УДК 338.2
ББК 65.050.я7
Ю93

Рецензенты:
кафедра экономики и управления научными исследованиями, проектированием и производством БГПА;
кандидат физико-математических наук, доцент БГУ *О.Н. Мельников*

Юферева О.Д.
Ю93 Экономико-математические методы и модели: Сб. задач / О.Д. Юферева. — Мн.: БГЭУ, 2002. —103 с.

ISBN 985-426-697-4.

Учебное пособие подготовлено в соответствии с типовой программой по курсу «Экономико-математические методы и модели» для высших учебных заведений. Содержит большой перечень задач по различным аспектам математического моделирования экономических процессов, краткое изложение теоретического материала по каждой теме, примеры решения типовых задач, инструкции по решению задач на ПЭВМ, варианты заданий для самостоятельного решения и ответы к задачам.

Для студентов экономических специальностей всех форм обучения.

УДК 338.2
ББК 65.050.я7

ISBN 985-426-697-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРА

Предлагаемый сборник задач составлен на основании материалов, собранных автором в процессе преподавания курса «Экономико-математические методы и модели» студентам Белорусского государственного экономического университета.

В начале каждой главы сборника приводятся сведения по теории данной темы в объеме, необходимом для решения задач. Затем, как правило, следуют примеры решения типовых задач, после чего предлагаются задачи для самостоятельного решения. Числовые данные в задачах чаще всего носят условный характер. В некоторых темах приводятся инструкции по решению задач на ПЭВМ с использованием пакета Excel и предлагаются варианты заданий для решения на ПЭВМ. В конце сборника приведены ответы к задачам.

Необходимость издания данного пособия вызвана отсутствием учебной литературы такого характера.

Материалы сборника обсуждались на кафедре прикладной математики и экономической кибернетики БГЭУ. Автор выражает глубокую благодарность всем членам кафедры за ценные советы и замечания, способствовавшие улучшению содержания данного пособия.

Глава 1. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

А. Общие сведения

Оптимизационными называются такие экономико-математические модели, в которых определены система ограничений на использование наличных ресурсов (материальных, временных, трудовых и т.д.) и цель их распределения с точки зрения некоторого критерия (критериев). Оптимизационные модели строятся для различных производственных и экономических задач, оптимальные решения принимаются с помощью методов математического программирования.

Общая структура оптимизационной модели состоит из целевой функции, принимающей значения в пределах ограниченной условиями задачи области, и из ограничений, характеризующих эти условия.

В общем виде оптимизационную модель можно представить следующим образом:

$$F = f(X) \to \mathrm{extr}(\max/\min)$$
$$\varphi_i(X)\{\le = \ge\} b_i \, (i = \overline{1, m}),$$
$$X \ge 0,$$

где $f(X)$ и $\varphi_i(X)$ — известные функции, b_i — заданные постоянные, $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$ — план задачи.

Вид целевой функции F, вид ограничений и специальные ограничения на переменные (например, требование целочисленности) определяют выбор метода математического программирования для решения оптимизационной задачи: линейного программирования, нелинейного программирования, динамического программирования, целочисленного программирования и т.д.

Б. Задачи

1.1. Промышленное предприятие «Белподшип» имеет возможность выпускать подшипники четырех видов (П1, П2, П3, П4). На их изготовление необходимо использовать три вида производственных ресурсов: кольца, шарики, сепараторы. Наличие ресурсов в плановом периоде и норма их расхода на единицу продукции указаны в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Вид ресурса	Наличие ресурса, шт.	Норма расхода на единицу продукции, шт./ед.			
		П1	П2	П3	П4
Кольца	600	2	2	2	2
Шарики	2000	6	8	10	6
Сепараторы	550	2	1	1	2

Для изготовления данных видов подшипников необходимо оборудование трех видов: токарное, шлифовальное, измерительная техника. Наличие оборудования и потребляемая им мощность, требуемая на изготовление подшипников каждого вида, указаны в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Вид оборудования	Наличие оборудования, станко-ч	Норма расхода на единицу продукции, станко-ч/ед.			
		П1	П2	П3	П4
Токарное	65	0,2	0,3	0,1	0,2
Шлифовальное	30	0,1	0,1	0,2	0,2
Измерительная техника	85	0,3	0,2	0,1	0,1

Маркетинговый отдел данного предприятия выявил, что в экономическом регионе есть два крупных потребителя подшипников данных видов: Россия и Беларусь. Общая потребность в подшипниках по экспертным оценкам в настоящее время составляет порядка тех объемов, которые представлены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Продукция	Рынки	Планируемый объем продаж, шт.	Планируемая прибыль от единицы продукции, ден. ед.
П1	Россия Беларусь	100 200	7 8
П2	Россия	150	5
П3	Россия	100	4
П4	Беларусь	не ограничен	6

Исходя из сложившейся ситуации на рынке определить, какой объем продукции необходимо выпускать, чтобы получать максимальную прибыль.

1.2. Текстильное предприятие выпускает мешочные и паковочные ткани пяти артикулов. Технологический процесс выработки ткани заключается в последовательной переработке сырья в прядильном, ткацком и отделочном производствах. В качестве исходного сырья в прядильном производстве используются короткое льноволокно, вискозное и лавсановое волокна, запасы которых лимитированы: 23 286; 3871,1; 2930,2 т соответственно. Нормы затрат сырья на производство 1 т пряжи разного вида приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Пряжа / Сырье	Нормы затрат сырья по артикулам пряжи, т/т		
	2.94(ОО)	2.94(СРО)	3.57(ЛДЛ)
Короткое льноволокно	1,073	1,099	0,357
Вискозное волокно	0,181	0,185	-
Лавсановое волокно	0,087	0,089	0,313

В прядильном производстве используется оборудование типа ПС-100-ЛО. Эффективный годовой фонд времени оборудования, затраты времени на производство 1 т пряжи (тыс. веретено-ч/т) и прибыль по видам пряжи приведены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

	Артикул пряжи			Эффективный фонд времени, тыс. веретено-ч
	2.94 (ОО)	2.94 (СРО)	3.57 (ЛДЛ)	
Оборудование ПС-100-ЛО	2,534	2,534	3,024	56 125
Прибыль, ден. ед./т	3790	3610	8840	

Пряжи артикула 3.57 ЛДЛ необходимо выпустить 988 т для реализации.

Нормы расхода пряжи, производимой в прядильном производстве на 1000 п. м продукции ткацкого производства (т/1000 п. м), заданы в табл. 1.6.

Таблица 1.6

Артикул пряжи	Ткани				
	мешочные			паковочные	
	15267	15264	15265	14131	14132
2.94(ОО)				0,2963	0,2666
2.94(СРО)	0,424	0,1193	0,2484		

В ткацком производстве задействованы ткацкие станки типа АТПР. Эффективный годовой фонд времени работы станков, затраты времени на производство 1000 п. м суровой ткани (ч/1000 п. м) и прибыль по артикулам ткани приведены в табл. 1.7.

Таблица 1.7

	Ткани					Эффективный фонд времени, тыс. веретено-ч
	мешочные			паковочные		
	15267	15264	15265	14131	14132	
Оборудование АТПР, ч/1000 п. м	44,41	44,41	44,41	22,72	22,73	2 113 400
Прибыль, тыс. ден. ед./1000 п. м	1137	575,5	1703	499,5	249,1	

Коэффициенты по учету утяжки (расширения) мешочных и усадки паковочных тканей при их отделке, а также прибыль отделочного производства заданы в табл. 1.8.

Таблица 1.8

Ткацкое производство		Отделочное производство				
		мешочные ткани			паковочные ткани	
		15267	15264	15265	14131	14132
мешочные ткани	15267	0,9906				
	15264		0,9878			
	15265			0,9906		
паковочные ткани	14131				0,9985	
	14132					0,9985
Прибыль, ден. ед./1000 п. м		1516	1401	1432	313.3	318,7

Минимальные и максимальные объемы производства готовых тканей и прибыль, получаемая от реализации тканей, заданы в табл. 1.9.

Требуется:

1) составить математическую модель задачи определения ассортимента и объемов выпускаемой продукции, максимизирующих прибыль;

2) решить задачу на ПЭВМ, проанализировать полученные результаты;

3) дать предложения по использованию остатков сырья и уменьшению простоев прядильных машин;

4) дать предложения по совершенствованию производственной программы, подсчитать экономический эффект от проведения этих мероприятий.

Таблица 1.9

Отделочное производство		Объемы производства		Прибыль, тыс. ден. ед./1000 п. м
		min	max	
мешочные ткани	15267	10 000	15 000	4,148
	15264	22 000	33 000	3,571
	15265	1375	2100	4,007
паковочные ткани	14131	7222	10842	1,938
	14132	2372	3558	1,580

1.3. На нефтеперерабатывающий завод еженедельно поступает не более 500 тыс. т сырой нефти, в том числе: 1 сорта — до 100 тыс. т; 2 сорта — до 100 тыс. т; 3 сорта — до 200 тыс. т и 4 сорта — до 100 тыс. т. Из этого сырья завод производит продукты нефтепереработки четырех видов (А, В, С, Д). Потребность в этих продуктах в течение недели ограничена и не превышает по видам:

А — 170 тыс. т,
В — 85 тыс. т,
С — 20 тыс. т,
Д — 85 тыс. т.

Продукт С (смазочное масло) может быть получен только из нефти третьего сорта. Остальные продукты получают при переработке любого сорта сырой нефти, в том числе и третьего.

Прибыль от переработки сырой нефти составляет:
1 сорта — 1 ден. ед./т;
2 сорта — 2 ден. ед./т;
3 сорта:
а) при получении жидкого топлива — 1,5 ден. ед./т;
б) при получении смазочного масла — 2,5 ден. ед./т;
4 сорта — 0,7 ден. ед./т.

Характеристика сырой нефти по выходам нефтепродуктов приведена в табл. 1.10.

Требуется:
1) определить, какое количество нефти каждого сорта следует заводу переработать, чтобы получить необходимый ассортимент продуктов переработки и максимальную прибыль;
2) по результатам решения задачи определить, сколько будет произведено заводом нефтепродуктов каждого вида из переработанной сырой нефти. Произвести анализ результатов решения.

Таблица 1.10

Сорт сырой нефти	Выход продуктов переработки (по видам) из 1 т сырой нефти			
	А	В	С	Д
1	0,6	0,2	–	0,1
2	0,5	0,2	–	0,2
3 а	0,4	0,3	–	0,2
3 б	0,4	0,1	0,2	0,2
4	0,3	0,3	–	0,3

1.4. Торговое предприятие в течение месяца осуществляет продажу товаров n товарных групп, каждая из которых включает r видов товара ($r = 1, 2, 3, ..., R$). На реализацию товара r-го вида каждой товарной j-й группы ($j = 1, 2, 3, ..., n$) заданы пределы товарооборота: верхний $d^{в}_{jr}$ и нижний $d^{н}_{jr}$.

Построить экономико-математическую модель, позволяющую получить оптимальный месячный план продажи по каждому виду товара, обеспечивающий при заданной величине торговой прибыли максимальный объем товарооборота Q при следующих условиях:

S_{jr} – площадь торговых залов на единицу товарооборота в натуральном выражении при реализации r вида товара из j-й группы;

S – производственная площадь торгового предприятия, м^2;

b^l – месячный фонд времени работы продавцов квалификации l ($l = 1, 2, 3, ..., L$), чел.-ч;

g^l_{jr} – норматив товарооборота на группы продавцов квалификации l при реализации r-го вида товара из j-й группы в единицу времени;

p_{jr} – торговая прибыль от продажи единицы r-го вида товара из j-й группы, ден. ед.;

c_{jr} – средняя розничная цена r-го вида товара из j-й группы, ден. ед.;

b^h – месячный лимит издержек обращения статьи h, ($h = 1, 2, 3, ..., H$), ден. ед.;

q_{jr}^h – расходы по h статье издержек обращения на 1 тыс. ден. ед. товарооборта по реализации r-го вида товара из j-й группы, ден. ед./тыс. ден. ед.;

$П_{пл}$ – плановый объем прибыли.

1.5. Известны три пункта, где могут быть размещены леспромхозы с максимально допустимым годовым объемом заготовок соответственно 200 тыс., 100 тыс. и 50 тыс. м^3, себестоимостью 1 тыс. м^3 заготавливаемой древесины 8 тыс., 6 тыс. и 4 тыс. ден. ед. и удельными капитальными вложениями 0, 0 и 1 тыс. ден. ед./тыс. м^3. Потребителями древесины являются три лесопильных завода, годовой спрос которых достигает 80 тыс., 70 тыс. и 50 тыс. м^3. Затраты на перевозку 1 тыс. м^3 древесины от каждого леспромхоза к любому лесопильному заводу приведены в табл. 1.11.

Таблица 1.11

Леспромхозы	Лесопильные заводы		
	1	2	3
	Удельные транспортные затраты, тыс. ден. ед. / 1 тыс. м^3		
1	3	2	5
2	1	4	2
3	5	3	1

Условно-постоянные расходы в расчете на 1 тыс. м^3 годовой производительности леспромхозов соответственно равны 0,5 тыс., 0,8 тыс. и 0,4 тыс. ден. ед.

Требуется разместить лесозаготовки таким образом, чтобы потребность всех лесопильных заводов в сырье была удовлетворена с наименьшими затратами.

1.6. Планируется выпуск двух видов товаров: А в объеме 20 млн ден. ед. и Б — 50 млн ден. ед. Для производства этого количества товаров можно построить два предприятия—№ 1 и № 2. При этом для каждого из предприятий существуют два типовых проекта (табл. 1.12), которые характеризуются

годовым объемом производства и затратами трудовых и материальных ресурсов, а также приведенными затратами на создание мощностей.

Таблица 1.12

Предприятие	Проект	Объем производства, млн ден. ед.		Расходы		Приведенные затраты, млн ден. ед.
		А	Б	труда, тыс. чел.	материалов, млн ден. ед.	
№ 1	I	10	15	25	4200	8200
	II	10	30	35	3500	7500
№ 2	I	10	20	29	7200	12 000
	II	15	35	42	4300	9500

Установить, какое предприятие и по какому проекту нужно строить, чтобы обеспечить выпуск товаров с минимальными затратами, если известно, что отрасль будет располагать ресурсами труда в объеме 64 тыс. чел.-ч и материалами в 11 млрд ден. ед. в год.

Глава 2. БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

А. Общие сведения

Под балансовой моделью понимается система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции.

Важнейшими видами балансовых моделей являются: частные материальные, трудовые и финансовые балансы для народного хозяйства и отдельных отраслей; межотраслевые балансы; матричные техпромфинпланы предприятий и фирм.

Балансовые модели относятся к типу матричных экономико-математических моделей. В матричных моделях балансовый метод получает строгое математическое выражение.

В модели межотраслевого баланса все народное хозяйство представляется в виде совокупности n отраслей (промышленность, сельское хозяйство и т.д.), каждая из которых рассматривается как производящая и как потребляющая. При построении балансовых моделей используется понятие чистой (или технологической) отрасли, то есть условной отрасли, объединяющей все производство данного продукта, независимо от ведомственной (административной) подчиненности и форм собственности предприятий и фирм.

Обозначения: x_{ij} — межотраслевые потоки продукции, где i и j — соответственно номера отраслей производящих и потребляющих; x_i — валовой выпуск продукции i-й отрасли; y_i — конечная продукция i-й отрасли, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Основу **экономико-математической модели межотраслевого баланса (МОБ)** составляет технологическая матрица, содержащая коэффициенты прямых затрат на производство единицы продукции

$$A = (a_{ij})_{n \cdot n}, \tag{2.1}$$

где $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{xj}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Коэффициент прямых затрат a_{ij} показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, учитывая только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли. Коэффициент прямых затрат является довольно стабильной величиной во времени.

Систему уравнений баланса можно записать в виде

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i,\ i = \overline{1, n} \tag{2.2}$$

или в матричной форме

$$X = AX + Y, \tag{2.3}$$

где X — вектор-столбец валовой продукции и Y — вектор-столбец конечной продукции.

Система уравнений (2.2) или (2.3) называется экономико-математической моделью межотраслевого баланса (модель «затраты—выпуск»). С помощью балансовой модели можно выполнять три варианта расчетов:

- задавая в модели величины валовой продукции каждой отрасли (x_i), можно определить объем конечной продукции каждой отрасли (y_i)

$$Y = (E-A) \cdot X; \tag{2.4}$$

- задавая величины конечной продукции всех отраслей (y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (x_i)

$$X = (E-A)^{-1} \cdot Y; \tag{2.5}$$

- для ряда отраслей — задавая величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей — объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и обьемы валовой продукции вторых, в этом случае удобнее пользоваться системой уравнений (2.2).

В формулах (2.4) и (2.5) E — единичная матрица размерности $n \cdot n$, а $(E-A)^{-1}$ — матрица, обратная матрице $(E-A)$. Обозначив обратную матрицу через B, модель (2.5) можно записать в виде

$$X = BY. \tag{2.6}$$

Матрица $B = (b_{ij})_{n\,n}$ есть матрица коэффициентов полных затрат. Коэффициенты полных затрат b_{ij} показывают, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-й отрасли.

Коэффициенты полных затрат можно применять тогда, когда необходимо определить, как скажется на валовом выпуске некоторой отрасли предполагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta Y_j, \tag{2.7}$$

где ΔX_i и ΔY_j — изменения (приросты) величин валовой и конечной продукции соответственно.

Модели МОБ используются при прогнозировании цен. Прогноз цен на период t осуществляется на основе данных МОБ периода $(t-1)$. Если рост цен в отраслях экономики характеризуется индексом роста цен в i-й отрасли p_i, однако при этом структура затрат в сопоставимых ценах осталась неизменной, то модель прогнозирования цен имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} p_i + \sum_{i=1}^{m} v_{ij} p_j = x_j p_j,\ j = \overline{1, n}, \tag{2.8}$$

где m — число элементов валовой добавленной стоимости.

Пример. В отчетном межотраслевом балансе условной трехотраслевой экономики приведены межотраслевые потоки в стоимостном выражении (табл. 2.1). Необходимо рассчитать:

1) a_{ij} — коэффициенты прямых затрат;

2) b_{ij} — коэффициенты полных затрат;

3) x_i — объем производства валовой продукции в плановом периоде, если известен объем конечного потребления продукции

$$Y_{пл} = \begin{pmatrix} 150 \\ 110 \\ 140 \end{pmatrix}.$$

Результаты представить в виде балансовой таблицы.

