ, 1998.
21. *Лагоша Б.А.* Оптимальное управление в экономике: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 2003.
22. *Липсиц И. В.* Экономика без тайн. – М.: Дело Лтд., 1994.
23. *Малыхкин В.И.* Математика в экономике: Учеб. пособие. – М.: Инфра-М, 2000.
24. Математические методы принятия решений в экономике: Учебник/ Под ред. В. А. Колемаева. – М.: ЗАО «Финстатинформ», 1999.
25. *Мицкевич А. А.* Деловая математика в экономической теории и практике. – Киров, 1995.
26. *Морошкин В. А., Морошкина С. В.* Простые и сложные проценты. – М.: АКАЛИС – бизнес книга, 1996.
27. Общая теория статистики: Учебник/Под ред. О. Э. Башиной, А. А. Спирина. – М.: Финансы и статистика, 1999.
28. *Осипова Л. В., Синяева И.М.* Основы коммерческой деятельности: Учебник. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2000.
29. *Первозванский А. А., Первозванская Т. Н.* Финансовый рынок: расчеты и риск. — М.: Инфра-М, 1994.
30. *Пинегина М.В.* Математические методы и модели в экономике. – М.: Изд-во «Экзамен», 2002.
31. *Половцева Ф. П.* Коммерческая деятельность: Учебник. – М.: Инфра-М, 2000.
32. *Смирнова В. В.* Математическое программирование. Методические указания. – М.: МУПК, 1998.
33. *Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г.* Математика в экономике: Учебник. Ч. 1 — М.: Финансы и статистика, 2003.
34. *Спирин А. А.* Экономико-математические методы в статистических исследованиях. – М.: Финансы и статистика, 1999.
35. *Спирин А. А., Фомин Г. П.* Экономико-математические методы и модели в торговле. – М.: Экономика, 1988.
36. *Сыроежин И. М.* Математика сетевых планов. – М.: Экономика, 1967.

37. *Таха Х.* Введение в исследование операций: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985.
38. *Федосеев В. В., Гармаш А. Н., Дайитбегов Д. М.* Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие. – М.: ЮНИТИ, 1999.
39. *Филлипс Д., Гарсия-Диас А.* Методы анализа сетей: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984.
40. Финансовый менеджмент: Учебник для вузов/Под ред. проф. Г. Б. Поляка. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1997.
41. Финансовый менеджмент: теория и практика/Под ред. акад. Е. С. Стояновой. – М.: Перспектива, 1997.
42. *Фомин Г. П.* Методы и модели линейного программирования в коммерческой деятельности: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000.
43. *Фомин Г. П.* Модели выбора решений в коммерческих операциях. – М.: МГУК, 1996.
44. *Фомин Г. П.* Системы массового обслуживания в коммерческой деятельности: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000.
45. *Фомин Г. П.* Финансовая математика: 300 примеров и задач: Учеб. пособие. — М.: Гном-Пресс, 1999.
46. *Хазанова Л. Э.* Математическое моделирование в экономике: Учеб. пособие. – М.: БЕК, 1998.
47. *Черкасов В. Е.* Финансовый анализ в коммерческом банке. – М.: Инфра-М, 1995.
48. *Четыркин Е. М.* Финансовая математика: Учебник. – М.: Дело, 2001.
49. *Четыркин Е. М.* Теория массового обслуживания и ее применение в экономике. – М.: Статистика, 1971.
50. *Шелобаев С. И.* Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие. – М.: ЮНИТИ, 2000.
51. Экономический анализ: ситуации, тесты, примеры, задачи, выбор оптимальных решений, финансовое прогнозирование/Под ред. М. И. Баканова, А. Д. Шеремета. – М.: Финансы и статистика. 2000.
52. Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие/Под ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Минск: БГЭУ, 2000.

Учебник

Фомин Геннадий Петрович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В КОММЕРЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Ведущий редактор *Л. И. Ларина*
Младший редактор *И. П. Ёлкина*
Художественный редактор *Н. А. Щепетнова*
Технический редактор *В. Ю. Фотиева*
Корректоры *Л. Ф. Королева, Г. В. Хлопцева*
Оформление художника *Т. Л. Погорельцевой*

ИБ № 4725

Подписано в печать 28.10.2004.
Формат 60×88 1/16. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная.
Усл. п. л. 37,73. Уч-изд. л. 35.39. Тираж 4000 экз. Заказ № 70. «С» 133

Издательство «Финансы и статистика»
101000, Москва, ул. Покровка, 7
Телефоны (095) 925-47-08, 925-35-02,
факс (095) 925-09-57
E-mail: mail@finstat.ru http://www.finstat.ru

ГП Псковской области «Великолукская городская типография»
Комитета по средствам массовой информации
182100, Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12
Тел./факс: (811-53) 3-62-95
E-mail: VTL@MART.RU