Таблица 2.1

Производящая отрасль	Потребляющая отрасль			Продукция, млрд ден. ед.	
	I	II	III	конечная	валовая
I	10	36	24	130	200
II	20	16	14	100	150
III	15	30	15	120	180
Валовая добавленная стоимость, млрд ден. ед.	155	68	127	350	
Валовая продукция, млрд ден. ед.	200	150	180		530

Р е ш е н и е.

1. Коэффициенты прямых затрат рассчитываем по формуле (2.1):

$$a_{11} = \frac{10}{200} = 0{,}05; \quad a_{12} = \frac{36}{150} = 0{,}24; \quad a_{13} = \frac{24}{180} = 0{,}13;$$

$$a_{21} = \frac{20}{200} = 0{,}1; \quad a_{22} = \frac{16}{150} = 0{,}11; \quad a_{23} = \frac{14}{180} = 0{,}08;$$

$$a_{31} = \frac{15}{200} = 0{,}08; \quad a_{32} = \frac{30}{150} = 0{,}2; \quad a_{33} = \frac{15}{180} = 0{,}08.$$

Тогда матрица прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}24 & 0{,}13 \\ 0{,}1 & 0{,}11 & 0{,}08 \\ 0{,}08 & 0{,}2 & 0{,}08 \end{pmatrix}.$$

2. Матрицу коэффициентов полных затрат B рассчитывают по найденной матрице A путем обращения матрицы $(E-A)$

$$(E-A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}24 & 0{,}13 \\ 0{,}1 & 0{,}11 & 0{,}08 \\ 0{,}08 & 0{,}2 & 0{,}08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}24 & -0{,}13 \\ -0{,}1 & 0{,}89 & -0{,}08 \\ -0{,}08 & -0{,}2 & 0{,}92 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица имеет вид

$$B = (E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}104 & 0{,}339 & 0{,}186 \\ 0{,}135 & 1{,}188 & 0{,}122 \\ 0{,}125 & 0{,}288 & 1{,}130 \end{pmatrix}.$$

3. Объем производства валовой продукции x_i при заданном объеме конечной продукции y_i в плановом периоде можно определить двумя путями:

1) используя модель (2.2), и тогда для данной задачи появится система уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}05x_1 + 0{,}24x_2 + 0{,}13x_3 + 150, \\ x_2 = 0{,}1x_1 + 0{,}11x_2 + 0{,}08x_3 + 110, \\ x_3 = 0{,}08x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}08x_3 + 140. \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений, получим объемы валовой продукции в плановом периоде

$$x_{1пл} = 228{,}9; \; x_{2пл} = 168{,}07; \; x_{3пл} = 208{,}61;$$

2) используя модель (2.6), имеем

$$\overline{X}_{пл} = \begin{pmatrix} 1{,}104 & 0{,}339 & 0{,}186 \\ 0{,}135 & 1{,}118 & 0{,}122 \\ 0{,}125 & 0{,}288 & 1{,}130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150 \\ 110 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 228{,}90 \\ 168{,}07 \\ 208{,}61 \end{pmatrix}.$$

Результаты, полученные в обоих случаях, должны совпадать, если вычисления проведены верно (небольшое отклонение возможно за счет округления). Если известна матрица коэффициентов полных затрат, то второй путь предпочтительнее (вычисления менее трудоемкие).

4. Чтобы построить таблицу МОБ на планируемый год, нужно определить межотраслевые потоки. Для этого воспользуемся формулой, получаемой из (2.1)

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j.$$

$x_{11} = 0{,}05 \cdot 228{,}9 = 11{,}45$; $x_{12} = 0{,}24 \cdot 168{,}07 = 40{,}33$; $x_{13} = 0{,}13 \cdot 208{,}61 = 27{,}12$;
$x_{21} = 0{,}10 \cdot 228{,}9 = 22{,}89$; $x_{22} = 0{,}11 \cdot 168{,}07 = 18{,}49$; $x_{23} = 0{,}08 \cdot 203{,}61 = 16{,}69$;
$x_{31} = 0{,}08 \cdot 228{,}9 = 18{,}31$; $x_{32} = 0{,}20 \cdot 168{,}07 = 33{,}61$; $x_{33} = 0{,}08 \cdot 208{,}61 = 16{,}69$.

Валовая добавленная стоимость находится как разность между объемом валовой продукции и суммой межотраслевых потоков соответствующих столбцов:

$$z_j = x_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij},\ j = \overline{1, n}.$$

Межотраслевой баланс на плановый период представлен в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Производящая отрасль	Потребляющая отрасль			Продукция, млрд ден. ед.	
	I	II	III	конечная	валовая
I	11,45	40,33	27,12	150	228,90
II	22,89	18,49	16,69	110	168,07
III	18,31	33,61	16,69	140	208,61
Валовая добавленная стоимость, млрд ден. ед.	176,25	75,63	148,12	400	
Валовая продукция, млрд ден. ед.	228,90	168,07	208,61		605,58

Б. Задачи

2.1. По условным данным двух отраслей — межотраслевым потокам и вектору конечной продукции

$$x_{ij} = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 55 \\ 30 \end{pmatrix};$$

1) определить в плановом периоде вектор конечного использования при валовом выпуске

$$X_{пл} = \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \end{pmatrix};$$

2) привести схему МОБ на плановый период.

2.2. По условным данным матрицы коэффициентов прямых затрат A и вектора $Y_{пл}$:

1) определить валовую продукцию каждой отрасли;

2) результаты представить в виде балансовой таблицы.

Условные данные

а) $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad Y_{пл} = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad Y_{пл} = \begin{pmatrix} 150 \\ 300 \end{pmatrix};$

в) $A = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}40 \\ 0{,}14 & 0{,}12 \end{pmatrix}, \quad Y_{пл} = \begin{pmatrix} 110 \\ 60 \end{pmatrix};$

г) $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \quad Y_{пл} = \begin{pmatrix} 96 \\ 18 \end{pmatrix}.$

2.3. На основании данных за отчетный год (табл. 2.3) рассчитайте коэффициенты прямых и полных затрат.

Таблица 2.3

Отрасль	Производственное потребление в отраслях		Конечный продукт
	I	II	
I	8	24	48
II	16	36	68

Как изменятся валовые выпуски отраслей, если в плановом периоде производство конечной продукции отрасли I увеличится на 20 ед., а отрасли II — на 15 ед.?

2.4. Для трех отраслей за отчетный период известны данные о межотраслевых потоках x_{ij} и векторе объемов конечного использования $Y_{отч}$ (табл. 2.4 а, б, в).

Определить:

1) матрицу коэффициентов прямых затрат A;

2) матрицу «затрат — выпуска» $(E–A)$;

3) объемы конечного использования продукции $Y_{пл}$ при условии, что в плановом периоде известен валовой выпуск продукции $X_{пл}$;

4) результаты представить в виде балансовой таблицы.

Условные данные

Таблица 2.4

а)

Отрасль	Межотраслевые потоки x_{ij}			$Y_{отч}$
	I	II	III	
I	80	15	25	80
II	10	60	5	225
III	10	30	30	30

$X_{пл}$ = (300, 400, 200);

б)

Отрасль	Межотраслевые потоки x_{ij}			$Y_{отч}$
	I	II	III	
I	36	30	16	38
II	30	20	10	40
III	24	10	8	8

$X_{пл}$ = (150, 100, 50);

в)

Отрасль	Межотраслевые потоки x_{ij}			$Y_{отч}$
	I	II	III	
I	40	15	20	50
II	20	45	40	45
III	20	15	10	55

$X_{пл}$ = (200, 300, 150).

2.5. По условным данным трех отраслей на плановый период — матрицы коэффициентов прямых затрат A и вектора конечной продукции $Y_{пл}$ — рассчитать межотраслевой баланс, привести числовую схему баланса и проанализировать полученные результаты.

Условные данные

$$а)\ A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}24 & 0{,}13 \\ 0{,}10 & 0{,}11 & 0{,}08 \\ 0{,}08 & 0{,}20 & 0{,}08 \end{pmatrix}, \quad Y_{пл} = \begin{pmatrix} 150 \\ 110 \\ 140 \end{pmatrix};$$

$$б)\ A = \begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}06 \\ 0{,}10 & 0{,}25 & 0{,}20 \end{pmatrix}, \quad Y_{пл} = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix};$$

$$в)\ A = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 0{,}14 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}15 & 0{,}07 \\ 0{,}10 & 0{,}08 & 0{,}05 \end{pmatrix}, \quad Y_{пл} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

2.6. Для условной экономики, состоящей из трех отраслей, за отчетный период известны данные о межотраслевых потоках x_{ij} и векторе объемов конечного использования $Y_{отч}$ (табл. 2.5 а, б, в, г).

Требуется:

1) рассчитать

а) коэффициенты прямых затрат a_{ij} (и дать их экономическую характеристику);

б) коэффициенты полных затрат b_{ij} (и дать их экономическую характеристику);

2) определить, каким должен быть валовой выпуск про-

дукции в планируемом году $X_{пл}$, чтобы обеспечить плановые объемы конечного использования продукции $Y_{пл}$;

3) полученные результаты представить в виде балансовой таблицы.

Условные данные

Таблица 2.5

а)

Отрасль	Межотраслевые потоки x_{ij}			$Y_{отч}$
	I	II	III	
I	10	15	20	25
II	20	45	20	75
III	25	15	40	50

$$Y_{пл} = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix};$$

б)

Отрасль	Межотраслевые потоки x_{ij}			$Y_{отч}$
	I	II	III	
I	90	40	50	100
II	70	60	40	90
III	50	60	20	40

$$Y_{пл} = \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ 50 \end{pmatrix};$$

в)

Отрасль	Межотраслевые потоки x_{ij}			$Y_{отч}$
	I	II	III	
I	10	20	15	50
II	5	15	30	65
III	35	40	20	55

$$Y_{пл} = \begin{pmatrix} 55 \\ 80 \\ 45 \end{pmatrix};$$

г)

Отрасль	Межотраслевые потоки x_{ij}			$Y_{отч}$
	I	II	III	
I	33	30	16	31
II	22	20	12	46
III	11	10	32	27

$$Y_{пл} = \begin{pmatrix} 75 \\ 65 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

2.7. По условным коэффициентам полных затрат, заданных матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 1{,}4 \end{pmatrix},$$

анализируются два варианта производства конечного продукта:

$$\bar{y}^1 = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \end{pmatrix}; \quad \bar{y}^2 = \begin{pmatrix} 170 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Как изменятся:

1) валовые объемы производства при переходе от первого варианта ко второму;

2) структура промежуточного продукта?

2.8. Для развития трех отраслей в плановом году необходимо произвести 100 ед. валовой продукции II отрасли, а для I и III отраслей выпустить в сферу конечного потребления соответственно 44 и 10 ед. конечной продукции. Матрица коэффициентов прямых затрат известна

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Требуется рассчитать плановый межотраслевой баланс, привести числовую схему баланса и проанализировать полученные результаты.

2.9. За отчетный период известны данные о межотраслевых потоках x_{ij} и объемах валового выпуска продукции x_j трех отраслей (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Отрасль	Межотраслевые потоки x_{ij}		
	I	II	III
I	30	10	5
II	35	50	10
III	15	25	5
Зарплата	15	10	30
Прочие элементы ВДС	40	25	55
$X_{отч}$	135	120	105

Определить, какое влияние в условиях рынка оказывает увеличение цены на продукцию первой отрасли в 10 раз на изменение цен в других отраслях. Реальная динамика затрат в прогнозном периоде остается неизменной. Учесть, что рост заработной платы отстает от роста цен; коэффициент эластичности зарплаты от цен составляет 0,8.

2.10. За отчетный период известны данные о межотраслевых потоках x_{ij} и объемах валового выпуска x_j трех отраслей (табл. 2.7).

Таблица 2.7

Отрасль	Межотраслевые потоки x_{ij}		
	I	II	III
I	36	30	16
II	30	20	10
III	24	10	8
Зарплата	9	10	4
Прочие элементы ВДС	21	30	12
$X_{отч}$	120	100	50

Определить, как изменятся индексы цен в отраслях, если номинальная заработная плата в III отрасли увеличится на 50 % и будет оставаться неизменной в других отраслях. Реальная динамика прочих элементов добавленной стоимости остается неизменной.

2.11. За отчетный период известны данные о межотраслевых потоках x_{ij} и объемах валового выпуска продукции x_j трех отраслей (табл. 2.8).

Таблица 2.8

Отрасль	Межотраслевые потоки x_{ij}		
	I	II	III
I	15	20	10
II	10	35	50
III	5	25	25
Прибыль	10	15	10
Прочие элементы ВДС	35	45	25
$X_{отч}$	75	140	120

Определить, какое влияние в условиях рынка оказывает увеличение цены на продукцию II отрасли в 5 раз на изменение цен в других отраслях. Реальная динамика затрат в прогнозном периоде остается неизменной. Учесть, что рост прибыли отстает от роста цен; коэффициент эластичности прибыли от цен составил 0,75.

2.12. Для трех отраслей за отчетный период известны данные о межотраслевых потоках x_{ij} и объемах валового выпуска x_j (табл. 2.9).

Таблица 2.9

Отрасль	Межотраслевые потоки x_{ij}		
	I	II	III
I	36	30	16
II	30	20	10
III	24	10	12
Зарплата	9	10	15
Прочие элементы ВДС	21	30	37
$X_{отч}$	120	100	90

Определить, как изменятся индексы цен в отраслях, если номинальная заработная плата в I отрасли увеличится в 2 раза и будет оставаться неизменной в других отраслях. Реальная динамика прочих элементов добавленной стоимости остается неизменной.

2.13. Для трех отраслей за отчетный период известны данные о межотраслевых потоках x_{ij} и объемах валового выпуска продукции x_j (табл. 2.10).

Определить, какое влияние в условиях рынка оказывает увеличение цены на продукцию III отрасли в 10 раз на изменение цен в других отраслях. Реальная динамика затрат в прогнозном периоде остается неизменной. Учесть, что рост заработной платы отстает от роста цен; коэффициент эластичности зарплаты от цен составил 0,7.

Таблица 2.10

Отрасль	Межотраслевые потоки x_{ij}		
	I	II	III
I	40	15	20
II	30	50	40
III	20	25	10
Зарплата	10	15	5
Прочие элементы ВДС	40	45	25
$X_{отч}$	140	150	100

2.14. Для трех отраслей за отчетный период известны данные о межотраслевых потоках x_{ij} и объемах валового выпуска x_j (табл. 2.11).

Таблица 2.11

Отрасль	Межотраслевые потоки x_{ij}		
	I	II	III
I	20	30	15
II	30	25	10
III	25	20	10
Зарплата	10	15	9
Прочие элементы ВДС	30	40	26
$X_{отч}$	115	130	70

Определить, как изменятся индексы цен в отраслях, если номинальная заработная плата во II отрасли увеличится на 60 % и будет оставаться неизменной в других отраслях. Реальная динамика прочих элементов добавленной стоимости остается неизменной.

В. Варианты заданий для решения на ПЭВМ (табл. 2.12—2.16)

Для шести отраслей за отчетный период известны межотраслевые потоки x_{ij} и вектор объемов конечного использования $Y_{отч}$. Предполагаем, что в плановом периоде технология производства не изменится.

Требуется:

1) рассчитать плановый межотраслевой баланс при условии, что в плановом периоде известен покупательский спрос $Y_{пл}$;

2) привести числовую схему баланса;

3) проанализировать полученные результаты.

Вариант 1

Таблица 2.12

Отрасль	I	II	III	IV	V	VI	$Y_{отч}$
I	36	42	27	37	19	16	110
II	47	38	45	56	37	59	70
III	17	19	30	20	15	16	90
IV	33	46	17	36	15	45	70
V	35	36	25	27	29	37	88
VI	45	47	35	46	32	25	56

$$Y_{(пл)} = \begin{pmatrix} 66 \\ 88 \\ 45 \\ 37 \\ 66 \\ 49 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

Таблица 2.13

Отрасль	I	II	III	IV	V	VI	$Y_{отч}$
I	87	95	76	57	65	46	97
II	86	46	56	37	46	65	56
III	89	68	76	78	59	19	66
IV	35	46	43	68	54	45	98
V	44	37	38	72	29	47	102
VI	54	47	57	46	32	25	63

$$Y_{(пл)} = \begin{pmatrix} 87 \\ 65 \\ 57 \\ 38 \\ 54 \\ 89 \end{pmatrix}.$$

Вариант 3

Таблица 2.14

Отрасль	I	II	III	IV	V	VI	$Y_{отч}$
I	20	10	20	30	15	30	90
II	40	30	40	50	30	50	60
III	17	19	30	20	15	16	80
IV	37	42	10	33	10	45	90
V	44	37	38	72	29	45	80
VI	45	47	35	46	32	25	50

$$Y_{(пл)} = \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \\ 40 \\ 30 \\ 60 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Вариант 4

Таблица 2.15

Отрасль	I	II	III	IV	V	VI	$Y_{отч}$
I	35	10	20	30	15	25	50
II	10	30	10	25	25	40	70
III	17	19	30	20	15	16	30
IV	20	20	10	40	10	20	70
V	35	36	25	27	29	30	80
VI	45	40	35	40	30	20	40

$$Y_{(пл)} = \begin{pmatrix} 80 \\ 90 \\ 50 \\ 50 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Вариант 5

Таблица 2.16

Отрасли	I	II	III	IV	V	VI	$Y_{отч}$
I	65	73	86	46	92	23	99
II	56	32	46	58	38	65	87
III	13	23	66	87	46	19	88
IV	35	46	24	68	54	45	112
V	44	37	23	72	29	47	95
VI	54	47	35	46	32	25	56

$$Y_{(пл)} = \begin{pmatrix} 66 \\ 88 \\ \text{[illegible]}5 \\ 37 \\ 66 \\ 49 \end{pmatrix}.$$

Г. Инструкция по решению задачи на ПЭВМ средствами Excel

1. Заносим исходные данные баланса в электронную таблицу Excel:

Отрасль	I	II	III	IV	V	VI	$Y_{отч}$	$X_{отч}$
I								
II								
III								
IV								
V								
VI								
$Z_{отч}$								
$X_{отч}$								

Элементы столбца $X_{отч}$ рассчитываем по формуле

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = \overline{1,6}.$$

Для этого курсор помещаем в ячейку для x_1, используем функцию СУММ, где в качестве аргумента берем элементы первой строки, затем копируем эту формулу в остальные ячейки столбца $X_{отч}$. Переписываем полученные значения в строчку $X_{отч}$ внизу, для этого используем формулы, то есть $x_{1\ стр}$= (адрес $x_{1\ столб}$) и т.д.

2. Строим матрицу A.

Строим таблицу для матрицы размером 6 · 6. В первой клетке записываем формулу

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j},$$

например, для x_{11} = B22/B$9, (где B$9 — адрес x_1 в столбце).

Чтобы дальше эту формулу скопировать, в знаменателе перед цифрой в адресе ставим знак $. Далее эту формулу копируем по матрице.

3. Строим матрицу E. Для этого в свободном пространстве размещаем по диагонали 6 единиц, остальные клетки оставляем свободными.

4. Строим матрицу (E–A). Рассчитываем первый элемент (= $e_{11} - a_{11}$), а дальше формулу копируем.

5. Строим матрицу B, используя функцию МОБР:

а) выделяем массив 6 · 6 под матрицу B;

б) вызываем функцию МОБР;

в) вводим в поле *Массив* диапазон, в котором размещена матрица (E – A);

г) нажимаем одновременно Ctrl-Shift и ОК.

В результате в выделенном массиве появится матрица B.

6. Строим результирующую таблицу:

Баланс на планируемый период

Отрасль	I	II	III	IV	V	VI	$Y_{пл}$	$X_{пл}$
I								
II								
III								
IV								
V								
VI								
$Z_{пл}$								
$X_{пл}$								

В столбец $Y_{пл}$ вписываем значения $Y_{пл}$ из условия. Столбец $X_{пл}$ рассчитываем с помощью функции МУМНОЖ:

а) выделяем массив (столбец $X_{пл}$);

б) вызываем функцию МУМНОЖ;

в) вносим данные: *Массив 1* — матрица *B*, *Массив 2* — вектор $Y_{пл}$;

г) нажимаем Ctrl-Shift-OK одновременно.

7. Переписываем значение $X_{пл}$ вниз в строку (используя формулы).

8. Рассчитываем элементы таблицы $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$, (например, x_{11} = B9·B$28). Опять в адресе x_j перед цифрой ставим $ и затем копируем формулу в нужные клетки таблицы.

9. Рассчитываем валовую добавленную стоимость j-х отраслей:

$$z_j = x_j - СУММ\,(x_{ij}).$$

10. Проверяем, выполняется ли балансовое соотношение

$$\sum_j z_j = \sum_i y_i.$$

11. Рассчитываем балансовое соотношение и заносим в правую нижнюю клетку

$$\sum_j x_j = \sum_i x_i.$$

12. Анализируем полученные результаты.

Глава 3. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

3.1. Модели управления однономенклатурными запасами

А. Общие сведения

Под *запасом* понимается все то, на что имеется спрос и что выключено временно из потребления. Запасы подразделяются на *запасы средств производства*, предназначенные для производственного потребления (сбытовые, производственные, государственные резервы и незавершенное производство), и *запасы предметов потребления*, предназначенные для использования в непроизводственной социально-экономической сфере и для удовлетворения потребностей людей (товарные, запасы предметов коллективного и индивидуального потребления и государственные резервы).

Простейшая модель оптимального размера партии поставки. Эта модель позволяет определить такой размер заказываемой партии, который минимизирует расходы на организацию заказа и содержание его на складе. Экономичная партия поставки вычисляется при следующих допущениях. Уровень запасов снижается равномерно с интенсивностью v (спрос). В момент, когда все запасы исчерпаны, подается заказ на поставку новой партии размером q ед. Заказ выполняется мгновенно, то есть время доставки заказа пренебрежимо мало и уровень запасов восстанавливается до максимального значения, равного q. Накладные расходы, связанные с размещением заказа и поставкой партии, не зависят от объема партии и равны постоянной величине K. Издержки содержания единицы товара на складе в единицу времени равны s. Срыв поставок недопустим. Процесс изменения уровня запасов показан на рис. 3.1.

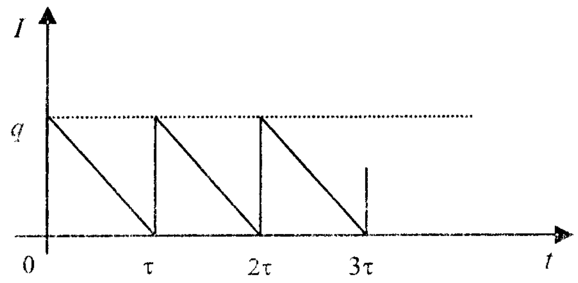

Рис. 3.1

Пусть τ — интервал времени между поставками. Очевидно $\tau = q/\nu$. Так как расходование запаса происходит с постоянной интенсивностью ν, то средний уровень запаса за интервал τ равен $q/2$, а общие затраты, связанные с хранением и заказыванием товара, равны

$$L_ц = K + s \cdot \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{\nu}.$$

Разделив это выражение на длину цикла τ, получим общие затраты в единицу времени

$$L = \frac{K\nu}{q} + s \cdot \frac{q}{2}.$$

Чтобы вычислить оптимальный размер партии поставки, нужно приравнять к нулю первую производную по q, то есть решить уравнение

$$\frac{dL}{dq} = -\frac{K\nu}{q^2} + \frac{s}{2} = 0.$$

Оптимальный размер партии заказа

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}}.$$

Эту формулу называют *формулой размера партии, экономичной величиной заказа, формулой квадратного корня, формулой Уилсона* и т.д.

Оптимальный интервал между поставками

$$\tau^* = q^*/\nu = \sqrt{2K/(s\nu)}.$$

Оптимальный средний уровень текущего запаса

$$I^* = q^*/2 = \sqrt{K\nu/(2s)}.$$

Оптимальное число поставок

$$n^* = [\nu T/q^*] = [\sqrt{sTQ/(2K)}] \text{ или } n^*+1,$$

где Q — потребление за плановый период T ($Q = \nu \cdot T$).

Суммарные затраты по формированию поставок и содержанию запасов в единицу времени

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} = sq^*.$$

Практически важный вывод из формулы Уилсона состоит в том, что величина партии поставки пропорциональна корню квадратному из интенсивности потребления, то есть

$$q^* = \sqrt{2K/(sT)} \cdot \sqrt{\nu T}.$$

Обозначив

$$\sqrt{2K/(sT)} = H,$$

получим

$$q^* = H\sqrt{Q}.$$

Эта формула применяется для приближенного расчета величины партии поставки. Вместо вычисления издержек K и s, что является очень сложной задачей, находят H.

В случае, когда требования дискретны, а на размер партии налагается ограничение целочисленности, параметры системы следующие:

$$q^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K\nu}{s}}\right],$$

где число в квадратных скобках — наибольшее целое число, не превосходящее q.

В случае, если

$$q_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K\nu}{s}} \quad \text{и} \quad q_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K\nu}{s}}$$ — целые числа,

оптимальных решений два: $q_1^* = q_1$ и $q_2^* = q_2$.

Модель с конечной интенсивностью поступления заказа. Пусть заказанная партия поступает с интенсивностью λ единиц в единицу времени. Очевидно, система может работать без дефицита, если интенсивность поставок λ превосходит интенсивность потребления ν. Изменение уровня запаса для рассматриваемого случая изображено на рис. 3.2.

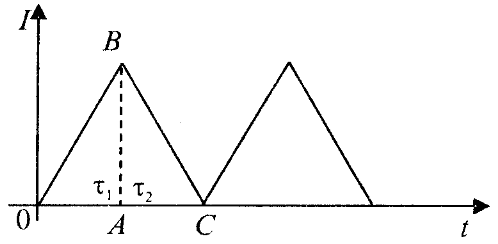

Рис. 3.2

В течение времени τ_1 запас одновременно и поступает, и расходуется, это время накопления запаса. В течение τ_2 запас только расходуется. Длина цикла

$$\tau = \tau_1 + \tau_2.$$

Учитывая, что максимальный наличный запас

$$I_{\max} = q(1-\nu/\lambda),$$

издержки системы в единицу времени составят

$$L = \frac{K\nu}{q} + \frac{sq}{2}\left(1 - \frac{\nu}{\lambda}\right).$$

Оптимальные параметры работы системы определяются обычным образом. Величина оптимальной партии

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\nu/\lambda}},$$

оптимальный период возобновления заказа

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\nu/\lambda}},$$

его составляющие

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\lambda}, \quad \tau_2^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{1-\nu/\lambda},$$

минимальные издержки в единицу времени

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \sqrt{1-\nu/\lambda}.$$

Когда интенсивность поставки значительно больше интенсивности потребления $\nu/\lambda \to 0$, имеем обычную систему Уилсона.

Модель с учетом неудовлетворенных требований. Рассмотрим случай, когда дефицит допускается, но неудовлетворенные требования берутся на учет.

При поступлении очередной партии вначале удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас. Изменение запаса в такой системе показано на рис. 3.3.

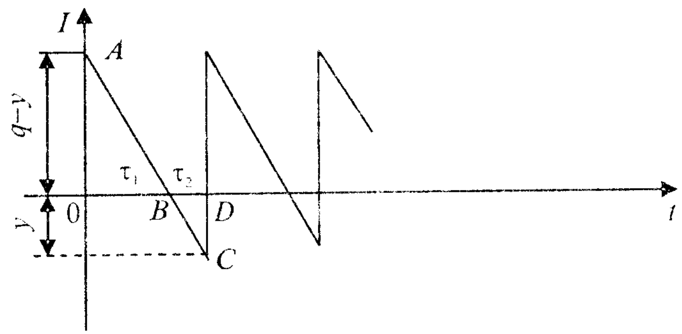

Рис. 3.3

Здесь y — максимальная величина задолженного спроса; $Y = q - y$ — максимальная величина наличного запаса; τ_1 — время существования наличного запаса; τ_2 — время дефицита; d — убытки, связанные с дефицитом единицы запаса в единицу времени.

Издержки работы системы в единицу времени

$$L = \frac{K\nu}{q} + s\frac{(q-y)^2}{2q} + d\frac{y^2}{2q}.$$

Оптимальные параметры системы:

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{1 + \frac{s}{d}},$$

$$y^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + {}^s\!/_d}},$$

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + {}^s\!/_d}},$$

$$Y^* = q^* - y^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + {}^s\!/_d}},$$

$$\tau_1^* = \frac{Y^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + {}^s\!/_d}},$$

$$\tau_2^* = \frac{y^*}{\nu} = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + {}^s\!/_d}},$$

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{q^*}{\nu} \cdot \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{1 + {}^s\!/_d}.$$

Полезно иметь в виду, что $\dfrac{Y^*}{y^*} = \dfrac{\tau_1^*}{\tau_2^*} = \dfrac{d}{s}$.

Модель с потерей неудовлетворенных требований. Пусть неудовлетворенные требования теряются. Изменения запаса в такой системе показаны на рис. 3.4.

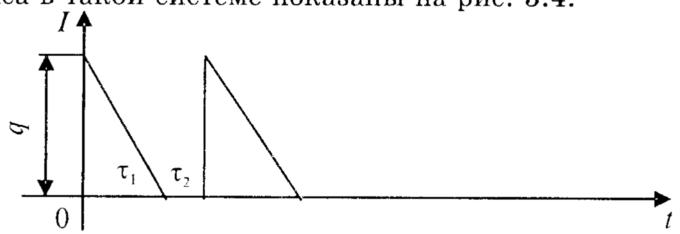

Рис. 3.4

Здесь τ_1 — время существования наличного запаса, τ_2 — время существования дефицита (запас равен 0, требования не удовлетворяются и не ставятся на учет). Из-за дефицита система несет убытки. В простейшем случае издержки дефицита считают пропорциональными средней величине потерянных требований и времени τ_2. Издержки одного цикла τ составят

$$L = K_{\text{н}} + s\frac{q^2}{2\nu} + d\,\frac{\nu(\tau - q/\nu)^2}{2\tau}.$$

Издержки работы системы в единицу времени достигнут

$$L = \frac{K}{\tau} + s\frac{q^2}{2\nu\tau} + d\,\frac{\nu(\tau - q/\nu)^2}{2\tau}.$$

Откуда

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + s/d}};$$

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + s/d}};$$

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \sqrt{1 + s/d}.$$

Найдем отношение времени содержания запаса ко времени дефицита

$$\frac{\tau_1^*}{\tau_2^*} = \frac{d}{s},$$

то есть время существования наличного запаса так относится ко времени дефицита, как удельные издержки дефицита — к удельным издержкам содержания.

Модель с определением точки заказа. В реальных ситуациях для обеспечения бесперебойного снабжения следует учитывать время выполнения заказа θ, то есть заказ должен подаваться в момент, когда уровень запаса достаточен для удовлетворения потребности на время выполнения заказа. Величину наличного запаса, при которой делается заказ на пополнение, будем называть *точкой размещения заказа* (r). Для любого случая простейшей модели Уилсона точка размещения заказа находится по формуле

$$r = \theta\nu - \left[\frac{\theta}{\tau^*}\right] q^*,$$

где [.] — целая часть числа (.).

Для обеспечения бездефицитной работы необходимо иметь минимальный начальный запас I_0, величина которого

$$I_0 = \theta\nu.$$

Пусть I — фактический начальный запас. Для непрерывной работы необходимо, чтобы $I \geq \theta\nu$. Время потребления начального запаса равно $\frac{I}{\nu}$. Чтобы заказанная партия была доставлена не позже полного расхода начального запаса, ее нужно разместить в момент

$$t_0 = \frac{I}{\nu} - \theta.$$

В общем случае заказы нужно размещать в моменты

$$t_k = \left(\frac{I}{\nu} - \theta\right) + k\tau^*, \quad k = 0, 1, 2 \ldots .$$

В системе с конечной интенсивностью поступления заказа при определении оптимальной точки заказа рассматриваются два случая:

1) если $\theta - \left[\frac{\theta}{\tau^*}\right]\tau^* < \tau_2^*$, то $r = \theta\nu - \left[\frac{\theta}{\tau^*}\right]q^*$;

2) если $\theta - \left[\frac{\theta}{\tau^*}\right]\tau^* > \tau_2^*$, то $r = \theta(\nu - \lambda) + \left(\left[\frac{\theta}{\tau^*}\right] + 1\right)\cdot\left(\frac{\lambda}{\nu} - 1\right)q^*$.

Для системы с учетом неудовлетворенных требований точка заказа определяется по формуле

$$r = \theta\nu - \left[\frac{\theta}{\tau^*}\right]q^* - y^*$$

и может быть отрицательной величиной. То есть заявки на пополнение запаса должны посылаться, когда величина дефицита составляет $|r|$.

Определение оптимальной величины партии в условиях скидки. В некоторых случаях цена, назначенная за тот или иной товар, может зависеть от объема покупки. На заказы большого объема обычно предусматриваются скидки. Как повлияет предоставление скидки на общую стоимость? Заказы на более крупные партии продукции повлекут за собой увеличение стоимости запасов (стоимость заказа + издержки хранения), но данное увеличение может быть до некоторой

степени компенсировано снижением закупочной цены. Как правило, стоимость покупки значительно превосходит по величине общую стоимость запасов.

Пример. Предприятие занимается производством и реализацией натуральных яблочных соков. Для осуществления своей деятельности предприятие закупает яблоки у населения. Владельцы садов продают яблоки по 100 ден. ед. за 1 т, но при этом в зависимости от объема партии предлагают следующие скидки:

0—100 т — 0 %;
101—200 т — 4 %;
201—300 т — 6 %;
> 300 т — 15 %.

При предоплате предоставляется скидка 5 %; оплата по мере реализации — без скидки.

Ежемесячно предприятие равномерно перерабатывает 100 т яблок и всю продукцию реализует. Фирма для хранения яблок имеет собственный склад на 200 т, издержки на содержание склада — 200 ден. ед: в месяц.

В случае потребности можно арендовать дополнительный склад по цене:

на 100 т — 150 ден. ед.;
на 200 т — 250 ден. ед.;
на 300 т — 390 ден. ед.

Стоимость оформления документов на закупку одной партии составляет 30 ден. ед. Транспортные издержки — 10 ден. ед. за 1 т. Порча яблок составляет 10 кг на 1 т в месяц.

Из-за недостатка собственных оборотных средств фирма вынуждена для первой закупки брать кредит на поставку сырья по ставке 15 % годовых.

Требуется:

1) определить возможные стратегии закупок яблок и изобразить их графически;

2) количественно оценить каждую из стратегий и выбрать лучшую.

Возможны два варианта закупок сырья: оплата за счет кредита и оплата в рассрочку. По каждому варианту возможны 3 стратегии закупок сырья:

1-я стратегия: ежемесячно закупать по 100 т яблок;

2-я стратегия: ежеквартально закупать по 300 т яблок;

3-я стратегия: закупать по 400 т яблок в первом и седьмом месяцах и по 200 единиц в третьем и девятом месяцах.

Схемы закупок изображены на рис. 3.1—3.3 соответственно.

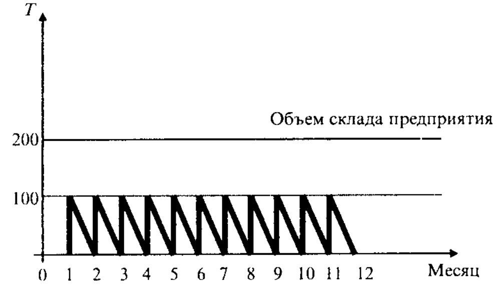

Рис. 3.1

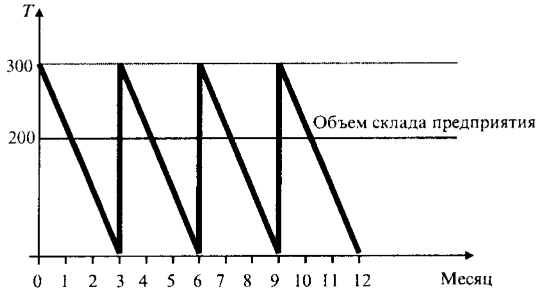

Рис. 3.2

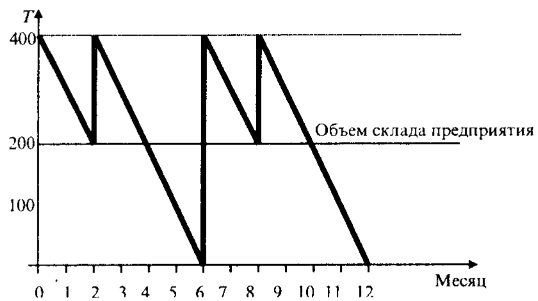

Рис. 3.3

Рассчитываем издержки по каждой стратегии для обоих вариантов.

Вариант 1: на условиях предоплаты (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Стратегия	1	2	3
Цена за 1 т	$100 - 0{,}05 \cdot 100 = 95$*	$(100 - 0{,}05 \cdot 100) \times 0{,}94 = 89{,}3$	$(100 - 0{,}05 \cdot 100) \times 0{,}96 = 91{,}2$ $(100 - 0{,}05 \cdot 100) \times 0{,}85 = 80{,}75$
Стоимость поставки	$(100 \cdot 95 + 100 \cdot 10 + 30) \cdot 12 = 126\,360$	$(300 \cdot 89{,}3 + 300 \times 10 + 30) \cdot 4 = 119\,280$	$(400 \cdot 80{,}75 + 400 \times 10 + 30 + 200 \times 91{,}2 + 200 \cdot 10 + 30) \cdot 2 = 113\,200$
Складские расходы	$200 \cdot 12 = 2400$	$(200 \cdot 3 + 150) \cdot 4 = 3000$	$200 \cdot 12 + 250 \cdot 8 = 4400$
Убыток от порчи	$100 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 \cdot 95 \times 12 = 95 \cdot 6 = 570$	$300 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 \cdot 89{,}3 \times 4 = 6 \cdot 89{,}3 \approx 536$	$400 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 \cdot 80{,}75 \times 2 + 200 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 \times 91{,}2 \cdot 2 = 505{,}4$
Стоимость кредита	$(100 \cdot 95 + 100 \cdot 10 + 30) \cdot \frac{0{,}15}{12} = 131$	$(300 \cdot 89{,}3 + 300 \times 10 + 30) \cdot \frac{0{,}15}{4} \approx 1118$	$(400 \cdot 80{,}75 + 400 \times 10 + 30) \cdot \frac{0{,}15}{3} = 1816{,}5$
Суммарные издержки	129 461	127 289	119 922

* Здесь предполагается предоплата и, соответственно, снижение цены на 5 %.

Вариант 2: оплата в рассрочку (табл. 3.2).

Предположим, что при оплате в рассрочку предприятию не требуется кредит, издержки покрываются за счет получаемой выручки.

Таблица 3.2

Стратегия	1	2	3
Цена	100	$100 \cdot 0{,}94 = 94$	$100 \cdot 0{,}96 = 96$ $100 \cdot 0{,}85 = 85$
Стоимость поставки	$(100 \cdot 100 + 100 \times 10 + 30) \cdot 12 = 132\,360$	$(300 \cdot 94 + 300 \times 10 + 30) \cdot 4 = 124\,920$	$[(400 \cdot 85 + 400 \times 10 + 30) + (200 \times 96 + 200 \cdot 10 + 30)] \cdot 2 = 118\,520$
Складские расходы	$200 \cdot 12 = 2400$	$(200 \cdot 3 + 150) \times 4 = 3000$	$200 \cdot 12 + 250 \times 8 = 4400$
Убыток от порчи	$100 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 \cdot 100 \times 12 = 600$	$(300 \cdot 0{,}01 \cdot 94) \times 4 = 564$	$400 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 \cdot 85 \times 2 + 200 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 \times 96 \cdot 2 = 532$
Суммарные издержки	135 360	128 484	123 452

Таким образом, наилучшим вариантом являются закупки сырья по 3-й стратегии на условиях предоплаты.

Б. Задачи

3.1. Годовая потребность фирмы в деревоматериалах составляет 4000 м^3, затраты на хранение 1 м^3 в год — 4 ден. ед. Затраты на подготовительно-заключительные операции, не зависящие от величины поставляемой партии и связанные с каждой поставкой, равны 80 ден. ед.

Требуется:

1) найти:

а) оптимальный размер партии поставки;

б) оптимальный интервал между поставками;

в) средний уровень текущего запаса;

г) число поставок;

д) годовые затраты, связанные с работой данной системы;

2) сравнить полученные затраты с затратами в случае отклонений от оптимальной партии в любом направлении в два раза.

3.2. Потребность станко-сборочного цеха в заготовках некоторого типа составляет 32 тыс. шт. в год. Издержки размещения заказа — 50 ден. ед., издержки содержания одной заготовки в год равны 5 ден. ед. Среднее время реализации заказа — 10 дней.

Определить оптимальную партию поставки, периодичность возобновления поставок, точку размещения заказа, минимальный начальный запас и моменты повторения заказов.

3.3. Компания поставляет заказчику принтеры. Средняя потребность в них — 49 шт. в год. Стоимость размещения одного заказа — 30 ден. ед., издержки содержания составляют 15 ден. ед. в год.

Определить оптимальную партию поставки.

3.4. На склад поступают материалы, годовой объем поставок которых равен 810 шт. Издержки завоза одной партии составляют 40 ден. ед., издержки хранения единицы запаса в сутки — 0,20 ден. ед., время доставки партии — 2 дня.

Найти оптимальный размер партии, периодичность поставок, минимальный начальный запас, точку заказа, моменты подачи заказа.

3.5. Фабрика выпускает партиями пять различных полуфабрикатов. Интенсивность потребления каждого вида составляет 76 т в месяц. При переходе от выпуска одного вида полуфабриката к другому нужно проводить переналадки оборудования, что связанно с затратами в 81 ден. ед. независимо от выпускаемых полуфабрикатов. Содержание 1 т полуфабрикатов обходится в 38 ден. ед. в месяц. Производительность фабрики — 400 т в месяц. Время реализации заказа (от подачи заявки до выхода готовой продукции) составляет 3 дня.

Определить оптимальный размер партии выпуска каждого вида полуфабрикатов, периодичность повторения заказов, точку их размещения и среднемесячные издержки, связанные с переналадками и содержанием готовой продукции, если дефицит не допускается.

3.6. Спрос на продукцию инструментального цеха составляет 6200 ед. в год. Стоимость хранения, включая потери, связанные с моральным старением, составляет 496 ден. ед. за единицу в год. Издержки размещения заказа равны 1296 ден. ед. Неудовлетворенные требования берутся на учет. Удельные издержки дефицита составляют 3600 ден. ед. за нехватку единицы продукции в течение года.

Найти оптимальную партию поставки, максимальную величину задолженного спроса, интервал возобновления поставки, точку размещения заказа (время доставки — 0,5 месяца) и годовые потери функционирования системы.

3.7. Годовая потребность торгового центра в пылесосах составляет 600 шт., затраты на хранение 1 пылесоса — 3 ден. ед. в год. Затраты же на подготовительно-заключительные операции, не зависящие от величины поставляемой партии и связанные с каждой поставкой, равны 36 ден. ед.

Найти оптимальный размер партии поставки, оптимальный интервал между поставками, средний уровень текущего запаса, число поставок и среднегодовые затраты, связанные с работой системы.

3.8. Годовая потребность магазина в телевизорах — 900 шт. Затраты, связанные с содержанием одного телевизора, составляют 40 ден. ед. в год, а затраты, связанные с оформлением каждого заказа, — 500 ден. ед. Согласно торговому договору завод должен заказанные магазином телевизоры поставлять по частям с интенсивностью 150 шт. в месяц, пока не реализуется вся партия. Если в момент обращения покупателя в магазине нет нужного товара, то требование ставится на учет и удовлетворяется по мере новых поступлений. Издержки дефицита, включающие затраты, связанные с учетом неудовлетворенных требований, составляют в год 40 ден. ед./шт.

Определить оптимальную партию поставки, оптимальный интервал возобновления заказа и среднегодовые издержки

3.9. Магазин радиотоваров реализует музыкальные центры. Средняя потребность в них — 3 шт. в месяц. Стоимость организации заказа — 28 ден. ед. Содержание его в течение месяца обходится в 14 ден. ед.

Определить оптимальную партию поставки и среднемесячные издержки размещения и содержания запасов.

3.10. Цех выпускает заготовки разного типа партиями на одном и том же оборудовании. При переходе от выпуска одного вида заготовок к другому приходится нести затраты на переналадку оборудования, которые равны в среднем 80 ден. ед. Средняя потребность в заготовках каждого типа составляет 20 000 шт. в год, себестоимость 1 заготовки в среднем равна 160 ден. ед. Издержки содержания составляют 2 % от стоимости продукции, находящейся в запасе.

Найти оптимальную партию запуска изделий, периодичность запуска и среднегодовые издержки работы системы, связанные с содержанием запасов и переналадками.

3.2. Модели управления многономенклатурными запасами

А. Общие сведения

Складские системы промышленных предприятий содержат от нескольких десятков до нескольких тысяч номенклатур. Следовательно, возникает необходимость рассмотрения задач управления многономенклатурными запасами.

Раздельная оптимизация. При отсутствии взаимодействия между запасами различных видов продукции затраты L в единицу времени для системы, включающей N видов хранимой продукции, вычисляются по формуле

$$L = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{K_i \nu_i}{q_i} + \frac{s_i q_i}{2}\right). \qquad (3.1)$$

Используя необходимый признак экстремума, находим искомые оптимальные параметры:

- оптимальная партия поставки

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2k_i \nu_i}{s_i}}, \qquad i = \overline{1, N};$$

- оптимальный интервал возобновления поставки

$$t_i^* = \frac{q_i^*}{\nu_i}\sqrt{\frac{2k_i}{s_i \nu_i}}, \qquad i = \overline{1, N};$$

• оптимальный текущий уровень запаса

$$\bar{I}_i^* = \frac{q_i^*}{2} = \sqrt{\frac{2k_i}{2s_i}}, \qquad i = \overline{1, N}.$$

Минимальные издержки в единицу времени составляют

$$L^* = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{2K_i s_i \nu_i}.$$

Пусть общая складская площадь ограничена величиной f. Ограничение на складские площади имеет вид

$$\sum_{i=1}^{N} f_i q_i \le f, \qquad (3.2)$$

где f_i — площадь, необходимая для хранения единицы i-го вида продукции, q_i — величина партии i-го вида продукции.

В выражение (3.2) обычно вводится нормировочный множитель h для учета того факта, что запасы отдельных номенклатур могут поступать независимо друг от друга. При одновременном пополнении запасов всех номенклатур запас и занятая им площадь оказываются максимальными и $h = 1$. Полагая $h = 1/2$, допускаем, что запасы всех видов продукции пополняются в разное время, а уровень запасов и занятая ими площадь являются средними. Маловероятно, что занятая площадь окажется намного меньше половины имеющейся, поэтому $1/2 \le h \le 1$. С учетом сказанного ограничение (3.2) запишется так:

$$h\sum_{i=1}^{N} f_i q_i \le f. \qquad (3.3)$$

Для определения экстремума функции (3.1) при наличии ограничения (3.3) можно применить метод множителей Лагранжа. Выводим систему из $N + 1$ уравнения с $N + 1$ неизвестной $q_1, \ldots q_n, \lambda$:

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \sqrt{\frac{2K_i\nu_i}{s_i + 2h\lambda f_i}}, \quad i = \overline{1, N}, \\ h\sum_{i=1}^{N} f_i q_i &= f. \end{aligned}\right\}$$

Неопределенный множитель Лагранжа λ в данном случае имеет конкретный экономический смысл: он показывает, на сколько можно сократить минимальные издержки функционирования системы в единицу времени, увеличив складские площади на единицу.

Аналогично решается задача, если ограничения накладываются на величину оборотных средств A, вложенных в запасы.

Полное совмещение заказов. При пополнении запасов из одного источника часто несколько заказов объединяются. Суммарные издержки размещения N заказов считают равными

$$K_0\,(1 + \gamma N),$$

где K_0 — фиксированные издержки, не зависящие от числа номенклатур, и γ $(0 \le \gamma \le 1)$ — доля издержек заказывания, связанная с размещением заказа по каждой номенклатуре.

Период размещения заказа по всем номенклатурам будет общим. Обозначим его через τ. Издержки размещения заказов и содержания запасов в единицу времени

$$L = \frac{K_0(1 + \gamma N)}{\tau} + \frac{1}{2}\tau\sum_{i=1}^{N} s_i \nu_i.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{2K_0(1 + \gamma N)}{\sum_{i=1}^{N} s_i \nu_i}}, \\ q_i^* &= \nu_i \tau_i^*, \quad i = \overline{1, N}, \\ L^* &= \sqrt{2K_0(1 + \gamma N)\sum_{i=1}^{N} s_i \nu_i} = \tau^* \sum_{i=1}^{N} s_i \nu_i \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

Часто необходимо бывает минимизировать суммарные издержки при различных ограничениях. Пусть, например, площадь склада равна f, а единица i-го вида продукции требует для хранения f_i $(i = \overline{1, N})$ квадратных метров. С учетом того, что $q_i = \tau \nu_i$, ограничение по складским площадям имеет вид

$$\tau \sum_{i=1}^{N} f_i \nu_i \le f, \qquad (3.5)$$

ограничение по оборотным средствам

$$\tau \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \nu_i \le A. \qquad (3.6)$$

В случае одного ограничения решение задачи идет по такой схеме. Определяется τ_0 по формуле (3.4). Если τ_0 удовлетворяет ограничению, то $\tau^* = \tau_0$. Если τ_0 не удовлетворяет ограничению, то τ^* должно превратить ограничение (3.5) или (3.6) в строгое равенство. В этом случае оптимальный период возобновления поставок будет равен:

для ограничения по площади

$$\tau^* = \frac{f}{\sum_{i=1}^{N} f_i \nu_i},$$

для ограничения по оборотным средствам

$$\tau^* = \frac{A}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \nu_i}.$$

Оптимальный поставочный комплект составит

$$q_i^* = \nu_i \tau^*, \quad (i = \overline{1, N}).$$

Б. Задачи

3.11. Склад оптовой торговли отпускает пять видов товаров (табл. 3.3). Заданы потребности ν_i, издержки заказывания K_i, издержки содержания s_i, расход складской площади на единицу товара f_i. Известна общая величина складской площади торгового зала F.

Требуется:

1) определить оптимальные партии поставок при ограничении максимального уровня запаса. Учесть, что все пять видов продукции поступают на склад от разных поставщиков (раздельная оптимизация);

2) если продукция поступает из одного источника (полное совмещение заказов), издержки размещения заказов в этом случае равны средним издержкам индивидуальных издержек заказывания $\overline{K}$ плюс 25 % стоимости организации заказа по каждому продукту, то есть

$$K = \overline{K} + 0{,}25 \sum_i K_i;$$

3) сравнить полученные результаты с действующей системой поставок — один раз в квартал с индивидуальным подходом к каждому продукту без учета ограничений на складские площади.

Таблица 3.3

Вариант	F	Параметр	1	2	3	4	5
1	1340	ν_i, т/год	8000	160	1800	150	200
		K_i, р.	40	5	6	6	30
		s_i, р./т в год	16	4	6	2	30
		f_i	20	3	4	3	15
2	1000	ν_i	500	700	200	150	400
		K_i	20	10	5	3	7
		s_i	5	10	4	2	20
		f_i	10	20	5	2	8
3	1200	ν_i	900	700	300	1000	200
		K_i	10	5	20	30	6
		s_i	5	15	10	2	3
		f_i	16	4	15	22	10
4	500	ν_i	400	600	800	700	200
		K_i	10	12	11	9	8
		s_i	16	8	8	7	4
		f_i	4	3	5	4	4
5	1100	ν_i	700	200	500	150	800
		K_i	5	5	20	3	4
		s_i	15	4	10	2	20
		f_i	20	5	2	8	4

3.12. Имеются данные годового объема поставок Q_i в тыс. ден. ед. и количество поставок в отчетном периоде n_i (табл. 3.4).

Определить оптимальные параметры управления многономенклатурными запасами.

Таблица 3.4

Вид	Наименование товара	Отчетные данные	
		Q_i — годовой объем поставок, тыс. ден. ед.	n_i — число поставок
1	Сырье (удобрения)	120	4
2	Материалы (ядохимикаты)	32	6
3	Полуфабрикаты (цемент)	60	8

3.13. На складе хранятся три вида товаров. Исходные данные для вычисления оптимальных параметров товароснабжения — в табл. 3.5.

Таблица 3.5

	Единица измерения	Вид товароматериальных ценностей		
		1	2	3
Годовая потребность (Q_i)	тыс. ден. ед.	3000	2000	2500
Годовые издержки хранения в расчете на тыс. ден. ед. запаса (b_i)	ден. ед.	40	35	30
Издержки по организации поставки одной партии (S_i)	ден. ед.	50	50	50
Потребность в складской емкости для хранения товароматериальных ценностей стоимостью в 1 тыс. ден. ед. (v_i)	м^3	5	2	3

Глава 4. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЕКТАМИ

4.1. Построение сетевых графиков и расчет их временных параметров

А. Общие сведения

Методы сетевого планирования и управления (СПУ) активно используются при управлении проектами, прежде всего для расчета планов и их оптимизации по различным критериям. Основным элементом систем СПУ является *сетевая модель*, которая моделирует процесс выполнения комплекса работ для достижения определенной цели. Графическое изображение сетевой модели называется *сетевым графиком*. Сетевой график с математической точки зрения представляет собой ориентированный граф без петель и контуров. Обозначим его

$$G = (E, \vec{e}),$$

где E — множество вершин, $\vec{e}$ — множество дуг.

Дугам на сетевом графике соответствуют работы, а вершинам — события. *Работой* называется любой процесс, происходящий во времени. Все работы можно разделить на действительные работы, ожидания, фиктивные (зависимости). Под *действительными работами* следует понимать любой трудовой процесс, требующий ресурсов и имеющий некоторую продолжительность. *Ожидание* — это некоторый процесс, не требующий ресурсов, но имеющий некоторую продолжительность. *Фиктивные работы* (зависимости) не требуют ресурсов и имеют нулевую продолжительность, они используются для обозначения логических зависимостей между действительными работами.

Событие — это результат выполнения работ, в него входящих; оно не имеет продолжительности и не потребляет ресурсов. На любом сетевом графике можно выделить *исходное, промежуточное* и *завершающее события*. Любая работа сетевой модели соединяет два события: начальное событие работы и конечное событие работы. Для однозначного обозначения работ используют идентификаторы (i, j), где i — номер начального события работы, j — номер конечного события работы. Обычно на сетевых графиках события упорядочены, то есть $i < j$.

Любая последовательность работ, в которой конечное событие предыдущей работы является начальным событием последующей, называется *путем*. Под *длиной пути* будем понимать продолжительность выполнения всей последовательности работ, составляющих этот путь. На сетевой модели следует различать: *полный путь; путь, предшествующий событию; путь, следующий за событием; путь между событиями*.

Среди полных путей особое значение придается критическому пути.

Критический путь — это наиболее протяженный по времени полный путь; его продолжительность определяет минимальное время выполнения проекта (критический срок $t_{кр}$). Критических путей на сетевом графике может быть несколько.

При анализе сетевых графиков прежде всего вычисляют его временные параметры. К основным временным параметрам относятся:

- продолжительность критического пути (*критический срок*);
- сроки свершения и резервы событий;
- сроки выполнения отдельных работ и их резервы времени.

Продолжительность выполнения работы (i,j) обозначим t_{ij}.

Ранний срок $t_р(j)$ свершения события j — это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию:

$$t_р(1) = 0,$$
$$t_р(j) = \max_{(i,j)\in U_j^+}(t_р(i) + t_{ij}),$$

где U_j^+ — множество работ, заканчивающихся j-м событием; $t_р(i)$ — ранний срок свершения начального события работы (i, j); t_{ij} — продолжительность работы (i, j). Тогда $t_р(S) = t_{кр}$.

Поздний срок $t_п(i)$ свершения события i — такой предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием. Для завершающего события S предполагается, что

$$t_п(S) = t_р(S) = t_{кр}.$$

Тогда

$$t_п(i) = \min_{(i,j)\in U_i}(t_п(j) - t_{ij}),$$

где U_i — множество работ, начинающихся i-м событием; $t_п(i)$ — поздний срок свершения конечного события работы (i, j).

Резерв времени R (i) события i показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нарушения срока наступления завершающего события:

$$R(i) = t_п(i) - t_р(i).$$

Ранний срок начала работы (i, j)

$$t_{р.н}(i, j) = t_р(i).$$

Ранний срок окончания работы (i, j)

$$t_{р.о}(i, j) = t_р(i) + t_{ij}.$$

Поздний срок окончания работы (i, j)

$$t_{п.о}(i, j) = t_п(j).$$

Поздний срок начала работы (i, j)

$$t_{п.н}(i, j) = t_п(j) - t_{ij}.$$

Ранний срок свершения события j часто находят по формуле

$$t_р(j) = \max_{(i,j)\in U_j^+} t_{р.о}(i, j),$$

а поздний срок свершения события i — по формуле

$$t_п(i) = \min_{(i,j)\in U_i} t_{п.н}(i, j).$$

Полный резерв времени $R_п(i, j)$ работы (i, j) — это максимальный запас времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность при условии, что весь комплекс работ будет завершен в критический срок:

$$R_п(i, j) = t_п(j) - t_р(i) - t_{ij} = t_п(j) - t_{р.о}(i, j).$$

Свободный резерв времени $R_с(i, j)$ работы (i, j) — это максимальный запас времени, на которое можно отсрочить или (если она началась в свой ранний срок) увеличить ее продолжительность при условии, что не нарушаются ранние сроки начала всех последующих работ:

$$R_с(i, j) = t_р(j) - t_р(i) - t_{ij} = t_р(j) - t_{р.о}(i, j).$$

Критические работы, как и критические события, резервов не имеют.

Б. Задачи

4.1. Проект разработки и внедрения нового вида продукта включает в себя следующие работы (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, мес.
A_1	–	1
A_2	–	5
A_3	A_1	3
A_4	A_1	2
A_5	A_2, A_3	6
A_6	A_2, A_3	5
A_7	A_4, A_5	5
A_8	A_6	3

Требуется:
1) построить сетевой график проекта;
2) рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3) рассчитать временные параметры свершения событий;
4) определить сроки выполнения работ и их резервы времени;
5) построить линейный график выполнения работ проекта.

4.2. Фирма «Астра» запланировала реконструкцию своего офиса. Перечень работ, которые необходимо для этого выполнить, представлен в табл. 4.2.

Требуется:
1) построить сетевой график проекта;
2) рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3) рассчитать временные параметры свершения событий;
4) определить сроки выполнения работ и их резервы времени;
5) построить линейный график выполнения работ проекта.

Таблица 4.2

Работа	Содержание	Предшествующие работы	Продолжительность, дн.
A_1	Определение объема реконструкции	–	5
A_2	Составление сметы затрат	A_1	10
A_3	Выбор проекта реконструкции	A_1	5
A_4	Выбор строительной организации	A_2	3
A_5	Получение финансового обеспечения	A_2	5
A_6	Составление договора на выполнение работ	A_4	3
A_7	Экономическое обоснование проекта	A_3	4
A_8	Привязка проекта к условиям фирмы	A_7	5
A_9	Работа по реконструкции	A_5, A_6, A_8	39

4.3. Подготовка и проведение экскурсионного тура требуют выполнения следующих работ (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дн.
A_1	–	6
A_2	–	8
A_3	–	2
A_4	A_1	3
A_5	A_1	4
A_6	A_3	6
A_7	A_3	3
A_8	A_2, A_5, A_6	4
A_9	A_2, A_5, A_6	4
A_{10}	A_4, A_8	2
A_{11}	A_7	3

Требуется:

1) построить сетевой график проекта;

2) рассчитать временные параметры свершения событий, пользуясь четырехсекторной схемой. Выделить критические работы, указать критический срок выполнения проекта;

3) определить сроки выполнения работ и их резервы времени;

4) построить линейный график выполнения работ проекта.

4.4. Туристская фирма готовится принять участие в выставке-ярмарке туристских услуг. Перечень работ, которые необходимо выполнить в процессе подготовки, их взаимосвязь и продолжительность указаны в табл. 4.4.

Требуется:

1) построить сетевой график проекта;

2) выяснить, какое минимальное время необходимо для подготовки к ярмарке;

3) выявить резервы работ и «узкие места» всего комплекса работ;

4) построить линейный график (график Ганта) выполнения работ.

Таблица 4.4

Работа	Содержание работы	Предшествующие работы	Продолжительность работы, дн.
A_1	—	—	5
A_2	Определение размера и типа стенда	A_1	1
A_3	Определение рекламной стратегии	A_1	3
A_4	Разработка дизайна проекта экспозиции	A_1	6
A_5	Определение количества и видов рекламно-информационных материалов	A_3	2
A_6	Оформление заказов; оплата счетов	A_5	7
A_7	Получение заказов; сортировка, упаковка	A_6	12
A_8	Заказ оборудования и экспонатов	A_4	5
A_9	Получение оборудования и экспонатов	A_8	14
A_{10}	Техническое и художественное оформление стендов	A_9	8
A_{11}	Упаковка и подготовка к транспортировке	A_{10}	3
A_{12}	Заключение договора на участие и оплата аренды	A_2	4
A_{13}	Бронирование билетов и мест в гостинице	A_{12}	2
A_{14}	Распределение обязанностей; обучение и инструктаж персонала	A_{13}	6
A_{15}	Переезд и размещение	A_{14}	2
A_{16}	Оформление договоров на дополнительные услуги обслуживания на выставке	A_{12}	3
A_{17}	Транспортировка экспозиции и материалов	A_7, A_{11}	2
A_{18}	Установка оборудования и подготовка стенда к открытию	A_{15}, A_{16}, A_{17}	2

4.5. Комплекс работ по организации спортивно-оздоровительного мероприятия для детей туристской школы приведен в табл. 4.5.

Таблица 4.5

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, дн.
A_1	–	4
A_2	–	6
A_3	A_1	2
A_4	A_1	6
A_5	A_2, A_3	3
A_6	A_2, A_3	3
A_7	A_4, A_5	5

Требуется:
1) построить сетевой график проекта;
2) рассчитать минимальное время выполнения проекта;
3) рассчитать временные параметры свершения событий;
4) определить сроки выполнения работ и их резервы времени;
5) построить линейный график выполнения работ проекта.

4.6. Осуществление проекта требует выполнения ряда работ, перечень которых задан в табл. 4.6.

Таблица 4.6

Работа	Предшествующие работы	Продолжительность работы, мес.
A_1	–	5
A_2	–	3
A_3	A_1	7
A_4	A_1	6
A_5	A_2	7
A_6	A_4, A_5	3
A_7	A_4, A_5	10
A_8	A_3, A_6	8

Требуется:
1) построить сетевой график выполнения проекта;
2) определить:
а) сколько времени потребуется для завершения проекта;
б) можно ли отложить выполнение работы A_4 без отсрочки завершения проекта в целом;

в) на сколько месяцев можно отложить выполнение работы A_3 без отсрочки завершения проекта в целом?

4.7. Университет рассматривает предложение о строительстве новой турбазы. Работы, которые следует выполнить перед началом строительства, представлены в табл. 4.7.

Таблица 4.7

Работа	Содержание работы	Предшествующие работы	Продолжительность работ, нед.
A_1	Определить место строительства	–	6
A_2	Разработать первоначальный проект	A_1	8
A_3	Получить разрешение на строительство	A_1	12
A_4	Выбрать архитектурную мастерскую	A_3	4
A_5	Разработать смету затрат на строительство	A_3	12
A_6	Закончить разработку проекта	A_4, A_5	15
A_7	Получить финансовое обеспечение	A_2, A_5	12
A_8	Нанять подрядчика	A_6, A_7	8

Требуется:
1) построить сетевой график проекта;
2) найти критический путь;
3) определить, реально ли начать работу по строительству здания турбазы через год после принятия решения о начале проекта;
4) определить сроки свершения событий, пользуясь четырехсекторной схемой;
5) определить сроки выполнения работ и их резервы времени.

4.8. Проект подготовки нового экскурсионного тура состоит из восьми работ (табл. 4.8).

Таблица 4.8

Работа	Непосредственно предшествующая работа	Продолжительность работы, дн.
A_1	–	3
A_2	–	6
A_3	A_1	2
A_4	A_2, A_3	5
A_5	A_4	4
A_6	A_5	3
A_7	A_2, A_3	9
A_8	A_6, A_7	3

Требуется:

1) построить сетевой график проекта;

2) рассчитать минимальное время выполнения проекта;

3) рассчитать временные параметры свершения событий;

4) определить, можно ли отложить выполнение работы A_3 без отсрочки завершения проекта в целом;

5) определить, на сколько дней можно отложить выполнение работы A_6 без отсрочки завершения проекта в целом?

4.2. Оптимизация проекта по времени

А. Общие сведения

Сокращение времени завершения проекта, как правило, связано с привлечением дополнительных средств (количество рабочих, сверхурочное время). Рассмотрим два примера постановки задачи оптимизации проекта по времени с привлечением дополнительных средств.

Постановка задачи 1. Для сокращения времени выполнения проекта выделяется некоторая сумма дополнительных средств B. Задан сетевой график $G = (E, \vec{e})$ выполнения проекта, где E — множество событий, а $\vec{e}$ — множество работ. Продолжительность каждой работы равна t_{ij}. Известно, что вложение дополнительных средств x_{ij} в работу (i, j) сокращает время ее выполнения от t_{ij} до t'_{ij}, причем эта зависимость выражается как

$t'_{ij} = f_{ij}(x_{ij}) \le t_{ij}$ (f_{ij} — известные функции).

Для каждой работы существует минимально возможное время ее выполнения d_{ij}.

Требуется определить время начала $t^{н}_{ij}$ и окончания $t^{о}_{ij}$ выполнения работ, а также количество дополнительных средств x_{ij}, которые необходимо вложить в работы (i, j), чтобы общее время выполнения проекта было минимальным, сумма вложенных дополнительных средств не превышала величины B, время выполнения каждой работы было не меньше минимально возможного времени d_{ij}.

Математически условия задачи можно записать следующим образом:

$$t_{кр} = t^{о}_{n-1,n}(\min); \tag{4.1}$$

$$\sum_{(i,j)\in\vec{e}} x_{ij} \le B; \tag{4.2}$$

$$t^{о}_{ij} - t^{н}_{ij} \ge d_{ij}, \quad (i, j) \in \vec{e}; \tag{4.3}$$

$$t^{о}_{ij} - t^{н}_{ij} = f_{ij}(x_{ij}), \quad (i, j) \in \vec{e}; \tag{4.4}$$

$$t^{н}_{rj} \ge t^{о}_{ir}, \text{ для всех } i, j, r \in E; \tag{4.5}$$

$$t^{н}_{ij} \ge 0,\ t^{о}_{ij} \ge 0,\ x_{ij} \ge 0, \quad (i, j) \in \vec{e}. \tag{4.6}$$

Ограничение (4.2) определяет сумму вложенных дополнительных средств: она не должна превышать величины B. Ограничения (4.3) показывают, что продолжительность каждой работы должна быть не менее минимально возможной ее продолжительности. Ограничения-равенства (4.4) показывают зависимость продолжительности каждой работы от вложенных в нее дополнительных средств. Ограничения (4.5) обеспечивают выполнение условий предшествования работ в соответствии с топологией сети: время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующих ей работ. (4.6) — условие неотрицательности.

Если в последнее событие сети n входят сразу несколько работ, то необходимо добавить фиктивную работу $(n, n + 1)$, время выполнения которой равно нулю ($t^{о}_{n,n+1} - t^{н}_{n,n+1} = 0$ добавить в ограничение (4.4)). Тогда целевая функция запишется так

$$t_{кр} = t^{о}_{n,n+1} \text{ (min)}.$$

Постановка задачи 2. Пусть задан срок выполнения проекта t_0, а расчетное $t_{кр} > t_0$. В этом случае оптимизация комплекса работ сводится к сокращению продолжительности критического пути. Задача заключается в определении величины дополнительных вложений x_{ij} в отдельные работы проекта, с тем чтобы общий срок его выполнения не превышал заданной величины t_0, а суммарный расход дополнительных средств был минимальным. Время выполнения каждой работы должно быть не меньше минимально возможного времени d_{ij}.

Математическая запись этой задачи:

$$F(x) = \sum_{(i,j)\in \vec{e}} x_{ij} \text{ (min)};$$

$$t^{о}_{in} \le t_0; \qquad (i, n) \in \vec{e};$$

$$t^{о}_{ij} - t^{н}_{ij} \ge d_{ij}, \qquad (i, j) \in \vec{e};$$

$$t^{о}_{ij} - t^{н}_{ij} = f_{ij}(x_{ij}), \qquad (i, j) \in \vec{e};$$

$$t^{н}_{rj} \ge t^{о}_{ir}, \quad \text{для всех } i, j, r \in E;$$

$$t^{н}_{rj} \ge 0,\ t^{о}_{ij} \ge 0,\ \ x_{ij} \ge 0,\ (i, j) \in \vec{e}.$$

Смысл ограничений аналогичен соответствующим ограничениям постановки задачи 1 (4.1) — (4.6).

Приведенные постановки задачи относятся к классу задач математического программирования и могут быть решены известными методами в зависимости от вида функций $f_{ij}(x_{ij})$. Если предположить, что продолжительность выполнения работ линейно зависит от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением

$$t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij},$$

где k_{ij} — технологические коэффициенты использования дополнительных средств, то будем иметь задачу линейного программирования.

Пример. Для сокращения срока реализации проекта, представленного сетевым графиком (рис. 4.1), заказчик выделил 14 ед. дополнительных средств. Продолжительность

выполнения работ линейно зависит от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij}$. Известно, что $k_{12} = 0{,}1$; $k_{13} = 0{,}2$; $k_{23} = 0{,}5$; $k_{24} = 0{,}3$; $k_{35} = 0{,}6$; $k_{45} = 0{,}1$. Над каждой работой поставлена ее продолжительность t_{ij} и минимально возможное время выполнения d_{ij}.

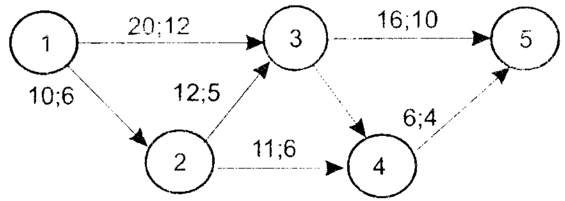

Рис. 4.1

Требуется оптимизировать сетевой график по времени, то есть найти такие $t^{н}_{ij}$, $t^{о}_{ij}$, x_{ij}, чтобы:

а) время выполнения всего проекта было минимальным;

б) сумма дополнительно вложенных средств не превышала 14 ед.;

в) продолжительность выполнения каждой работы была не меньше заданной величины d_{ij}.

Добавим на сетевом графике фиктивную работу (5, 6), как показано на рис. 4.2.

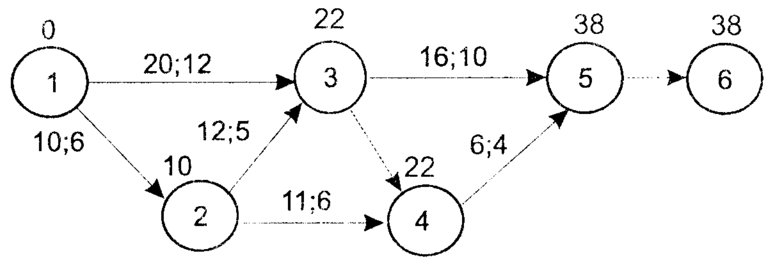

Рис. 4.2

Тогда целевая функция запишется в виде

$$t_{кр} = t^{о}_{56} \text{ (min)}.$$

Запишем ограничения задачи:

а) сумма вложенных средств не должна превышать их наличного количества

$x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{24} + x_{35} + x_{45} \le 14$

б) продолжительность выполнения каждой работы должна быть не меньше минимально возможного времени:

$t^о_{12} - t^н_{12} \ge 6$; $t^о_{13} - t^н_{13} \ge 12$;
$t^о_{23} - t^н_{23} \ge 5$; $t^о_{24} - t^н_{24} \ge 6$;
$t^о_{34} - t^н_{34} = 0$; $t^о_{35} - t^н_{35} \ge 10$;
$t^о_{45} - t^н_{45} \ge 4$; $t^о_{56} - t^н_{56} = 0$;

в) зависимость продолжительности работ от вложенных средств

$t^0_{12} - t^н_{12} = 10 - 0{,}1x_{12}$; $t^0_{13} - t^н_{13} = 20 - 0{,}2x_{13}$;
$t^0_{23} - t^н_{23} = 12 - 0{,}5x_{23}$; $t^0_{24} - t^н_{24} = 11 - 0{,}3x_{34}$;
$t^0_{35} - t^н_{35} = 16 - 0{,}6x_{35}$; $t^0_{45} - t^н_{45} = 6 - 0{,}1x_{45}$;

г) время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей работы

$t^н_{12} = 0$; $t^н_{13} = 0$; $t^н_{23} \ge t^о_{12}$; $t^н_{24} \ge t^о_{12}$; $t^н_{34} \ge t^о_{13}$;
$t^н_{34} \ge t^о_{23}$; $t^н_{35} \ge t^о_{13}$; $t^н_{35} \ge t^о_{23}$; $t^н_{45} \ge t^о_{24}$;
$t^н_{45} \ge t^о_{34}$; $t^н_{56} \ge t^о_{35}$; $t^н_{56} \ge t^о_{45}$;

д) условие неотрицательности неизвестных

$t^н_{ij} \ge 0$, $t^о_{ij} \ge 0$, $x_{ij} \ge 0$, $(i,j) \in \bar{e}$.

Решив данную задачу симплекс-методом на ПЭВМ, получаем:

$t^н_{12} = 0$; $t^о_{12} = 10$; $t^н_{13} = 0$; $t^о_{13} = 20$; $t^н_{23} = 10$; $t^о_{23} = 20$;
$t^н_{24} = 10$; $t^о_{24} = 21$; $t^н_{34} = 20$; $t^о_{34} = 20$; $t^н_{35} = 20$; $t^о_{35} = 30$;
$t^н_{45} = 24$; $t^о_{45} = 30$; $t^н_{56} = 30$; $t^о_{56} = 30$;
$x_{12} = 0$; $x_{13} = 0$; $x_{23} = 4$; $x_{24} = 0$; $x_{35} = 10$; $x_{45} = 0$;
$t_{кр} = 30$.

Таким образом, при дополнительном вложении 14 ед. комплекс работ может быть выполнен за 30 ед. времени. При этом средства распределятся следующим образом: 4 ед. в работу (2, 3) и 10 ед. в работу (3, 5) (рис.4.3).

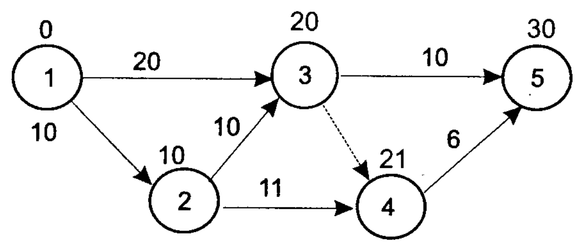

Рис. 4.3

Б. Задачи

4.9—4.10. Проект представлен сетевым графиком (рис. 4.4). Продолжительность работ t_{ij} и минимальное время их выполнения d_{ij}, а также технологические коэффициенты использования дополнительных средств k_{ij} приведены в табл. 4.9.

Необходимо определить, сколько дополнительных средств x_{ij} нужно вложить в каждую работу, чтобы время выполнения проекта не превосходило t_0, а сумма дополнительно вложенных средств была минимальной.

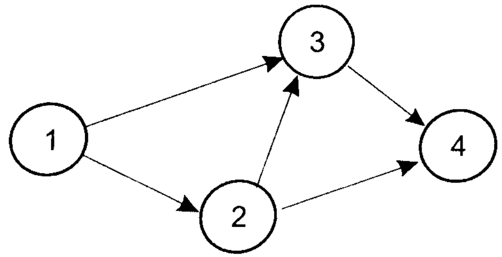

Рис. 4.4

Таблица 4.9

Номер задачи	Параметры	Работа (1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	Срок выполнения проекта t_0
4.9	t_{ij}	10	20	15	10	25	35
	d_{ij}	7	10	9	5	14	
	k_{ij}	0,05	0,3	0,4	0,1	0,2	
4.10	t_{ij}	10	20	0	10	25	30
	d_{ij}	7	10	0	5	14	
	k_{ij}	0,05	0,3	0	0,1	0,2	

4.11—4.15. Параметры проекта, заданного сетевым графиком (рис. 4.5), приведены в табл. 4.10.

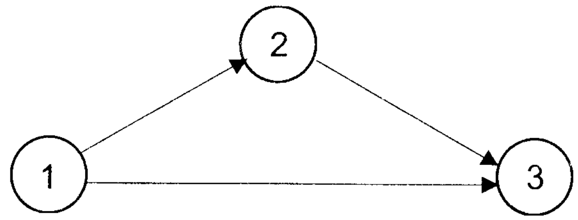

Рис. 4.5

Определить величину дополнительных вложений в каждую работу, при которых время выполнения комплекса работ не превышает t_0, а сумма дополнительных вложений минимальна.

Таблица 4.10

Номер задачи	Параметры	Работа (1,2)	(1,3)	(2,3)	Срок выполнения комплекса работ, t_0
4.11	t_{ij}	7	5	4	8
	d_{ij}	4	2	3	
	k_{ij}	0,3	0,4	0,7	
4.12	t_{ij}	10	20	8	11
	d_{ij}	6	7	2	
	k_{ij}	0,1	0,2	0,3	
4.13	t_{ij}	14	25	10	21
	d_{ij}	12	7	8	
	k_{ij}	0,1	0,4	0,2	
4.14	t_{ij}	15	17	9	20
	d_{ij}	10	14	5	
	k_{ij}	0,1	0,7	0,4	
4.15	t_{ij}	11	15	19	23
	d_{ij}	4	6	12	
	k_{ij}	0,2	0,3	0,1	

4.16—4.20. Определить оптимальные дополнительные вложения в выполнение работ проекта, представленного сетевым графиком (рис. 4.6) с параметрами из табл. 4.11, если общая сумма дополнительных средств составляет B ден. ед., а время выполнения проекта должно быть как можно меньше.

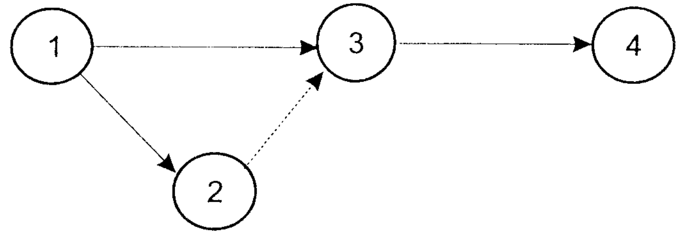

Рис. 4.6

Таблица 4.11

Номер задачи	Параметры	Работа (1,2)	(1,3)	(2,3)	(3,4)	Дополнительные средства, B
4.16	t_{ij}	20	10	0	7	190
	d_{ij}	11	6	0	4	
	k_{ij}	0,1	0,8	0	0,4	
4.17	t_{ij}	11	17	0	9	210
	d_{ij}	5	8	0	4	
	k_{ij}	0,07	0,02	0	0,05	
4.18	t_{ij}	9	12	0	17	210
	d_{ij}	4	8	0	5	
	k_{ij}	0,08	0,1	0	0,06	
4.19	t_{ij}	15	5	0	6	250
	d_{ij}	8	2	0	3	
	k_{ij}	0,2	0,3	0	0,4	
4.20	t_{ij}	19	14	0	11	150
	d_{ij}	9	7	0	6	
	k_{ij}	0,02	0,03	0	0,15	

4.3. Оптимизация проекта по стоимости

А. Общие сведения

В общем случае стоимость выполнения работы зависит от ее продолжительности. Продолжительность каждой работы может изменяться между двумя границами d_{ij} и D_{ij}, определяемыми техническими или экономическими соображениями. Если D_{ij} — нормальная продолжительность, ей соответствует минимальная стоимость c_{ij} выполнения работы (i, j); если d_{ij} — минимально возможная (экстренная) продолжительность работы, при этом стоимость работы будет максимальной C_i. Если при планировании проекта для каждой работы будет взята ее нормальная (наибольшая) длительность D_{ij}, то стоимость проекта будет минимальной. Если для каждой работы взять ее ускоренную, минимально возможную продолжительность d_{ij}, мы получим срочный план. Стоимость выполнения проекта в этом случае будет максимальной.

Зависимость стоимости от продолжительности работы нелинейна, но для упрощения оптимизационных расчетов предполагают, что уменьшение продолжительности работы пропорционально возрастанию ее стоимости. Тогда в расчете на единицу времени дополнительные затраты на сокращение продолжительности работы будут равны

$$h_{ij} = \frac{C_{ij} - c_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}}.$$

Рассмотрим оптимизацию комплекса работ по стоимости при *фиксированном сроке выполнения.*

Предполагается, что все работы выполняются в срочном режиме и исходная стоимость проекта

$$C_0 = \sum_{(i,j)\in \vec{e}} C_{ij}$$

максимальна. Необходимо минимизировать стоимость проекта при фиксированном сроке его завершения t_0 за счет увеличения времени выполнения отдельных работ.

Увеличение продолжительности работы (i, j) по сравнению с минимальным сроком выполнения на $(t^{o}_{ij} - t^{н}_{ij} - d_{ij})$ вызовет экономию средств на величину $h_{ij}\cdot(t^{o}_{ij} - t^{н}_{ij} - d_{ij})$, а стоимость выполнения работы станет равна

$$C = C_{ij} - h_{ij}\,(t^{o}_{ij} - t^{н}_{ij} - d_{ij}).$$

Если $t_0 = t_{кр}$, то оптимизация осуществляется за счет увеличения продолжительности некритических работ; если $t_{кр} < t_0$, — то за счет всех работ комплекса.

Математическая запись задачи:

$$C = \sum_{(i,j)\in \vec{e}} [C_{ij} - h_{ij}(t^{o}_{ij} - t^{н}_{ij} - d_{ij})] \quad (\min),$$

$$\begin{array}{ll}
d_{ij} \le t^{o}_{ij} - t^{н}_{ij} \le D_{ij}, & (i, j) \in \vec{e}; \\
t^{o}_{rj} \le t^{н}_{rj}, & i, j, r \in E, \\
t^{o}_{in} \le t_0, & i = \overline{1, n-1}, \\
t^{н}_{ij} \ge 0, t^{o}_{ij} \ge 0, & (i, j) \in \vec{e}; \\
t^{н}_{1j} = 0, & \overline{j = 2, n}.
\end{array}$$

Здесь 1 — номер исходного события, n — номер завершающего события.

Рассмотрим оптимизацию комплекса работ по стоимости при *нефиксированном сроке выполнения.*

Пусть задан сетевой график проекта и известны продолжительность каждой работы и стоимость ее выполнения в нормальном (D_{ij}, c_{ij}) и срочном (d_{ij}, C_{ij}) режиме работы. Если все работы выполняются в нормальном режиме, то критический срок будет наибольшим, а стоимость выполнения — наименьшей. Время выполнения проекта может быть уменьшено путем увеличения стоимости. Необходимо сократить критический срок до некоторого минимально возможного значения при наименьшем возрастании стоимости выполнения проекта. Алгоритм оптимизации проекта по стоимости приведены в [1, с. 162].

Б. Задачи

4.21—4.24. При фиксированном сроке t_0 завершения проекта найти такое время начала и окончания работ, при котором стоимость выполнения проекта, представленного сетевым графиком (рис. 4.7), будет наименьшей. Исходные данные приведены в табл. 4.12.

Определить критические работы оптимизированного проекта и величину экономии средств.

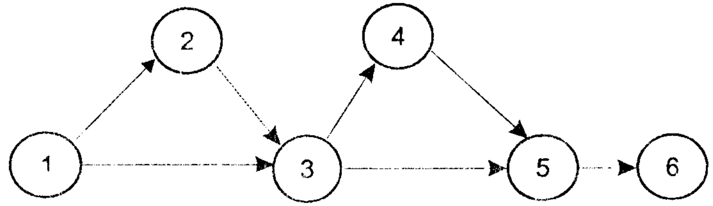

Рис. 4.7

Таблица 4.12

Номер задачи	Параметры	Работа							T_0
		(1,2)	(1,3)	(2,3)	(3,4)	(3,5)	(4,5)	(5,6)	
4.21	D_{ij}	10	15	0	7	6	5	11	28
	d_{ij}	8	9	0	4	2	3	6	
	C_{ij}	180	200	0	90	80	60	130	
	h_{ij}	13	5	M*	6	10	4	8	
4.22	D_{ij}	8	20	0	25	14	10	12	40
	d_{ij}	4	15	0	10	7	6	6	
	C_{ij}	100	150	0	190	300	80	140	
	h_{ij}	10	5	M*	4	19	7	11	
4.23	D_{ij}	20	15	0	14	10	7	23	50
	d_{ij}	10	9	0	10	5	4	17	
	c_{ij}	150	320	0	220	100	112	120	
	C_{ij}	200	380	0	300	175	136	180	
4.24	D_{ij}	7	11	0	12	9	4	10	27
	d_{ij}	3	8	0	6	5	1	6	
	C_{ij}	70	60	0	40	16	20	60	
	h_{ij}	5	4	M*	2	1	3	4	

4.25. По заданному сетевому графику (рис. 4.8) и известным параметрам работ (табл. 4.13) подготовить план выполнения проекта минимальной продолжительности и оптимальной стоимости.

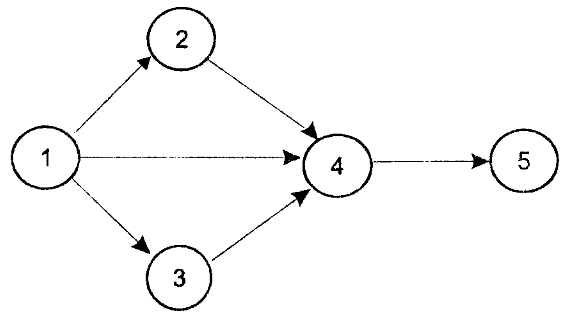

Рис. 4.8

Таблица 4.13

Параметры	Работа					
	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,5)
D_{ij}	6	7	2	5	4	4
d_{ij}	3	2	1	3	4	2
c_{ij}	90	50	42	30	70	60
C_{ij}	180	100	50	40	70	90

4.26. По сетевой модели (рис. 4.9) и известным параметрам работ (табл. 4.14) найти план выполнения комплекса работ минимальной продолжительности и оптимальной стоимости.

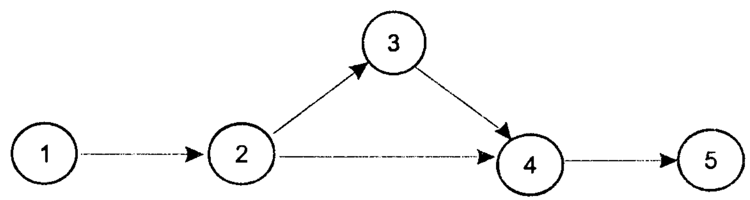

Рис. 4.9

Таблица 4.14

Параметры	Работа				
	(1,2)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(4,5)
D_{ij}	12	7	9	14	4
d_{ij}	8	4	5	7	2
c_{ij}	36	20	35	210	60
C_{ij}	64	92	75	490	90

4.27. Для оплаты сокращения срока выполнения проекта, изображенного сетевым графиком (рис. 4.10) с заданными параметрами работ (табл. 4.15), заказчик располагает 615 ден. ед. За какой минимальный срок может быть завершен проект за счет использования выделенных средств? Сравнить результат с исходным вариантом.

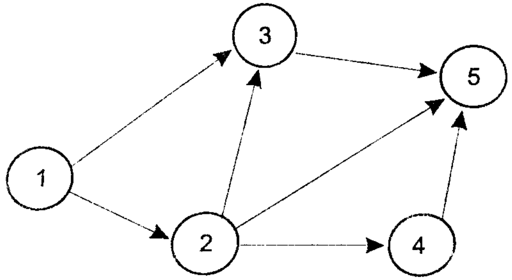

Рис. 4.10

Таблица 4.15

Параметры	Работа						
	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,5)	(2,4)	(3,5)	(4,5)
D_{ij}	11	4	9	15	8	6	5
d_{ij}	6	3	3	5	7	4	5
c_{ij}	20	30	110	130	60	96	70
C_{ij}	50	45	200	150	84	120	70

4.4. Оптимизация проекта по ресурсам

А. Общие сведения

Пусть проект задан сетевым графиком. Для выполнения проекта выделено R единиц ресурса. Каждая работа характеризуется продолжительностью выполнения t_{ij} и интенсивностью потребления ресурса r_{ij}. Под интенсивностью потребления будем понимать требуемое количество ресурса для выполнения работы (i, j) в единицу времени. Для простоты допустим, что интенсивности постоянные.

Под оптимальным распределением ресурса понимается такое размещение работ во времени, при котором в любой момент

времени потребность в ресурсах не превышает имеющегося в наличии количества ресурса, а время выполнения проекта минимально. Алгоритм решения данной задачи см. [1, с. 160].

Б. Задачи

4.28—4.37. Предприятие осваивает производство нового изделия. С этой целью создана группа из R специалистов и составлен сетевой график выполнения работ (рис. 4.11). Известны продолжительность t_{ij} выполнения каждой работы (i, j) и количество r_{ij} специалистов, необходимое для ее выполнения в единицу времени (табл. 4.16).

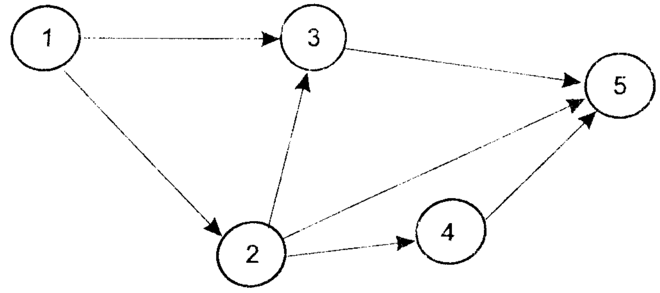

Рис. 4.11

Таблица 4.16

Номер задачи	Параметры	Работа							R
		(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	
4.28	t_{ij}	4	2	4	3	5	6	7	14
	r_{ij}	5	7	11	9	8	10	4	
4.29	t_{ij}	3	5	5	2	6	1	7	10
	r_{ij}	7	4	8	5	3	9	5	
4.30	t_{ij}	4	8	3	5	2	6	3	12
	r_{ij}	3	9	4	4	6	5	7	
4.31	t_{ij}	6	4	6	6	5	8	1	13
	r_{ij}	5	9	5	8	2	7	4	
4.32	t_{ij}	3	8	8	4	5	2	9	10
	r_{ij}	5	3	7	7	4	6	2	
4.33	t_{ij}	6	2	9	8	5	4	4	10
	r_{ij}	5	8	12	3	6	7	4	

Окончание табл. 4.16

4.34	t_{ij}	2	5	10	4	3	5	2	11
	r_{ij}	6	3	8	7	5	3	4	
4.35	t_{ij}	7	4	7	8	2	6	5	12
	r_{ij}	4	6	9	5	7	3	6	
4.36	t_{ij}	3	5	11	4	6	2	4	14
	r_{ij}	7	5	4	3	9	5	3	
4.37	t_{ij}	6	2	8	1	5	3	2	15
	r_{ij}	7	5	6	8	4	9	6	

Требуется:

1) определить ранние и поздние сроки свершения событий и их резервы времени;

2) найти критический путь;

3) найти ранние и поздние сроки начала и окончания работ;

4) найти резервы времени работ;

5) построить линейный график (график Ганта);

6) построить диаграмму использования ресурса;

7) установить сроки начала и окончания работ так, чтобы в любой момент реализации проекта потребность в специалистах не превосходила R, а время осуществления проекта было минимальным.

Глава 5. МОДЕЛИ АНАЛИЗА ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

А. Общие сведения

Основными показателями эффективности инвестиционных проектов являются:

- чистая текущая ценность (net present value) — NPV;
- внутренняя норма прибыли (internal rate of return) — IRR;
- период окупаемости проекта (payback period) — PP;
- индекс (показатель) прибыльности (profitability index) — PI.

Рассмотрим методы расчета этих показателей.

$$\mathrm{NVP} = \sum_{t=1}^{n} \frac{S_t - C_t}{(1+r)^t} - I_0,$$

где S_t — поступления в году t; C_t — выплаты (затраты) в году t; t — номер года; n — срок реализации проекта; r — ставка дисконта (либо норма прибыли альтернативных проектов, либо норма прибыли банковских депозитов); I_0 — начальные инвестиции.

IRR — это значение ставки дисконтирования, при которой NPV = 0, то есть

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{S_t - C_t}{(1+\mathrm{IRR})^t} - I_0 = 0.$$

Проект считается привлекательным, если IRR превышает ставку дисконта.

Период окупаемости проекта определяется следующим образом:

$$\mathrm{PP} = \min n, \text{ при котором } \sum_{t=1}^{n} S_t \geq I_0.$$

Дисконтированный период окупаемости DPP = min n, при котором

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{S_t}{(1+r)^t} \geq I_0.$$

Очевидно, что всегда DPP > PP, то есть проект, приемлемый по критерию PP, может оказаться неприемлемым по DPP.

Индекс прибыльности

$$PI = \frac{\sum_t \frac{S_t}{(1+r)^t}}{I_0}.$$

Если PI > 1 — проект следует принять;

PI < 1 — проект следует отвергнуть;

PI = 1 — проект не является ни прибыльным, ни убыточным.

В отличие от NPV, PI является относительным показателем: он характеризует уровень доходов на единицу затрат, то есть эффективность вложений — чем больше значение этого показателя, тем выше отдача каждого рубля.

При оценке эффективности проекта целесообразно учитывать влияние инфляции. Коэффициент дисконтирования (r), номинальный коэффициент дисконтирования, применяемый в условиях инфляции (p) и индекс инфляции (i) связаны формулой

$$1 + p = (1 + r) \cdot (1 + i).$$

Б. Задачи

5.1. Проект, требующий 1115 ден. ед. начальных инвестиций, принесет доход 1500 ден. ед. через 2 года. Годовая банковская ставка — 15 %.

Определить чистую текущую ценность проекта и внутреннюю норму прибыли. Проанализировать полученные результаты.

5.2. На вашем счету в банке 2 млн р. Банковская ставка — 18 % годовых. Вам предлагают инвестировать проект, который через 6 лет принесет доход 6 млн р. Стоит ли принимать это предложение?

5.3. Инвестор рассматривает проект, начальные инвестиции в который составляют 300 ден. ед., ожидаемый доход через три года — 800 ден. ед., норма дисконтирования — 12 %.

Определить чистую текущую ценность проекта и внутреннюю норму прибыли. Проанализировать полученные результаты.

5.4. Инвестор рассматривает проект, начальные инвестиции в который составляют 150 ден. ед. Срок реализации проекта — 2 года. Последовательность денежных потоков по годам — 150, 150 ден. ед. Ставка дисконтирования — 15 %.

Найти уровень инфляции, до которого проект эффективен.

5.5. Инвестор рассматривает два альтернативных проекта (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Проект	Инвестиции, млн ден. ед.	Денежные потоки по годам, млн ден. ед.		
		I	II	III
А	300	170	160	180
Б	200	120	130	140

Определить, какой проект следует предпочесть, если ставка дисконта 12 %.

5.6. Определить допустимый уровень инфляции для проекта, начальные инвестиции в который составляют 300 ден. ед. Срок реализации проекта — 3 года. Предполагаемые денежные поступления — по 170 ден. ед. ежегодно. Внутренняя норма прибыли альтернативных проектов — 17 %.

5.7. Для приобретения и монтажа новой технологической линии требуются инвестиции в размере 1,2 млрд ден. ед. Ожидаемые поступления за счет эксплуатации новой линии: первый год — 180 млн ден. ед., три последующих года — по 400 млн ден. ед.

Определить эффективность приобретения линии, если норма прибыли альтернативных проектов — 15 %.

5.8. Рассчитать чистую текущую ценность, показатель рентабельности и внутреннюю норму прибыли для проекта с начальными инвестициями 800 млн ден. ед. Срок проекта — 4 года. Ожидаемые денежные поступления по годам: 100, 200, 400, 800 млн ден. ед. Норма прибыли альтернативных проектов равна 10 %.

5.9. Определить экономическую целесообразность инвестиций в следующий проект: сумма инвестиций — 800 млн ден. ед., ожидаемые поступления — по 300 млн ден. ед. ежегодно. Срок реализации проекта — 5 лет. Ставка дисконтирования — 12 %. Ожидаемый уровень инфляции — 10, 12, 18 % годовых.

5.10. Возможны инвестиции в два альтернативных проекта А и Б. Условия — в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Проект	Инвестиции, млн ден. ед.	Денежные потоки по годам, млн ден. ед.			
		I	II	III	IV
А	120	0	40	70	80
Б	180	110	80	50	

Какой проект предпочтительнее при ставке дисконтирования: а) 5 %, б) 12 %? При какой ставке дисконтирования проекты одинаково эффективны?

5.11. Компания рассматривает целесообразность принятия проекта с денежными потоками, приведенными в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Инвестиции, млн ден. ед.	Денежные потоки по годам, млн ден. ед.				
	I	II	III	IV	V
180	40	60	70	60	30

Норма прибыли альтернативных проектов — 14 %. Проекты со сроком окупаемости, превышающим 4 года, не принимаются.

Провести анализ проекта с помощью критериев обыкновенного и дисконтированного сроков окупаемости.

5.12. Рассчитать чистую текущую ценность, показатель рентабельности и внутреннюю норму прибыли для проекта, рассчитанного на 5 лет, требующего начальных инвестиций в размере 1500 млн ден. ед. и имеющего предполагаемые денежные поступления по годам: 200, 300, 600, 700, 500 млн ден. ед. Норма прибыли альтернативных проектов равна 17 %.

Проанализировать полученные результаты.

5.13. Анализируются пять независимых проектов (табл. 5.4). Сумма инвестиций, приемлемая для инвестора, — 400 млн ден. ед. Ставка дисконта — 18 %. Ожидаемый годовой уровень инфляции — 6 %.

Таблица 5.4

Проект	Инвестиции, млн ден. ед.	Денежные потоки по годам, млн ден. ед.			
		I	II	III	IV
1	180	80	100	120	160
2	220	160	100	80	60
3	130	70	70	70	40
4	270	70	140	210	140
5	200	120	120	80	80

Какую комбинацию проектов считать оптимальной?

5.14. Фирма предполагает заменить часть оборудования в целях повышения его производительности. Ожидаемые поступления денежных средств в течение 6 лет от работы оборудования по годам: 100, 200, 300, 300, 400, 500 тыс. ден. ед.

Первоначальные вложения, включающие стоимость покупки и установки нового оборудования, составляют 900 тыс. ден. ед. Кроме того, через 3 года предполагают произвести ремонт нового оборудования, стоимость которого составит 200 тыс. ден. ед.

Определить NPV при ставке дисконта 12 %.

5.15. Сформировать инвестиционный портфель из проектов А, В и С, если ставка дисконта — 10 %, начальные инвестиции не должны превышать 200 ден. ед. Данные по проектам приведены в табл. 5.5.

Таблица 5.5

Проект	Начальные инвестиции, ден. ед.	Денежные потоки по годам, ден. ед.		
		I	II	III
А	110	0	250	0
В	90	0	0	300
С	100	50	150	100

5.16. Сформировать инвестиционный портфель из проектов А, В и С, если ставка дисконта — 15 %, начальные инвестиции не должны превышать 150 ден. ед. Данные по проектам приведены в табл. 5.6.

Таблица 5.6

Проект	Начальные инвестиции, ден. ед.	Денежные потоки по годам, ден. ед.	
		I	II
A	75	100	150
B	70	90	170
C	80	120	90

5.17. Инвестор рассматривает 6 инвестиционных проектов, информация о которых приведена в табл. 5.7.

Таблица 5.7

Проект	Денежные потоки по годам, ден. ед.			
	0	I	II	III
1		-90	50	100
2	-50	40	70	110
3	-40	30	30	30
4		-40	20	80
5	-60	20	70	50
6	-100	70	140	100

В начале первого года инвестор располагает суммой в 100 ден. ед. Взаимоисключающими являются первый и второй проекты, а также третий и пятый. В результате осуществления второго, третьего и пятого проектов выпускается однородная продукция в количествах 400, 110 и 150 ед. соответственно. Спрос на эту продукцию не превышает 550 ед.

Определить оптимальный портфель инвестиций, если ставка дисконтирования — 15 %.

В. Задание на анализ эффективности инвестиционного проекта с использованем EXCEL

Условие задачи. Фирма рассматривает целесообразность замены оборудования. Стоимость нового оборудования —

1400 млн р. Срок эксплуатации оборудования — 8 лет. Годовая норма амортизации — 12,5 %. Планируемые доходы от замены оборудования — 650, 650, 600, 600, 550, 550, 500, 500 млн р. Планируемые расходы на материалы и обслуживание — 60 млн р. в первый год с ежегодным ростом их на 5 %. Налог на прибыль — 24 %. Норма прибыли альтернативных проектов — 18 % годовых.

Проанализировать инвестиционный проект.

Г. Инструкция по решению

Оценка проекта выполняется в три этапа:
1) расчет исходных показателей по годам;
2) расчет показателей эффективности;
3) анализ полученных результатов.

Этап 1

1. Строим электронную таблицу:

Годы (k)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
I_0 =	1400								
Доходы (Д)		650	650	600	600	550	550	500	500
Расходы (Р)									
Амортизация (А)									
Налогооблагаемая прибыль (НП)									
Налог (Н)									
Чистая прибыль (ЧП)									
Свободные денежные потоки (СДП)									
Дисконтированные денежные потоки (ДДП)									
r									
NPV									
IRR									
PI									

2. Доходы по годам, начальные инвестиции и ставку дисконта выписываем из условия и заносим в нужные ячейки таблицы.

3. Чтобы рассчитать NPV, нужно знать свободные денежные потоки:

$$СДП_0 = -I_0;$$

$$СДП_k = ЧП_k + А_k,\ k = \overline{1,8},$$

где k — номер года из шапки таблицы.

Чистую прибыль определяем вычитанием

$$ЧП_k = НП_k - Н_k,\ k = \overline{1,8},$$

где

$$Н_k = 0{,}24 \cdot НП_k,$$

$$НП_k = Д_k - Р_k - А_k.$$

Амортизация постоянна — 12,5 % от I_0 для всех лет:

$$А = 0{,}125 \cdot I_0.$$

$$Р_k = 60\ (1 + 0{,}05\ (k-1)),\ k = \overline{1,8}.$$

Записываем эти формулы в обратном порядке в таблицу: формулу записываем в соответствующую ячейку первого года, указав адреса ячеек с данными, затем копируем ее в клетки по годам.

4. Рассчитываем дисконтированные денежные потоки:

$$ДДП_0 = -I_0,$$

$$ДДП_k = \frac{СДП_k}{(1+r)^k},\ k = \overline{1,8}.$$

Формулы записываем в таблицу аналогично п. 3. Чтобы адрес ставки дисконта r сохранялся, перед буквой и цифрой в адресе ставим $.

Э т а п 2

1. Чистая приведенная стоимость

$$NPV = \sum_{k=0}^{n} ДДП_k.$$

Для расчета воспользуемся математической функцией СУММ. В качестве аргумента выбираем данные строки ДДП, начиная с нулевого года.

2. Внутренняя норма прибыли рассчитывается при помощи финансовой функции ВНДОХ

$$IRR = ВНДОХ\ (СДП_0,\ldots СДП_n).$$

Ставим курсор в ячейку для IRR, вызываем функцию ВНДОХ и выделяем строку СДП.

3. Показатель рентабельности

$$PI = \frac{\sum_{k=1}^{n} ДПП_k}{I_0}.$$

Пишем формулу в ячейку для PI аналогично предыдущим пунктам, но для функции СУММ в качестве аргумента берем данные строки ДДП, начиная с первого года.

Э т а п 3

Анализируем полученные результаты.

Г л а в а 6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИГРОВЫХ МОДЕЛЕЙ В ПРИНЯТИИ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

А. Общие сведения

Нередко при решении экономических задач возникает необходимость выбора оптимального решения в условиях неопределенности и риска. Особенностью таких условий является неясность исходов, последствий выбора решений одной стороной под влиянием случайных факторов и неизвестность поведения противоположной стороны. Такие ситуации называются *играми с природой* (иногда *статистическими играми*). Они решаются с помощью методов теории статистических решений. Термин «природа» характеризует некоторую объективную действительность, которая выступает как не имеющий конкретной цели и случайным образом выбирающий очередные ходы партнер по игре. Природа безразлична к выигрышу.

Сторона, принимающая решение (игрок A или статистик), имеет m стратегий: $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Природа может реализовать n возможных состояний: $П_1, П_2, ..., П_n$. Поскольку природа не является заинтересованной стороной, исход любого сочетания поведения сторон можно оценить с помощью выигрышей a_{ij} игрока A для каждой пары стратегий A_i и $П_j$. Все показатели игры записываются в виде платежной матрицы

$$A=|a_{ij}|_{mn}.$$

Часто построение платежной матрицы является наиболее трудоемким этапом подготовки принятия решения.

При анализе игры с природой вводится также показатель, позволяющий оценить, насколько то или иное состояние природы влияет на исход ситуации. Этот показатель называется *риском*.

Риском r_{ij} статистика, когда он пользуется чистой стратегией A_i при состоянии $П_j$ природы, называется разность между максимальным выигрышем $\max\limits_i a_{ij}$, который он мог бы получить, достоверно зная, что природой будет реализовано именно состояние $П_j$, и тем выигрышем a_{ij}, который он получит, используя стратегию A_i, не зная, какое из состояний $П_j$ природа действительно реализует. То есть элементы матрицы рисков определяются по формуле

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij} \geq 0.$$

Решение статистической игры может находиться либо в смешанных стратегиях, либо в чистых стратегиях.

Учитывая специфику статистических игр, при поиске оптимальных решений обращаются к различным критериям, дающим некоторую логическую схему принятия решения. Поскольку критерии формулируются на основе здравого смысла, интуиции и практической целесообразности, то они помогают оценить принимаемое решение с различных позиций, что позволяет избежать грубых ошибок в хозяйственной деятельности.

Применяется две группы критериев — использующих и не использующих априорные вероятности q_j состояний природы. К первой группе относятся критерии Байеса и Лапласа. В качестве оптимальной по *критерию Байеса* принимается чистая стратегия A_i, при которой максимизируется средний выигрыш статистика

$$\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \quad i = \overline{1, m},$$

то есть обеспечивается

$$\max_i \bar{a}_i = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j.$$

Если статистику представляются в равной мере правдоподобными все состояния $П_j$ природы, то

$$q_1 = \ldots = q_n = \frac{1}{n}$$

и оптимальной по *критерию Лапласа* считается чистая стратегия A_i, обеспечивающая

$$\max_i \bar{a}_i = \frac{1}{n} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Ко второй группе критериев, применяемых при неизвестных априорных вероятностях состояний природы, относятся критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица. Оптимальной по *критерию Вальда* считается чистая стратегия A_i, при которой наименьший выигрыш статистика будет максимальным, то есть ему обеспечивается

$$a = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Для смешанных стратегий критерий Вальда формулируется так: оптимальной считается та смешанная стратегия, при которой минимальный средний выигрыш статистика $\min\limits_i \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} p_i$ будет максимальным, то есть стратегия p^*, найденная из условия $\max\limits_p \min\limits_j \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} p_i$.

Оптимальной по *критерию Сэвиджа* считается та чистая стратегия A_i, при которой минимизируется величина r_i максимального риска, то есть обеспечивается $\min\limits_i \max\limits_j r_{ij}$.

Для смешанных стратегий критерий Сэвиджа формулируется так: оптимальной считается та смешанная стратегия, при которой максимальный средний риск статистика

$\max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij} p_i$ минимизируется, то есть стратегия p^*, найденная из условия $\min\limits_p \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij} p_i$.

Оптимальной по *критерию Гурвица* считается чистая стратегия A_i, найденная из условия

$$\max_i \left(\gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \max_j a_{ij} \right),$$

где γ принадлежит интервалу (0; 1) и выбирается из субъективных соображений.

При $\gamma = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий крайнего пессимизма Вальда, а при $\gamma = 0$ — в критерий крайнего оптимизма.

Надо отметить, что анализ практических ситуаций следует проводить по нескольким критериям, что позволит глубже вникнуть в суть явления и выбрать обоснованное решение.

Б. Задачи

6.1. Предприятие может выпускать три вида продукции: А, Б и В. Объемы реализации продукции зависят от спроса, который может находиться в одном из состояний — C_1, C_2 и C_3. Значения величины прибыли, которую получит предприятие при выпуске единицы i-го вида продукции при j-м состоянии спроса, заданы матрицей

$$\begin{array}{c} \\ \text{А} \\ \text{Б} \\ \text{В} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 60 & 40 \\ 50 & 40 & 50 \\ 60 & 50 & 40 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Определить оптимальные пропорции объемов выпуска продукции, гарантирующие максимальную среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса. Вероятности наступления различных величин спроса неизвестны.

6.2. Коммерческая фирма занимается реализацией новогодних игрушек. Спрос на елочные гирлянды может составить 200, 250, 300 или 350 шт. с вероятностями 0,3; 0,1; 0,2; 0,4 соответственно. Фирма закупает гирлянды по 2 ден. ед.

за 1 шт., а реализует по 3 ден. ед. Непроданные к Новому году гирлянды реализуются оптом по сниженной цене 1,8 ден. ед. за 1 шт.

Определить оптимальную стратегию поведения фирмы.

6.3. Кафетерий «Мечта» реализует кондитерские изделия собственного изготовления. Спрос на пирожные может составить 100, 120, 140 или 160 шт. с вероятностью 0,2; 0,3; 0,4; 0,1 соответственно. Затраты на производство одного пирожного составляют 70 ден. ед., а цена реализации — 100 ден. ед. Если пирожные не продаются в течение 36 ч, они портятся и магазин несет убытки.

Какое количество пирожных следует выпекать?

6.4. Небольшая частная фирма производит молочную продукцию. Один из ее продуктов — творожная масса. Необходимо решить, какое количество творожной массы следует производить в течение месяца, если вероятность того, что спрос составит 100, 150 или 200 кг равна соответственно 0,2; 0,5; 0,3. Затраты на производство 1 кг равны 1 тыс. ден. ед. Фирма продает массу по цене 1 тыс. 200 ден. ед. за 1 кг. Если масса не продается в течение месяца, то она снимается с реализации и фирма не получает дохода.

Дать рекомендации, сколько творожной массы производить фирме.

6.5. Туристская фирма «Топ тур» берет на реализацию у фирмы «Смок» туристские путевки. Объем реализации путевок изменяется в зависимости от потребительского спроса в пределах от 6 до 9 ед. Если путевок меньше, чем требует спрос на них, то можно заказать недостающее количество. При этом возникнут дополнительные расходы в размере 4 ден. ед. за каждую новую путевку. А если количество путевок превышает спрос, то потери за невостребованные путевки составят 3 ден. ед. Прибыль от реализации одной путевки составляет 10 ден. ед.

Определить, какое количество путевок выгоднее брать на реализацию.

6.6. Затраты фабрики в течение апреля—мая на производство единицы продукции таковы: по платьям — 8 ден. ед., по костюмам — 28 ден. ед. Цена реализации соответственно 16 и 48 ден. ед. Из опыта работы следует, что фабрика может реализовать в течение этих месяцев при теплой погоде 600 костюмов и 1975 платьев, а при прохладной — 625 платьев и 1000 костюмов.

Определить, какое количество платьев и костюмов предприятие должно выпустить, чтобы получить максимальную прибыль.

6.7. Объем реализации товара Т за рассматриваемый период колеблется в зависимости от покупательского спроса в пределах от 4 до 6 ед. Прибыль торгового предприятия от единицы реализованного товара Т равна 2 ден. ед. Если запасенный товар полностью реализовать не удастся, то расходы на содержание и хранение остатка составят 3 ден. ед. за единицу товара.

Используя игровой подход, определить оптимальный уровень запаса товара Т, обеспечивающий торговому предприятию наивысшую эффективность работы.

6.8. Для обеспечения однократной зимовки небольшой экспедиции требуется доставить к месту зимовки вместе с другими грузами запас топлива. В случае нормальной зимы достаточно 16 т, но при мягкой или суровой зиме эти цифры составляют 11 и 20 т. Если осуществить заброску топлива летом, то она будет стоить по 12 ден. ед. за тонну. Если придется доставлять топливо зимой дополнительно, то это обойдется в нормальную и суровую зиму соответственно на 1 и 4 ден. ед. за тонну дороже, чем летом. Обратная транспортировка неизрасходованного топлива по окончании зимовки обходится в 1 ден. ед. за тонну, а его стоимость не возмещается.

Какова оптимальная стратегия руководителя экспедиции, если он использует критерий Байеса ($q_1 = 0,5$; $q_2 = 0,2$; $q_3 = 0,3$)?

6.9. Небольшая фирма производит гигиенические средства для младенцев. В течение месяца реализуется 13, 14, 15 или 16 упаковок товара. От продажи каждой упаковки фирма получает 75 ден. ед. прибыли. Продукция имеет малый срок годности, поэтому, если упаковка не продана в месячный

срок, она должна быть уничтожена. Поскольку производство одной упаковки обходится в 115 ден. ед., потери фирмы составляют 115 ден. ед., если упаковка не продана к концу месяца. Вероятности продать 13, 14, 15 или 16 упаковок за месяц составляют соответственно 0,20; 0,35; 0,1 и 0,35.

Дать рекомендации по количеству производимой продукции.

6.10. Торговым предприятием планируется продажа сезонных товаров с учетом возможных вариантов покупательского спроса ($П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$). Предприятием разработано три хозяйственных стратегии продажи товаров (A_1, A_2, A_3).

Найти оптимальное поведение торгового предприятия, пользуясь критериями Сэвиджа и Гурвица при $\gamma = 0,6$, если товарооборот, зависящий от стратегий и покупательского спроса, представлен в виде платежной матрицы:

$П_j$ / A_i	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	40	20	30	35
A_2	60	80	20	35
A_3	35	45	50	70

6.11. Пятилетний срок эксплуатации производственного оборудования предприятия (цеха, участка цеха) может привести его в состояние, требующее а) замены отдельных деталей оборудования, б) капремонта оборудования, в) замены оборудования. Вероятности указанных состояний составляют 0,4; 0,5; 0,1. Руководитель предприятия может принять одно из трех решений для восстановления оборудования, которые соответственно потребуют следующих затрат:

1-е решение 5, 7, 12;
2-е решение 6, 8, 10;
3-е решение 12, 14, 9.

Проанализировав ситуацию, необходимо высказать соображения по принятию решения.

Глава 7. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

А. Общие сведения

Системы массового обслуживания представляют собой структуры, содержащие одно или несколько обслуживающих устройств (каналов), на вход которых в случайные моменты времени поступают требования для обслуживания. Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих заданные условия работы системы (число каналов, их производительность, характер потока заявок) с показателями эффективности обслуживания.

Системы массового обслуживания (СМО) классифицируются по разным признакам. По числу каналов обслуживания они делятся на *одноканальные* и *многоканальные*. В зависимости от условий ожидания требованием начала обслуживания различают *СМО с отказами* и *СМО с ожиданием*.

В СМО с отказами требования, поступающие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ и утрачиваются. В СМО с ожиданием требование, заставшее все обслуживающие каналы занятыми, ставится на очередь вплоть до освобождения любого из обслуживающих каналов.

СМО с ожиданием делятся на системы с ограниченным ожиданием и системы с неограниченным ожиданием. В системах с ограниченным ожиданием может ограничиваться либо длина очереди, либо время пребывания в очереди.

По месту нахождения источника требований СМО делятся на *разомкнутые* (когда источник требований находится вне системы) и *замкнутые* (когда источник находится в самой системе).

В настоящее время теоретически наиболее разработаны и удобны в практических приложениях методы решения таких систем массового обслуживания, процесс функционирования которых является марковским, то есть все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, простейшие.

Для *простейшего потока* частота поступления требований в систему подчиняется закону Пуассона, то есть вероят-

Предполагая пуассоновское распределение времени прибытия и экспоненциальное распределение продолжительности времени обслуживания, определить:

1) среднее время, которое клиент проводит в очереди;

2) среднюю длину очереди;

3) среднее время, которое клиент проводит в системе обслуживания;

4) среднее число клиентов в системе обслуживания;

5) вероятность того, что система обслуживания окажется незанятой при условии найма одного или другого механика.

Компания оценивает издержки по ожиданию клиентами своей очереди в 15 ден. ед /ч. Какого механика следует нанять, чтобы обеспечить меньшие совокупные издержки? Каковы минимальные совокупные издержки?

7.8. Фирма «Уют» предлагает своим клиентам помощь в дизайне дома или офиса. В нормальном режиме за каждый час прибывает в среднем 2,5 клиента. Единственный консультант по дизайну отвечает на вопросы клиента и дает необходимые рекомендации. Он тратит на каждого посетителя в среднем 10 мин.

Предполагая пуассоновское распределение времени прибытия и экспоненциальное распределение продолжительности обслуживания, определить:

1) среднее время, которое клиент проводит в очереди;

2) среднюю длину очереди;

3) среднее время, которое клиент проводит в системе обслуживания;

4) среднее число клиентов в системе обслуживания;

5) вероятность того, что система обслуживания окажется незанятой.

Желательно, чтобы прибывающий клиент не ждал своей очереди в среднем более 5 мин. Соответствует ли реальная ситуация данному пожеланию? Если нет, то что необходимо предпринять? Предположим, что консультант способен уменьшить среднее время, которое он проводит с клиентом, до 8 мин. Какой станет средняя скорость обслуживания? Будет ли достигнута желаемая цель?

7.9. Торговая фирма планирует принимать заказы клиентов по телефону. Для этой цели необходимо выделить и подготовить персонал, а также выбрать соответствующую мини-АТС с несколькими телефонными аппаратами. Порядок обслуживания должен быть следующим: если заказ поступает, когда все линии заняты, то абонент получает отказ. Если же в момент поступления заказа хотя бы одна линия свободна, то осуществляются переключение на эту линию и оформление заказа. Предполагаемая интенсивность входящего потока требований составляет 2,5 заказа/мин. Длительность же оформления заказа в среднем будет равна 0,8 мин.

Определить, какое минимальное количество каналов обслуживания необходимо, чтобы обслуживать не менее 90 % поступающих заказов. Рассчитать основные показатели работы СМО.

7.10. Станция автосервиса использует систему двухканальной очереди. Прибытие машин распределено по закону Пуассона со средней скоростью прибытия 6 маш./ч. Время обслуживания распределено экспоненциально со средней скоростью обслуживания 10 маш /ч.

Определить:

1) вероятность того, что все каналы свободны или заняты;
2) вероятность того, что в системе нет машин;
3) среднее число машин в очереди;
4) среднее время ожидания обслуживания;
5) среднее время пребывания в системе;
6) вероятность того, что вновь прибывшей машине придется ждать.

7.11. Рассмотрим работу автозаправочной станции, на которой имеются 3 заправочные колонки. Заправка одной машины длится приблизительно 2 мин. В среднем на АЗС каждую минуту прибывает машина, нуждающаяся в заправке бензином. Число мест в очереди не ограничено. Все потоки в системе простейшие.

Определить:

1) вероятность того, что в системе нет требований;
2) среднее число требований в очереди;
3) среднее время ожидания;
4) среднее время, которое требование проводит в системе;
5) вероятность того, что прибывающему требованию придется ждать обслуживания.

Пусть цель обслуживания состоит в том, чтобы обеспечить состояние, при котором в среднем не более 25 % требований вынуждены ждать. Предположим, что система расширилась до трехканальной.

Выполняется ли это условие в данном случае?

7.12. Фирма пейджинговой связи получает заказы на обслуживание по двухканальной телефонной линии, контролируемой двумя диспетчерами. Те из заказчиков, которые услышали сигнал «занято», пытаются перезвонить. Распределение заявок — пуассоновское, со средней скоростью прибытия 40 звонков/ч; каждый диспетчер может обработать 30 звонков/ч.

Определить:

1) в течение какого времени (в %) оба диспетчера свободны;
2) в течение какого времени (в %) оба диспетчера работают;
3) какова вероятность получить сигнал «занято», если в фирме работают 2, 3, 4 диспетчера.

Компания не хочет, чтобы 12 % звонящих получали сигнал «занято». Сколько для этого необходимо иметь диспетчеров?

7.13. На пункт техосмотра поступает простейший поток заявок (автомобилей) с интенсивностью $\lambda = 4$ маш /ч. Время осмотра распределено по показательному закону и равно в среднем 17 мин, в очереди может находиться не более 5 автомобилей.

Определить вероятностные характеристики пункта техосмотра в установившемся режиме.

7.14. Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На ее вход поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 3$ заявки/ч. Среднее время обслуживания одной заявки $t = 0{,}5$. Каждая обслуженная заявка приносит доход 5 ден. ед. Содержание канала обходится 3 ден. ед./ч.

Решить, выгодно ли в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трех.

7.15. Справочная служба университетской библиотеки получает запросы, поступающие по пуассоновскому закону со скоростью в среднем 10 запросов/ч. Время обслуживания распределено экспоненциально, скорость обслуживания — 12 запросов/ч.

Определить:

1) вероятность того, что в системе нет запросов;
2) среднее число запросов в очереди;
3) среднее время ожидания;
4) среднее время, которое запрос проводит в системе;
5) вероятность того, что запросу придется ждать обслуживания.

7.16. Определить, какое количество автоматических камер хранения необходимо установить на автостанции, чтобы вероятность отказа пассажиру в обслуживании не превышала 0,07. Априорно установлено, что будут пользоваться услугами камер хранения 8 пассажиров в сутки. Среднее время хранения багажа — 12 ч. Все потоки, связанные с работой камер хранения, простейшие.

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.1. $X^* = (50; 200; 50; 0; 0)$; $F_{max} = 2200$.

1.2. $X^* = (2778; 18\,160; 988; 84\,822; 14\,859; 25\,247; 2080; 7239; 2376; 39\,174; 1500; 25\,559; 2100; 7228; 2372; 64\,575)$; $F_{max} = 179\,660$.

1.5. $F_{min} = 1679$; $X = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 0 \\ 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$.

Глава 2

2.1. $Y = \begin{pmatrix} 66 \\ 36 \end{pmatrix}$.

2.2. а) $X = (680; 460)$;
б) $X = (425; 475)$;
в) $X = (200; 100)$;
г) $X = (120; 60)$.

2.3. $\Delta X = (28{,}8; 29{,}7)$.

2.4. а) $Y = \begin{pmatrix} 110 \\ 295 \\ 85 \end{pmatrix}$; б) $Y = \begin{pmatrix} 59 \\ 32{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$; в) $Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 118 \\ 73 \end{pmatrix}$.

2.5. а) $X = (228{,}9; 168{,}1; 208{,}6)$;
б) $X = (265{,}4; 532{,}2; 324{,}5)$,
$X = (238{,}6; 299{,}1; 366{,}1)$.

2.6. а) $X = (280; 640; 520)$;
б) $X = (260{,}8; 251{,}9; 164)$;
в) $X = (106{,}3; 136{,}3; 153{,}5)$;
г) $X = (200; 150; 100)$.

Глава 3

3.1. $q^* = 400$; $L^* = 1600$.
3.2. $q^* = 800$; $\tau^* = 9$; $r = 89$; $I_0 = 889$.
3.3. $q^* = 14$; $\tau^* = 102$ дн; $L^* = 210$.

3.4. $q^* = 30$; $\tau^* = 13$ дн.
3.6. $q^* = 192$; $y^* = 23$; $\tau^* = 11$ дн; $L^* = 83\,700$.
3.7. $q^* = 120$; $\tau^* = 72$ дн; $L^* = 360$.
3.9. $q_1^* = 3$; $q_2^* = 4$; $L^*(3) = L^*(4) = 49$.

Глава 4

4.5. $t_{кр} = 15$.
4.6. $t_{кр} = 22$.
4.7. $t_{кр} = 53$.
4.8. $t_{кр} = 21$.
4.12. $x_{12} = 10$, $x_{13} = 45$, $x_{23} = 20$.
4.13. $x_{12} = 10$, $x_{13} = 10$, $x_{23} = 10$.

Глава 5

5.1. NPV = 29; IRR = 16 %.
5.3. NPV = 268; IRR = 38,6 %.
5.4. $i < 40$ %.
5.7. NPV = -249,313; IRR = 5 %.
5.8. NPV = -38,372; IRR = 8 %.
5.9. $i = 10$ %; NPV = 77,795.
$i = 12$ %; NPV = 37,508.
$i = 18$ %; NPV = -66,521.
5.10. а) $NPV_А = 42{,}566$; б) $NPV_Б = 17{,}579$; в) $r = 6{,}7$ %.
5.11. PP = 4; DPP 4.
5.12. NPV = -133,673; IRR = 6 %.
5.13. $X^* = (1; 0; 0; 0; 1)$; $NPV_{max} = 161{,}383$.
5.14. NPV = 106,097; IRR = 15 %.
5.15. $X^* = (0; 1; 1)$; $NPV_{max} = 279{,}94$.
5.16. $X^* = (1; 1; 0)$; $NPV_{max} = 162{,}183$.
5.17. $X^* = (0; 1; 1; 1; 0; 0)$; $NPV_{max} = 171{,}478$.

Глава 6

6.7. $x^* = (0; 1/2; 1)$; $y^* = (1/2; 1{,}0)$; $\nu = 2/3$; $u^* = (1/3; 2/3; 0)$; $z^* = (0; 1/3; 2/3)$.

Глава 7

7.1. $p_0 = 0{,}2$; $p_{отк} = 0{,}4$.
7.2. $p_0 = 0{,}1579$; $p_{отк} = 0{,}211$.
7.3. $p_0 = 0{,}0769$; $p_{отк} = 0{,}6154$.
7.4. $p_0 = 0{,}00043$; $p_{отк} = 0{,}5$.

7.6. $p_0 = 0{,}111$; $\bar{r} = 0{,}889$.
7.7. $L^2_{\min} = 13{,}75$.
7.10. $p_0 = 0{,}5385$; $\bar{r} = 0{,}0593$.
7.11. 1) $p_0 = 0{,}111$; 2) $\bar{r} = 0{,}889$.
7.12. 1) 31 %; 2) 27,6 %;
3) $p_{отк}(2) = 0{,}276$; $p_{отк}(3) = 0{,}109$; $p_{отк}(4) = 0{,}035$.
7.13. $p_0 = 0{,}095$; $p_{отк} = 0{,}0336$.
7.16. $n = 7$; $p_{отк} = 0{,}627$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие / Под ред. А.В. Кузнецова. Мн.: БГЭУ, 1999.
2. *Аксень Э.М.* Математические методы в финансах: Анализ инвестиционных проектов. Мн.: БГЭУ, 1998.
3. *Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е.О.* Моделирование рисковых ситуаций в бизнесе. М.: Финансы и статистика, 1999.
4. Исследование операций в экономике / Под ред. Н.Ш. Кремера. М.: Банки и биржи, 1997.
5. *Костевич Л.С.* Информационные технологии оптимальных решений и реинжиниринг в повышении эффективности менеджмента. Мн.: БГЭУ, 2000.
6. *Костевич Л.С., Лапко А.А.* Теория игр. Исследование операций. Мн.: Вышэйш. шк., 1982.
7. *Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И.* Сборник задач по математическому программированию. Мн.: Вышэйш. шк., 1985.
8. *Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И.* Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование: Учеб. пособие. Мн.: Вышэйш. шк., 1995.
9. *Курицкий Б.Я.* Поиск оптимальных решений средствами EXCEL 7.0. СПб.: BHV, 1997.
10. *Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О.* Теория массового обслуживания в экономической сфере. М.: ЮНИТИ, 1998.
11. *Лапко А.А., Холод Н.И.* Исследование операций. Ч. 1. Марковские процессы: Теория массового обслуживания. Мн.: БГЭУ, 1996.
12. *Рутковский Р.А.* Менеджмент процессов массового обслуживания в коммерческой деятельности. Мн.: БГЭУ, 1997.
13. *Рутковский Р.А., Сакович В.А.* Экономико-математические методы в торговле. Мн.: Вышэйш. шк., 1986.
14. *Сакович В.А.* Исследование операций. Мн.: Вышэйш. шк., 1985.
15. *Федосеев В.В.* Экономико-математические методы и модели в маркетинге. М.: ЮНИТИ, 1996.
16. *Щедрин Н.И., Кархов А.Н.* Экономико-математические методы в торговле. Мн.: Вышэйш. шк., 1980.
17. *Эддоус М., Стэнсфилд Р.* Методы принятия решений. М.: ЮНИТИ, 1997.
18. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В. Федосеева. М.: ЮНИТИ, 1999.